

DRUGI KOLOKVIJUM IZ ELEKTROTEHNIKE

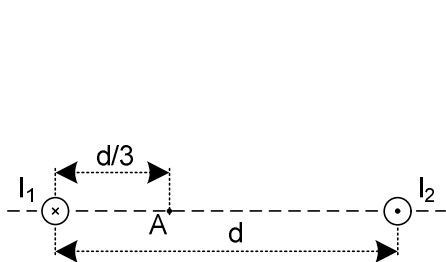
28. januar 2016.

GRUPA 1

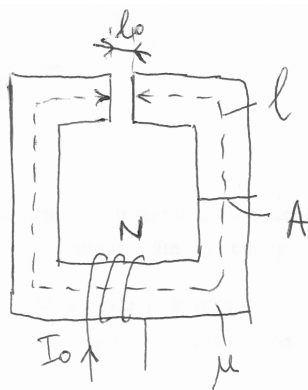
1. Na Slici 1 je prikazan poprečni presek dva beskonačno dugačka paralelna provodnika, na rastojanju  $d$ , kroz koje protiču struje intenziteta  $I_1 = I$  i  $I_2 = 4I$  u označenim smerovima. Provodnici se nalaze u vazduhu u istoj ravni.

- Odrediti i nacrtati rezultujući vektor magnetne indukcije u tački A. (4 poena)
- Odrediti i nacrtati vektor podužne sile kojom provodnik sa strujom  $I_2$  deluje na drugi provodnik. (2 poena)

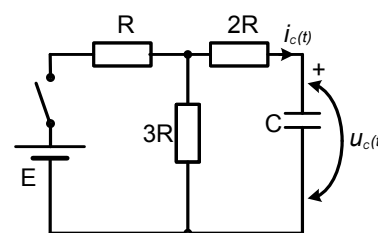
2. Na jezgro površine poprečnog preseka  $A$ , magnetne permeabilnosti  $\mu$ , dužine srednje linije  $l$  i debljine vazdušnog procepa  $l_0$ , namotan je namotaj sa  $N$  navojaka kroz koje protiče struja intenziteta  $I_0$  (Slika 2). Odrediti induktivnost namotaja (4 poena) i intenzitet vektora magnetne indukcije u vazdušnom procepu (5 poena).



Slika 1



Slika 2



Slika 3

3. U kolu na Slici 3 poznate su vrednosti elemenata:  $E$ ,  $R$  i  $C$ . Prekidač je zatvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. U trenutku  $t = 0$ , prekidač se otvara.

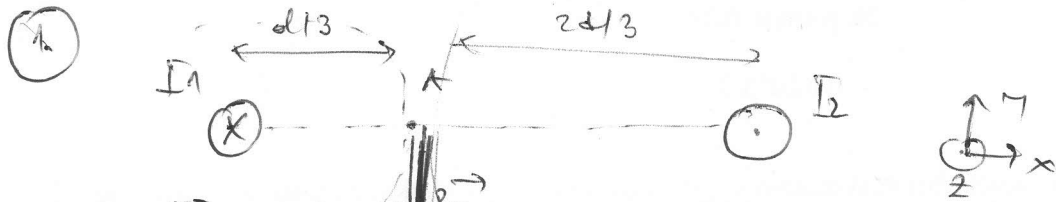
- Odrediti izraze za struju i napon kondenzatora nakon otvaranja prekidača i nacrtati odgovarajuće vremenske dijagrame. (8 poena)
- Odrediti trenutak  $t_1$  kada napon kondenzatora opadne na polovinu svoje maksimalne vrednosti. (2 poena)

4. Dva potrošača vezana su paralelno i priključena na naizmenični napon efektivne vrednosti  $U = 100 \text{ V}$ . Prvi potrošač je pretežno induktivan i ima impedansu  $Z_1 = 50\sqrt{2} \Omega$  i faktor snage  $\cos\varphi_1 = \sqrt{2}/2$ . Drugi potrošač reaktivnu i prividnu snagu  $Q_2 = -300 \text{ var}$  i  $S_2 = 500 \text{ VA}$ .

- Odrediti efektivne vrednosti struja  $I_1$  i  $I_2$  u potrošačima. (2 p.)
- Odrediti ukupnu aktivnu, ukupnu reaktivnu i ukupnu prividnu snagu celokupnog potrošača. (3 p.)
- Odrediti vrednost struje koju paralelna veza potrošača uzima iz mreže. (2 p.)
- Odrediti kompleksu impedansu drugog potrošača. (3 p.)

5. Na sistem trofaznog napona  $3 \times 1 \text{ kV}$  priključen je trofazni potrošač povezan u trougao. Impedansa svake faze iznosi  $\bar{Z}_f = 8 + j6 \Omega$ . Odrediti: efektivnu vrednost linijske struje, faktor snage i reaktivnu snagu potrošača. (5 poena)

GRUPA 1



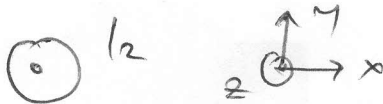
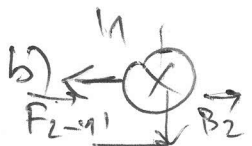
a)  $\vec{B}_A = \vec{B}_{A1} + \vec{B}_{A2}$

$\vec{B}_{A1} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d/3} \vec{j}$

$\vec{B}_{A2} = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi 2d/3} \vec{j}$

$= -\frac{3\mu_0 I_1}{4\pi d} \vec{j} = -\frac{3\mu_0 I_2}{4\pi d} \vec{j}$

$\vec{B}_A = -\frac{3\mu_0 I_1}{4\pi d} \vec{j} - \frac{3\mu_0 I_2}{4\pi d} \vec{j} = -\frac{3\mu_0}{4\pi d} (2I_1 + I_2) \vec{j}$  [T]



$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = I_1 l \vec{e}_1 \times \vec{B}_2$

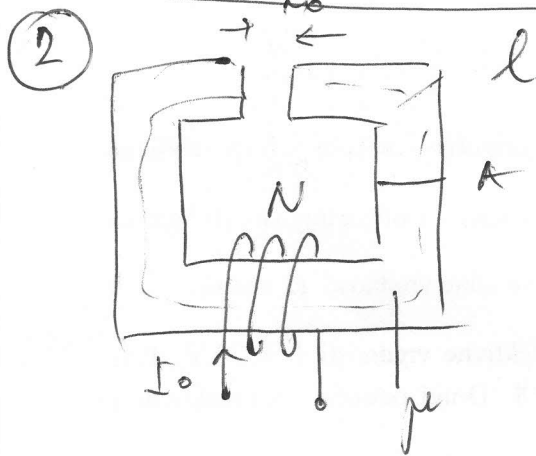
$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} (-\vec{j})$

$= -\frac{2\mu_0 I_2}{\pi d} \vec{j}$  [N/m]

$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = I_1 (-\vec{i}) \times \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} (-\vec{j})$

$\vec{e}_1 = -\vec{k}$

$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{i}$  [N/m]



$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$

$Hl + H_0 l_0 = NI_0$

$\frac{Bl}{\mu} + \frac{B l_0}{\mu_0} = NI_0$

$\frac{\phi l}{\mu A} + \frac{\phi l_0}{\mu_0 A} = NI_0$

$\phi = \frac{NI_0}{\frac{l}{\mu A} + \frac{l_0}{\mu_0 A}}$

a)  $L = \frac{\Psi}{I_0} = \frac{N\phi}{I_0} = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu A} + \frac{l_0}{\mu_0 A}}$  [H]

c)  $B_0 = B = \frac{\phi}{A} = \frac{NI_0}{\frac{l}{\mu} + \frac{l_0}{\mu_0}}$  [T]

3.

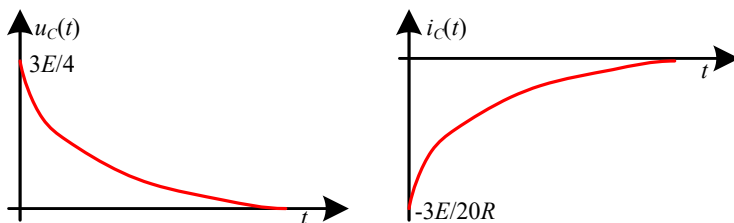
	<p>Kada je prekidač zatvoren u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje i nema struje kroz kondenzator pa postoji samo struja kroz otpornike <math>R</math> i <math>3R</math>:</p> $I = \frac{E}{R + 3R} = \frac{E}{4R}$ <p>Napon na kondenzatoru je tada:</p> $U_{C_0} = 3R \frac{E}{4R} = \frac{3}{4} E$ <p>U prelaznom procesu postoji samo deo kola sa otpornicima <math>3R</math> i <math>2R</math> i kondenzatorom <math>C</math>, pa je jednačina u prelaznom procesu:</p>
--	---

$3Ri_C(t) + 2Ri_C(t) + u_C(t) = 0 \Rightarrow 5Ri_C(t) + u_C(t) = 0$ , dok je veza između napona i struje na kondenzatoru:

$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ , odnosno dobija se diferencijalna jednačina:  $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{5RC} = 0$ , gde je vremenska konstanta

$\tau = 5RC$ , i čije je rešenje:  $u_C(t) = \frac{3}{4} E e^{-t/\tau}$ ,

struja  $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{3CE}{4} \frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{3CE}{4 \cdot 5RC} e^{-t/\tau} = -\frac{3E}{20R} e^{-t/\tau}$



b) Maksimalna vrednost napona je  $u_{C_{\max}} = \frac{3}{4} E$ , trenutak  $t_1$  u kom napon opadne na polovinu svoje maksimalne

vrednosti ispunjava uslov:  $u_C(t_1) = \frac{3}{4} E e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{2} \frac{3}{4} E \Rightarrow e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow t_1 = -\tau \ln \frac{1}{2} = \tau \ln 2 = 5RC \ln 2$

4.

	<p>a) Kako je poznata efektivna vrednost napona i impedsa prvog prvog potrošača efektivna vrednost struje kroz prvi potrošač je: <math>I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{100}{50\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ A}</math> (1 p)</p> <p>Poznata je prividna snaga i efektivna vrednost napona drugog potrošača, pa je efektivna vrednost struje:</p> $I_2 = \frac{S_2}{U} = \frac{500}{100} = 5 \text{ A}$ (1 p)
--	---

b) Na osnovu poznate vrednosti za faktor snage dobija se:  $\sin \varphi = +\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$ , znak + se uzima jer je dato da je potrošač induktivan. Rezistansa i reaktansa prvog potrošača su:

$R_1 = Z_1 \cos \varphi_1 = 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 \Omega$ ,  $X_1 = Z_1 \sin \varphi_1 = 50\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 \Omega$ , pa su aktivna i reaktivna snaga prvog

potrošača:  $P_1 = R_1 I_1^2 = 50\sqrt{2}^2 = 100 \text{ W}$ ,  $Q_1 = X_1 I_1^2 = 50\sqrt{2}^2 = 100 \text{ var}$

$Q_2 = -300 \text{ var}$ ,  $P_2 = \sqrt{S_2^2 - Q_2^2} = \sqrt{500^2 - (-300)^2} = 100\sqrt{25 - 9} = 100\sqrt{16} = 400 \text{ W}$

$P = P_1 + P_2 = 100 + 400 = 500 \text{ W}$ ,  $Q = Q_1 + Q_2 = 100 - 300 = -200 \text{ var}$  (2 p)

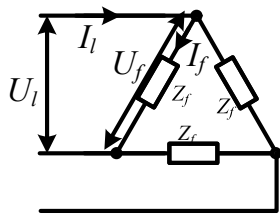
$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{500^2 + (-200)^2} = 100\sqrt{5^2 + 2^2} = 100\sqrt{29} \text{ VA}$  (1 p)

c)  $I = \frac{S}{U} = \frac{100\sqrt{29}}{100} = \sqrt{29} \text{ A}$  (2 p)

d)  $Z_2 = \frac{U}{I_2} = 20 \Omega$ ,  $\cos \varphi_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{400}{500} = 0.8$ ,  $\sin \varphi_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{-300}{500} = -0.6$ ,

$$\overline{Z}_2 = Z_2 \cos \varphi_2 + jZ_2 \sin \varphi_2 = (16 - j12) \Omega \quad (3 \text{ p})$$

5.



Za trofazni potrošač vezan u trougao važi:  $U_f = U_l / \sqrt{3}$ ,  $I_f = I_l / \sqrt{3}$ , osim toga, važi:

$Z_f = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \Omega$ , kao i  $I_f = U_f / Z_f = 1000 / 10 = 100 \text{ A}$ , pa je efektivna

vrednost linijske struje  $I_l = I_f \sqrt{3} = 100\sqrt{3} \text{ A}$  (3 p)

Faktor snage je  $\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R_f}{Z_f} = \frac{8}{10} = 0.8$  (1 p)

Reaktivna snaga  $Q = 3 X_f I_f^2 = 3 \cdot 6 \cdot 10000 = 180 \text{ kvar}$  (1 p)

DRUGI KOLOKVIJUM IZ ELEKTROTEHNIKE

28. januar 2015.

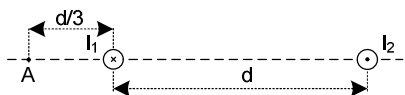
GRUPA 2

1. Na Slici 1 je prikazan poprečni presek dva beskonačno dugačka paralelna provodnika, na rastojanju  $d$ , kroz koje protiču struje intenziteta  $I_1=2I$  i  $I_2=4I$  u označenim smerovima. Provodnici se nalaze u vazduhu u istoj ravni.

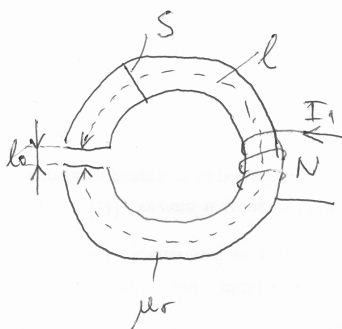
a) Odrediti i nacrtati rezultujućí vektor magnetne indukcije u tački A. (4 poena)

b) Odrediti i nacrtati vektor podužne sile kojom provodnik sa strujom  $I_1$  deluje na drugi provodnik. (2 poena)

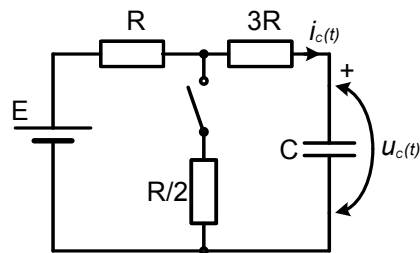
2. Na jezgro površine poprečnog preseka  $S$ , relativne magnetne permeabilnosti  $\mu_r$ , dužine srednje linije  $l$  i debljine vazdušnog procepa  $l_0$ , namotan je namotaj sa  $N$  navojaka kroz koje protiče struja intenziteta  $I_1$  (Slika 2). Odrediti induktivnost namotaja (4 poena) i magnetni fluks u vazdušnom procepu (5 poena).



Slika 1



Slika 2



Slika 3

3. U kolu na Slici 3 poznate su vrednosti elemenata:  $E$ ,  $R$  i  $C$ . Prekidač je zatvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. U trenutku  $t = 0$ , prekidač se otvara.

a) Odrediti izraze za struju i napon kondenzatora nakon otvaranja prekidača i nacrtati odgovarajuće vremenske dijagrame. (8 poena)

b) Odrediti trenutak  $t_1$  kada napon kondenzatora poraste na vrednost dvostruko veću od svoje minimalne vrednosti. (2 poena)

4. Dva potrošača vezana su paralelno i priključena na naizmeničan napon efektivne vrednosti  $U = 100 \text{ V}$ . Prvi potrošač pretežno je kapacitivan i ima aktivnu otpornost  $R_1 = 25 \Omega$  i faktor snage  $\cos \varphi_1 = \sqrt{2}/2$ . Drugi potrošač ima reaktivnu i prividnu snagu  $Q_2 = 800 \text{ var}$  i  $S_2 = 1000 \text{ VA}$ .

a) Odrediti efektivne vrednosti struja  $I_1$  i  $I_2$  u potrošača. (2 poena)

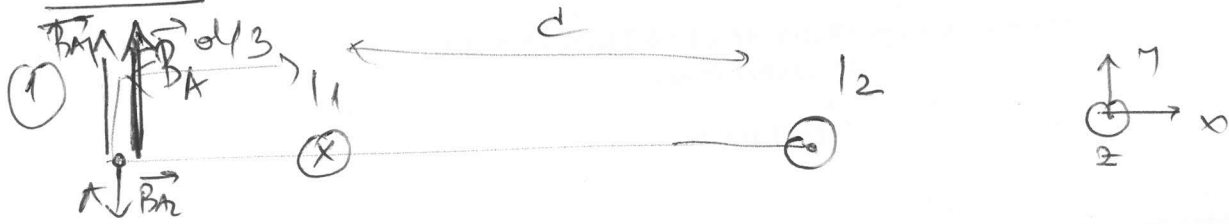
b) Odrediti ukupnu aktivnu, ukupnu reaktivnu i ukupnu prividnu snagu celokupnog potrošača. (3 poena)

c) Odrediti vrednost struje koju paralelna veza potrošača uzima iz mreže. (2 poena)

d) Odrediti kompleksnu impedansu drugog potrošača. (3 poena)

5. Na sistem trofaznog napona  $3 \times 1500 \text{ V}$  priključen je trofazni potrošač povezan u zvezdu. Impedansa svake faze potrošača iznosi  $\bar{Z}_f = 400 - j300 \Omega$ . Odrediti: efektivnu vrednost linijske struje, faktor snage i aktivnu snagu potrošača. (5 poena)

GRUPA 2



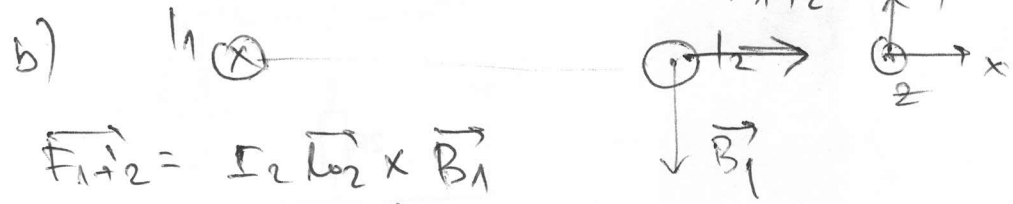
a)  $\vec{B}_A = \vec{B}_{A1} + \vec{B}_{A2} =$

$\vec{B}_{A1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d/3} \vec{j} = \frac{3\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{j}$

$\vec{B}_{A2} = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d/3} \vec{j} = -\frac{3\mu_0 I_2}{8\pi d} \vec{j}$

$\vec{B}_A = \frac{3\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{j} - \frac{3\mu_0 I_2}{8\pi d} \vec{j} = \frac{3\mu_0}{8\pi d} (4I_1 - I_2) \vec{j} = \frac{3\mu_0}{8\pi d} (8I - 4I) \vec{j} = \frac{3\mu_0 4I}{8\pi d} \vec{j}$

$\vec{B}_A = \frac{3\mu_0 I}{2\pi d} \vec{j} \quad [T]$

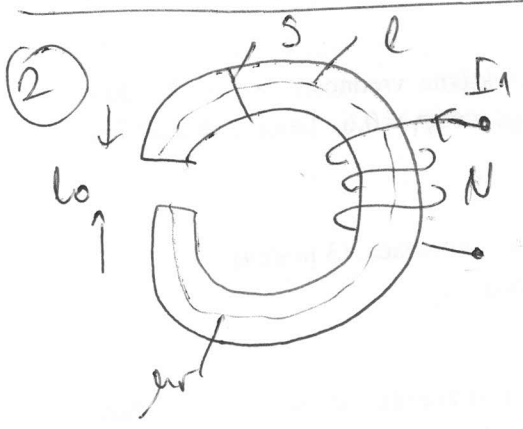


$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 \vec{l}_2 \times \vec{B}_1$

$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{j} \quad \vec{l}_2 = \vec{k}$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 \vec{k} \times \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{j}\right) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{k} \times \vec{j} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{i}$

$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 8I^2}{2\pi d} \vec{i} = \frac{4\mu_0 I^2}{\pi d} \vec{i} \quad [N]$



$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$

$Hl + H_0 l_0 = NI_1$

$\frac{Bl}{\mu_0 \mu_r s} + \frac{B l_0}{\mu_0} = NI_1$

$\frac{\phi l}{\mu_0 \mu_r s} + \frac{\phi l_0}{\mu_0 s} = NI_1$

$\phi = \frac{NI_1}{\frac{l}{\mu_0 \mu_r s} + \frac{l_0}{\mu_0 s}}$

a)  $L = \frac{N\phi}{I_1} = \frac{N^2}{I_1} = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu_0 \mu_r s} + \frac{l_0}{\mu_0 s}}$

b)  $\phi_0 = \phi = \frac{NI_1}{l/\mu_0 \mu_r s + l_0/\mu_0 s}$

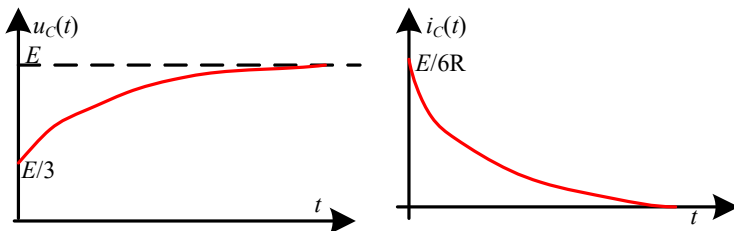
3.

	<p>Kada je prekidač zatvoren u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje i nema struje kroz kondenzator pa postoji samo struja kroz otpornike <math>R</math> i <math>R/2</math>:</p> $I = \frac{E}{R + R/2} = \frac{2E}{3R}. \text{ Napon na kondenzatoru je tada } U_{C_0} = \frac{R}{2} \frac{2E}{3R} = \frac{1}{3} E$ <p>U prelaznom procesu postoji samo deo kola sa generatorom <math>E</math>, otpornicima <math>R</math> i <math>3R</math> i kondenzatorom <math>C</math>, pa je jednačina u prelaznom procesu:</p> $E - Ri_c(t) - 3Ri_c(t) - u_c(t) = 0 \Rightarrow 4Ri_c(t) + u_c(t) = E$
--	---

Veza između napona i struje na kondenzatoru:  $i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$ , odnosno dobija se diferencijalna jednačina:

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{4RC} = \frac{E}{4RC}, \text{ gde je vremenska konstanta } \tau = 4RC, \text{ i čije je rešenje: } u_c(t) = E \left( 1 - \frac{2}{3} e^{-t/\tau} \right), \text{ struja}$$

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = -\frac{2CE}{3} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{2CE}{3} \frac{1}{4RC} e^{-t/\tau} = \frac{E}{6R} e^{-t/\tau}$$



b) Minimalna vrednost napona je  $u_{c_{\min}} = \frac{1}{3} E$ , trenutak  $t_1$  u kom napon poraste na dvostruku vrednost od svoje minimalne vrednosti ispunjava uslov:

$$u_c(t_1) = E \left( 1 - \frac{2}{3} e^{-t_1/\tau} \right) = 2 \frac{1}{3} E \Rightarrow 2e^{-t_1/\tau} = 1 \Rightarrow t_1 = -\tau \ln \frac{1}{2} = \tau \ln 2 = 4RC \ln 2$$

4.

	<p>a) Impedansa prvog potrošača su: <math>Z_1 = \frac{R_1}{\cos \varphi_1} = \frac{25}{\sqrt{2}/2} = 25\sqrt{2} \Omega</math>, pa je efektivna vrednost struje kroz prvi potrošač je: <math>I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{100}{25\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ A}</math> (1 p)</p> <p>Poznata je privedna snaga i efektivna vrednost napona drugog potrošača, pa je efektivna vrednost struje:</p> $I_2 = \frac{S_2}{U} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ A}$ (1 p)
--	---

b) Na osnovu poznate vrednosti za faktor snage dobija se:  $\sin \varphi = -\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = -\sqrt{1 - (\sqrt{2}/2)^2} = -\sqrt{2}/2$ , znak se uzima jer je dato da je potrošač kapacitivan. Reaktansa prvog potrošača je  $X_1 = Z_1 \sin \varphi_1 = 25\sqrt{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -25 \Omega$ . Aktivna i reaktivna snaga prvog potrošača su onda:

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 25 \cdot (2\sqrt{2})^2 = 200 \text{ W}, \quad Q_1 = X_1 I_1^2 = -25 \cdot (2\sqrt{2})^2 = -200 \text{ var}$$

$$Q_2 = 800 \text{ var}, \quad P_2 = \sqrt{S_2^2 - Q_2^2} = \sqrt{1000^2 - 800^2} = 100\sqrt{100 - 64} = 100\sqrt{36} = 600 \text{ W}$$

$$P = P_1 + P_2 = 200 + 600 = 800 \text{ W}, \quad Q = Q_1 + Q_2 = -200 + 800 = 600 \text{ var}$$
 (2 p)

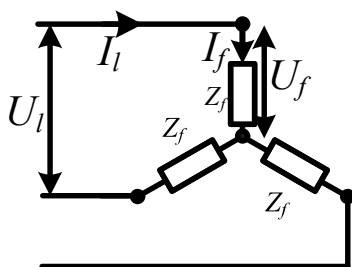
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{800^2 + 600^2} = 100\sqrt{8^2 + 6^2} = 1000 \text{ VA}$$
 (1 p)

c)  $I = \frac{S}{U} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ A}$  (1 p)

$$d) Z_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{100}{10} = 10 \Omega, \cos \varphi_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{600}{1000} = 0.6, \sin \varphi_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{800}{1000} = 0.8$$

$$\overline{Z}_2 = Z_2 \cos \varphi_2 + jZ_2 \sin \varphi_2 = 10 \cdot 0.6 + j10 \cdot 0.8 = (6 + j8) \Omega \quad (3 \text{ p})$$

5.



Za trofazni potrošač vezan u zvezdu važi:  
 $U_f = U_l / \sqrt{3} = 1500 / \sqrt{3} \text{ V}$ ,  $I_f = I_l$ , osim toga, važi:

$$Z_f = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \Omega, \text{ kao i}$$

$I_f = U_f / Z_f = 1500 / \sqrt{3} / 500 = \sqrt{3} \text{ A}$ , pa je efektivna vrednost linijske

$$\text{struje } I_l = I_f = \sqrt{3} \text{ A} \quad (3 \text{ p})$$

$$\text{Faktor snage je } \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R_f}{Z_f} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Aktivna snaga } P = 3R_f I_f^2 = 3 \cdot 400 \cdot (\sqrt{3})^2 = 3600 \text{ W} \quad (1 \text{ p})$$



**DRUGI KOLOKVIJUM IZ ELEKTROTEHNIKE**  
**28. januar 2016.**

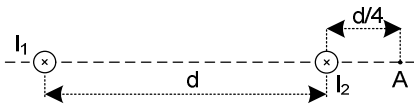
**GRUPA 3**

1. Na Slici 1 je prikazan poprečni presek dva beskonačno dugačka paralelna provodnika, na rastojanju  $d$ , kroz koje protiču struje intenziteta  $I_1 = 5I$  i  $I_2 = 2I$  u označenim smerovima. Provodnici se nalaze u vazduhu u istoj ravni.

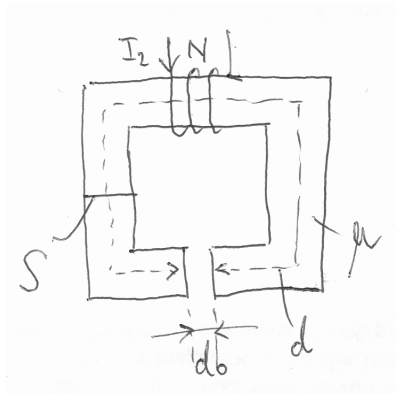
a) Odrediti i nacrtati rezultujući vektor magnetne indukcije u tački A. (4 poena)

b) Odrediti i nacrtati vektor podužne sile kojom provodnik sa strujom  $I_1$  deluje na drugi provodnik. (2 poena)

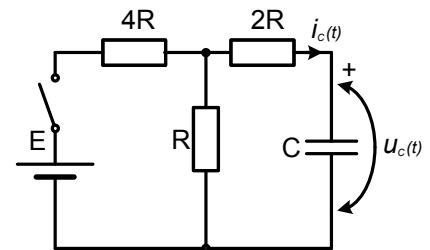
2. Na jezgro površine poprečnog preseka  $S$ , magnetne permeabilnosti  $\mu$ , dužine srednje linije  $d$  i debljine vazdušnog procepa  $d_0$ , namotan je namotaj sa  $N$  navojaka kroz koje protiče struja intenziteta  $I_2$  (Slika 2).  
Odrediti induktivnost namotaja (4 poena) i magnetni fluks u jezgru (6 poena).



Slika 1



Slika 2



Slika 3

3. U kolu na Slici 3 poznate su vrednosti elemenata:  $E$ ,  $R$  i  $C$ . Prekidač je zatvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. U trenutku  $t = 0$ , prekidač se otvara.

a) Odrediti izraze za struju i napon kondenzatora nakon otvaranja prekidača i nacrtati odgovarajuće vremenske dijagrame. (8 poena)

b) Odrediti trenutak  $t_1$  kada napon kondenzatora opadne na četvrtinu svoje maksimalne vrednosti. (2 poena)

4. Dva potrošača vezana su paralelno i priključena na naizmenični napon efektivne vrednosti  $U = 20 \text{ V}$ . Prvi potrošač je kapacitivan i ima impedansu  $Z_1 = 10 \Omega$  i faktor snage  $\cos \varphi_1 = 0.8$ . Drugi potrošač ima reaktivnu i prividnu snagu  $Q_2 = 32 \text{ W}$  i  $S_2 = 40 \text{ VA}$ .

a) Odrediti efektivne vrednosti struja  $I_1$  i  $I_2$  u potrošačima. (2 poena)

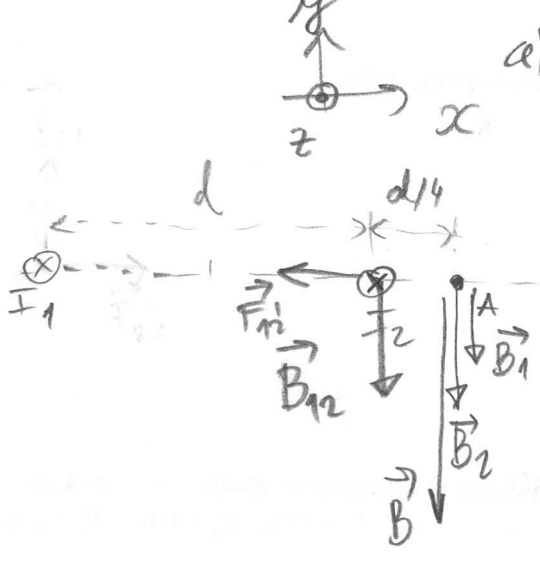
b) Odrediti ukupnu aktivnu, ukupnu reaktivnu i ukupnu prividnu snagu celokupnog potrošača. (3 poena)

c) Odrediti vrednost struje koju paralelna veza potrošača uzima iz mreže. (2 poena)

d) Odrediti kompleksnu impedansu drugog potrošača. (3 poena)

5. Na sistem trofaznog napona  $3 \times 300 \text{ V}$  priključen je trofazni potrošač povezan u trougao. Impedansa svake faze potrošača iznosi  $\bar{Z}_f = 60 - j80 \Omega$ . Odrediti: efektivnu vrednost linijske struje, faktor snage i reaktivnu snagu potrošača. (5 poena)

1



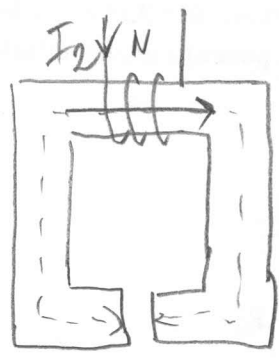
a)  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{5d}{4}} (-\vec{j}) = -\frac{2\mu_0 I}{\pi d} \vec{j}$

$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \frac{d}{4}} (-\vec{j}) = -\frac{4\mu_0 I}{\pi d} \vec{j}$

$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{6\mu_0 I}{\pi d} \vec{j}$

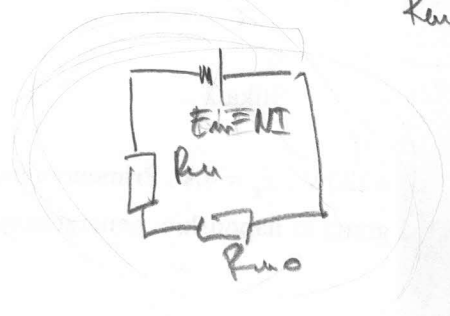
б)  $\vec{F}_{12} = \frac{I_2 \vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}}{l_2} = \frac{2I (-\vec{r}) \times \frac{\mu_0 5I}{2\pi d} (-\vec{j})}{1} = \frac{5\mu_0 I^2}{\pi d} (-\vec{i})$

2



a)  $L = \frac{N^2}{R_{m1} + R_{m0}} = \frac{N^2}{\frac{d}{\mu S} + \frac{d_0}{\mu_0 S}} = \frac{N^2 S}{\frac{d}{\mu} + \frac{d_0}{\mu_0}}$

б)  $\phi = \frac{NI_2}{R_{m1} + R_{m0}} = \frac{NI_2}{\frac{d}{\mu S} + \frac{d_0}{\mu_0 S}}$



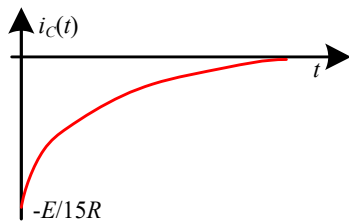
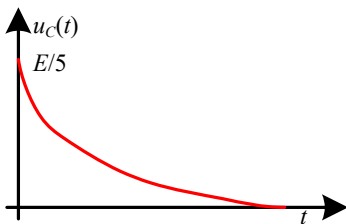
3.

	<p>Kada je prekidač zatvoren u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje i nema struje kroz kondenzator pa postoji samo struja kroz otpornike <math>4R</math> i <math>R</math>:</p> $I = \frac{E}{4R + R} = \frac{E}{5R}$ <p>Napon na kondenzatoru je tada <math>U_{C_0} = R \frac{E}{5R} = \frac{1}{5}E</math></p> <p>U prelaznom procesu postoji samo deo kola sa otpornicima <math>R</math> i <math>2R</math> i kondenzatorom <math>C</math>, pa je jednačina u prelaznom procesu:</p> $Ri_c(t) + 2Ri_c(t) + u_c(t) = 0 \Rightarrow 3Ri_c(t) + u_c(t) = 0$
--	--

Veza između napona i struje na kondenzatoru:  $i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$ , odnosno dobija se diferencijalna jednačina:

$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{3RC} = 0$ , gde je vremenska konstanta  $\tau = 3RC$ , i čije je rešenje:  $u_c(t) = \frac{1}{5}Ee^{-t/\tau}$ , struja

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{CE}{5} \frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{CE}{5 \cdot 3RC} e^{-t/\tau} = -\frac{E}{15R} e^{-t/\tau}$$



b) Maksimalna vrednost napona je  $u_{c_{max}} = \frac{1}{5}E$ , trenutak  $t_1$  u kom napon opadne na četvrtinu svoje maksimalne

vrednosti ispunjava uslov:  $u_c(t_1) = \frac{1}{5}Ee^{-t_1/\tau} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}E \Rightarrow e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{4} \Rightarrow t_1 = -\tau \ln \frac{1}{4} = \tau \ln 4 = 3RC \ln 4$

4.

	<p>a) Kako je poznata efektivna vrednost napona i impedsa prvog prvog potrošača efektivna vrednost struje kroz prvi potrošač je: <math>I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}</math> (1 p)</p> <p>Poznata je prividna snaga i efektivna vrednost napona drugog potrošača, pa je efektivna vrednost struje:</p> $I_2 = \frac{S_2}{U} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$ (1 p)
--	---

b) Na osnovu poznate vrednosti za faktor snage dobija se:  $\sin \varphi = -\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = -\sqrt{1 - 0.8^2} = -0.6$ , znak - se uzima jer je dato da je potrošač kapacitivan. Rezistansa i reaktansa prvog potrošača su:  $R_1 = Z_1 \cos \varphi_1 = 10 \cdot 0.8 = 8 \Omega$ ,  $X_1 = Z_1 \sin \varphi_1 = 10 \cdot (-0.6) = -6 \Omega$  Pa su aktivna i reaktivna snaga prvog potrošača:  $P_1 = R_1 I_1^2 = 8 \cdot 2^2 = 32 \text{ W}$ ,  $Q_1 = X_1 I_1^2 = -6 \cdot 2^2 = -24 \text{ var}$

$$Q_2 = 32 \text{ var}, P_2 = \sqrt{S_2^2 - Q_2^2} = \sqrt{40^2 - (32)^2} = 8\sqrt{5^2 - 4^2} = 8\sqrt{9} = 24 \text{ W}$$

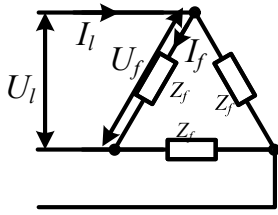
$$P = P_1 + P_2 = 32 + 24 = 56 \text{ W}, \quad Q = Q_1 + Q_2 = -24 + 32 = 8 \text{ var}$$
 (2 p)

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{56^2 + 8^2} = 8\sqrt{7^2 + 1^2} = 8\sqrt{50} = 40\sqrt{2} \text{ VA}$$
 (1 p)

$$c) I = \frac{S}{U} = \frac{40\sqrt{2}}{20} = 2\sqrt{2} \text{ A}$$
 (2 p)

$$d) R_2 = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{24}{4} = 6 \Omega, \quad X_2 = \frac{Q_2}{I_2^2} = \frac{32}{4} = 8 \Omega, \quad \overline{Z_2} = R_2 + jX_2 = (6 + j8) \Omega$$
 (3 p)

5.



Za trofazni potrošač vezan u trougao važi:  $U_f = U_l / \sqrt{3}$ ,  $I_f = I_l / \sqrt{3}$ , osim toga, važi:

$Z_f = \sqrt{60^2 + (-80)^2} = 100 \Omega$ , kao i  $I_f = U_f / Z_f = 300 / 100 = 3 \text{ A}$ , pa je  
 efektivna vrednost linijske struje  $I_l = I_f \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ A}$  (3 p)

Faktor snage je  $\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R_f}{Z_f} = \frac{6}{10} = 0.6$  (1 p)

Reaktivna snaga  $Q = 3 X_f I_f^2 = 3 \cdot (-80) \cdot 9 = -2160 \text{ var}$  (1 p)

DRUGI KOLOKVIJUM IZ ELEKTROTEHNIKE

28. januar 2016.

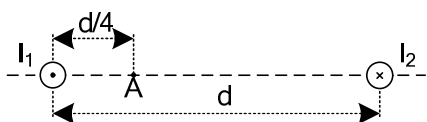
GRUPA 4

1. Na Slici 1 je prikazan poprečni presek dva beskonačno dugačka paralelna provodnika, na rastojanju  $d$ , kroz koje protiču struje intenziteta  $I_1=3I$  i  $I_2=I$  u označenim smerovima. Provodnici se nalaze u vazduhu u istoj ravni.

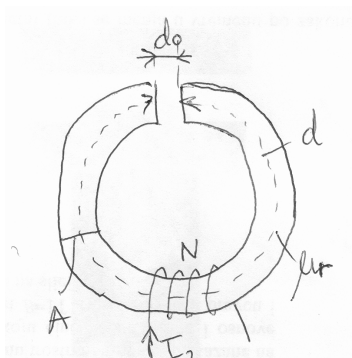
a) Odrediti i nacrtati rezultujućí vektor magnetne indukcije u tački A. (4 poena)

b) Odrediti i nacrtati vektor podužne sile kojom provodnik sa strujom  $I_2$  deluje na drugi provodnik. (2 poena)

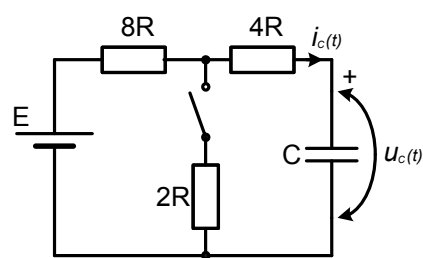
2. Na jezgro površine poprečnog preseka  $A$ , relativne magnetne permeabilnosti  $\mu_r$ , dužine srednje linije  $d$  i debljine vazdušnog procepa  $d_0$ , namotan je namotaj sa  $N$  navojaka kroz koje protiče struja intenziteta  $I_3$  (Slika 2). Odrediti induktivnost namotaja (4 poena) i intenzitet vektora magnetne indukcije u jezgru (5 poena).



Slika 1



Slika 2



Slika 3

3. U kolu na Slici 3 poznate su vrednosti elemenata:  $E$ ,  $R$  i  $C$ . Prekidač je zatvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. U trenutku  $t = 0$ , prekidač se otvara.

a) Odrediti izraze za struju i napon kondenzatora nakon otvaranja prekidača i nacrtati odgovarajuće vremenske dijagrame. (8 poena)

b) Odrediti trenutak  $t_1$  kada napon kondenzatora poraste na vrednost četiri puta veću od svoje minimalne vrednosti. (2 poena)

4. Dva potrošača vezana su paralelno i priključena na naizmeničan napon efektivne vrednosti  $U = 100 \text{ V}$ . Prvi potrošač pretežno je induktivan i ima aktivnu otpornost  $R_1 = 3 \Omega$  i faktor snage  $\cos \varphi_1 = 0.6$ . Drugi potrošač ima reaktivnu i prividnu snagu  $Q_2 = -800 \text{ var}$  i  $S_2 = 1000 \text{ VA}$ .

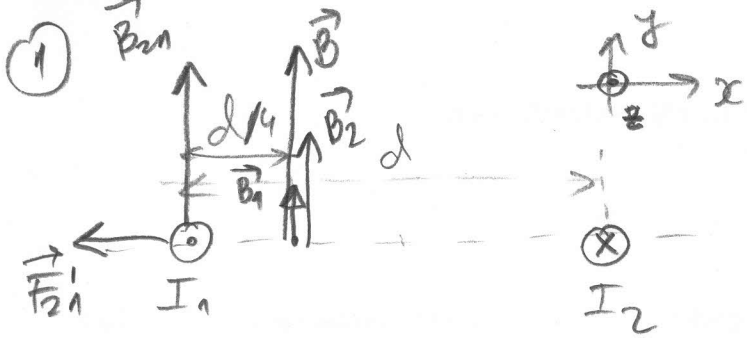
a) Odrediti efektivne vrednosti struja  $I_1$  i  $I_2$  u potrošača. (2 poena)

b) Odrediti ukupnu aktivnu, ukupnu reaktivnu i ukupnu prividnu snagu celokupnog potrošača. (3 poena)

c) Odrediti vrednost struje koju paralelna veza potrošača uzima iz mreže. (2 poena)

d) Odrediti kompleksnu impedansu drugog potrošača. (3 poena)

5. Na sistem trofaznog napona  $3 \times 500 \text{ V}$  priključen je trofazni potrošač povezan u zvezdu. Impedansa svake faze potrošača iznosi  $\bar{Z}_f = 300 + j400 \Omega$ . Odrediti: efektivnu vrednost linijske struje, faktor snage i aktivnu snagu potrošača. (5 poena)



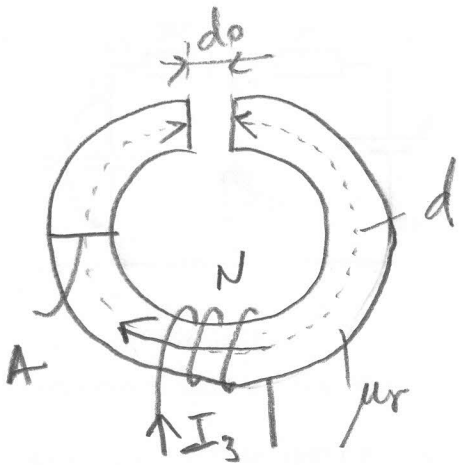
$$a) \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \frac{d}{4}} \vec{j} = \frac{\mu_0 3I}{2\pi d/4} \vec{j} = \frac{6\mu_0 I}{\pi d} \vec{j}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \frac{3d}{4}} \vec{j} = \frac{2\mu_0 I}{3\pi d} \vec{j}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{20\mu_0 I}{3\pi d} \vec{j}$$

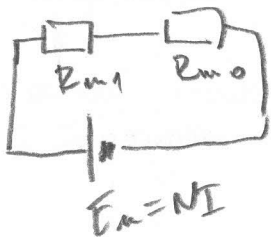
$$b) \vec{F}_{21} = \frac{I_2 \vec{l}_2 \times \vec{B}_{21}}{l_1} = \frac{3I}{\pi} \vec{j} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{j} = \frac{3\mu_0 I^2}{2\pi d} (-\vec{i})$$

②



$$a) L = \frac{N^2}{R_{m,ext} + R_{m,int}} = \frac{N^2}{\frac{d}{\mu_r \mu_0 A} + \frac{d_0}{\mu_0 A}}$$

$$L = \frac{\mu_0 A N^2}{d/\mu_r + d_0}$$



b)

$$\Phi = \frac{NI}{R_{m,ext} + R_{m,int}} = \frac{NI}{\frac{d}{\mu_r \mu_0 A} + \frac{d_0}{\mu_0 A}} = \frac{\mu_0 A N I}{\frac{d}{\mu_r} + d_0}$$

~~$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{A N I}{d + \mu_r d_0}$$~~

$$B = \Phi/A = \mu_0 N I / (d/\mu_r + d_0)$$

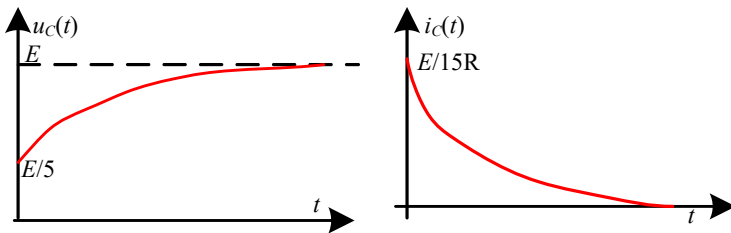
3.

	<p>Kada je prekidač zatvoren u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje i nema struje kroz kondenzator pa postoji samo struja kroz otpornike <math>8R</math> i <math>2R</math>:</p> $I = \frac{E}{8R + 2R} = \frac{E}{10R}$ <p>Napon na kondenzatoru je tada <math>U_{C_0} = 2R \frac{E}{10R} = \frac{1}{5} E</math></p> <p>U prelaznom procesu postoji samo deo kola sa generatorom <math>E</math>, otpornicima <math>8R</math> i <math>4R</math> i kondenzatorom <math>C</math>, pa je jednačina u prelaznom procesu:</p> $E - 8Ri_c(t) - 4Ri_c(t) - u_c(t) = 0 \Rightarrow 12Ri_c(t) + u_c(t) = E$
--	---

Veza između napona i struje na kondenzatoru:  $i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$ , odnosno dobija se diferencijalna jednačina:

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{12RC} = \frac{E}{12RC}, \text{ gde je vremenska konstanta } \tau = 12RC, \text{ i čije je rešenje: } u_c(t) = E \left( 1 - \frac{4}{5} e^{-t/\tau} \right), \text{ struja}$$

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = -\frac{4CE}{5} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{4CE}{5} \frac{1}{12RC} e^{-t/\tau} = \frac{E}{15R} e^{-t/\tau}$$



b) Minimalna vrednost napona je  $u_{C_{\min}} = \frac{1}{5} E$ , trenutak  $t_1$  u kom napon poraste na četiri puta veću vrednost od svoje minimalne vrednosti ispunjava uslov:

$$u_c(t_1) = E \left( 1 - \frac{4}{5} e^{-t_1/\tau} \right) = 4 \frac{1}{5} E \Rightarrow 4e^{-t_1/\tau} = 1 \Rightarrow t_1 = -\tau \ln \frac{1}{4} = \tau \ln 4 = 12RC \ln 4$$

4.

	<p>a) Impedansa prvog potrošača su: <math>Z_1 = \frac{R_1}{\cos \varphi_1} = \frac{3}{0.6} = 5 \Omega</math>, pa je efektivna vrednost struje kroz prvi potrošač je: <math>I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}</math> (1 p)</p> <p>Poznata je prividna snaga i efektivna vrednost napona drugog potrošača, pa je efektivna vrednost struje:</p> $I_2 = \frac{S_2}{U} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ A}$ (1 p)
--	--

b) Na osnovu poznate vrednosti za faktor snage dobija se:  $\sin \varphi = +\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8$ , znak + se uzima jer je dato da je potrošač induktivan. Reaktansa prvog potrošača je  $X_1 = Z_1 \sin \varphi_1 = 5 \cdot 0.8 = 4 \Omega$

Aktivna i reaktivna snaga prvog potrošača:  $P_1 = R_1 I_1^2 = 3 \cdot 20^2 = 1200 \text{ W}$ ,  $Q_1 = X_1 I_1^2 = 4 \cdot 200^2 = 1600 \text{ var}$

$$Q_2 = -800 \text{ var}, P_2 = \sqrt{S_2^2 - Q_2^2} = \sqrt{1000^2 - (-800)^2} = 100\sqrt{100 - 64} = 100\sqrt{36} = 600 \text{ W}$$

$$P = P_1 + P_2 = 1200 + 600 = 1800 \text{ W}, \quad Q = Q_1 + Q_2 = 1600 - 800 = 800 \text{ var}$$
 (2 p)

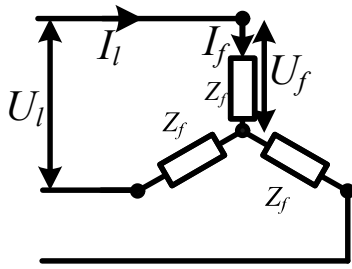
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1800^2 + 800^2} = 200\sqrt{9^2 + 4^2} = 200\sqrt{97} \text{ VA}$$
 (1 p)

$$c) I = \frac{S}{U} = \frac{200\sqrt{97}}{100} = 2\sqrt{97} \text{ A}$$
 (2 p)

$$d) Z_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{100}{10} = 10 \Omega, \quad \cos \varphi_2 = \frac{P_2}{S_2} = \frac{600}{1000} = 0.6, \quad \sin \varphi_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{-800}{1000} = -0.8$$

$$\overline{Z_2} = Z_2 \cos \varphi_2 + jZ_2 \sin \varphi_2 = 10 \cdot 0.6 - j10 \cdot 0.8 = (6 - j8) \Omega$$
 (3 p)

5.



Za trofazni potrošač vezan u zvezdu važi:

$$U_f = U_l / \sqrt{3} = 500 / \sqrt{3} \text{ V}, \quad I_f = I_l, \quad \text{osim toga, važi:}$$

$$Z_f = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \Omega, \text{ kao i}$$

$$I_f = U_f / Z_f = 500 / \sqrt{3} / 500 = 1 / \sqrt{3} \text{ A}, \text{ pa je efektivna vrednost linijske}$$

$$\text{struje } I_l = I_f = 1 / \sqrt{3} \text{ A} \quad (3 \text{ p})$$

$$\text{Faktor snage je } \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R_f}{Z_f} = \frac{300}{500} = 0.6 \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Aktivna snaga } P = 3R_f I_f^2 = 3 \cdot 300 \cdot (1 / \sqrt{3})^2 = 300 \text{ W} \quad (1 \text{ p})$$