

GLAVA 12

IZVIJANJE

Iskustvo nam pokazuje da i aksijalna sila može da izazove ugib. Najmanja aksijalna sile, pri kojoj dolazi do savijanja naziva se **kritična sila**.

Kritična vrednost sile zavisi samo od načina oslanjanja štapa, tj. od graničnih uslova, a ne i od poprečnog opterećenja.

Pojava krivljenja štapa pod dejstvom aksijalne sile zove se **izvijanje**.

Problem izvijanja je, u stvari, problem stabilnosti ravnoteže između spoljašnjih i unutrašnjih sila.

Ojler je, u 18. v., prvi proučavao ovu pojavu i odredio kritičnu silu za četiri karakteristična slučaja:

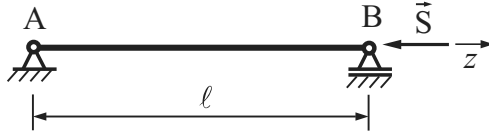
- 1° – pritisnut štap čiji su krajevi zglobno vezani (prosta greda),
- 2° – štap na jednom kraju uklešten, a na drugom slobodan (konzola),
- 3° – štap uklešten na jednom kraju, a slobodno oslonjen na drugom,
- 4° – obostrano uklešten štap.

Razmotrimo ove slučajeve.

1°. slučaj

Posmatrajmo aksijalno pritisnut štap čiji su krajevi zglobno vezani (slučaj *proste grede*).

Zadatak je da odredimo vrednost sile S , pri kojoj dolazi do izvijanja. Usled izvijanja javljaju se ugibi (v), koje određujemo diferencijalnom jedna-



Slika 12.1: Početna konfiguracija.



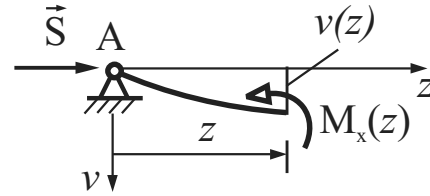
Slika 12.2: Trenutna konfiguracija.

činom elastične linije (11.6)¹:

$$v'' = -\frac{M_x}{E I_x}, \quad (12.1)$$

gde je M_x moment savijanja u proizvoljnom preseku (vidi sl. 12.3):

$$M_x = S v. \quad (12.2)$$



Slika 12.3: Moment u proizvoljnom preseku.

Diferencijalna jednačina sada postaje:

$$v'' = -\frac{S v}{E I_x}, \quad (12.3)$$

uz granične uslove (poznati ugibi u osloncima A i B):

$$v|_{z=0} = 0, \quad v|_{z=l} = 0. \quad (12.4)$$

Uvedimo oznaku:

$$k^2 = \frac{S}{E I_x}. \quad (12.5)$$

Ova veličina je konstantna, pod pretpostavkom da je štap konstantnog poprečnog preseka (I_x nije funkcija od y) i da je u celom rasponu izrađen od istog materijala (E je konstantno).

¹Posmatrajući sa desne strane, sila S "okreće" u smeru suprotno kazaljci na satu, pa prema konvenciji o znaku momenta, to je pozitivan smer.

Pod ovim uslovima diferencijalna jednačina (12.3) je homogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Opšti integral ove jednačine je:

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \quad (12.6)$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz graničnih uslova (12.4), odakle dobijamo:

$$v|_{z=0} = C_2 = 0, \quad v|_{z=l} = C_1 \sin kl = 0.$$

Poslednja jednačina zadovoljena je ako je $C_1 = 0$ ili $\sin kl = 0$. Međutim, u prvom slučaju ($C_1 = 0$), kako je $C_2 = 0$, biće $v = 0$, tj. dobijamo trivijalno rešenje (nema izvijanja).

Netrivijalno rešenje dobijamo iz uslova da je:

$$\sin kl = 0, \quad \text{tj.} \quad kl = n\pi, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.7)$$

Konačno, iz (12.5) i (12.7), dobijamo:

$$S = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} E I_x \quad (12.8)$$

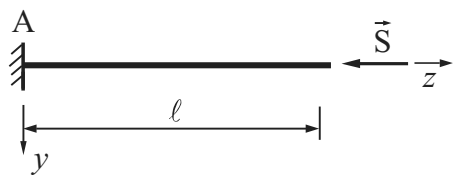
vrednost sile koja dovodi do izvijanja.

Minimalna vrednost ove sile ($n = 1$, $I_x = I_{\min}$) je Ojlerova kritična sila:

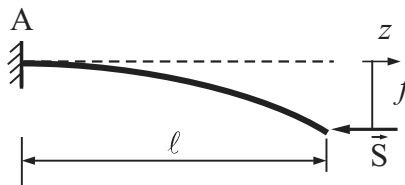
$$S_k = \frac{\pi^2}{l^2} E I_{\min}. \quad (12.9)$$

2°. slučaj

Posmatrajmo sada drugi karakterističan slučaj - štap na jednom kraju uklješten, a na drugom slobodan, koji je opterećen aksijalnom silom S (**konzola**).



Slika 12.4: Početna konfiguracija.



Slika 12.5: Trenutna konfiguracija.

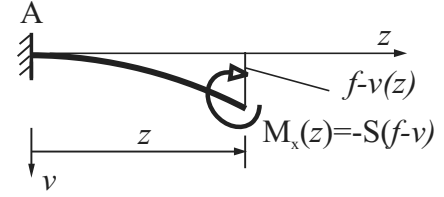
Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

U ovom slučaju intenzitet momenta savijanja je² (vidi sl. 12.6):

$$M_x = S(f - v),$$

gde je f -ugib na kraju konzole, pa diferencijalna jednačina (12.1), koristeći (12.5), postaje:

$$v'' = \frac{S(f - v)}{E I_x} = k^2(f - v). \quad (12.10)$$



Slika 12.6: Proizvoljan presek.

Granični uslovi su u ovom slučaju:

$$v|_{z=0} = 0, \quad v'|_{z=0} = 0, \quad (12.11)$$

(ugib i nagib u ukleštenju jednaki su nuli).

Diferencijalna jednačina (12.10) je, za razliku od prethodnog slučaja, nehomogena, pa je opšti integral jednak zbiru opšteg integrala homogene diferencijalne jednačine i partikularnog integrala nehomogene diferencijalne jednačine:

$$v = v_h + v_p,$$

gde je:

$$\begin{aligned} v_h &= C_1 \sin kz + C_2 \cos kz, \\ v_p &= f. \end{aligned}$$

Dakle:

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + f.$$

Pored graničnih uslova (12.11), potrebno je da bude zadovoljen još jedan uslov:

$$v|_{z=l} = f. \quad (12.12)$$

Uslovi (12.11) i (12.12) daju sledeći sistem jednačina za određivanje veličina C_1 , C_2 i f :

$$\begin{aligned} v|_{z=0} &= C_2 + f = 0, \quad v'|_{z=0} = k C_1 = 0, \\ v|_{z=l} &= C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + f = f. \end{aligned}$$

²Moment posmatramo u proizvoljnom preseku sa desne strane, pa je prema konvenciji o znaku momenta, ovaj smer sa znakom minus.

Iz prve dve jednačine dobijamo:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -f.$$

Zamenom u treću imamo:

$$f = f(1 - \cos kl).$$

Odavde sledi:

$$\cos kl = 0, \quad \text{tj.} \quad kl = (2n - 1)\frac{\pi}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Zamenivši k u (12.5) dobijamo:

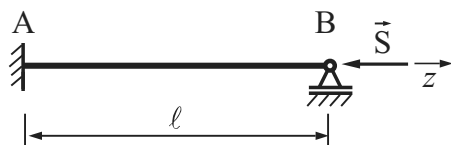
$$\frac{S}{E I_x} = \frac{\pi^2 (2n - 1)^2}{4l^2}.$$

Dakle, za $n = 1$ i $I_x = I_{\min}$, konačno dobijamo Ojlerovu kritičnu silu za ovaj slučaj:

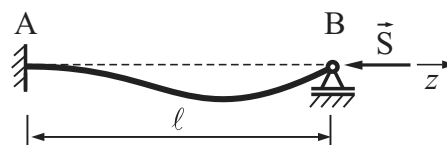
$$S_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{4l^2} = \frac{\pi^2 E}{(2l)^2} I_{\min}. \quad (12.13)$$

3°. slučaj

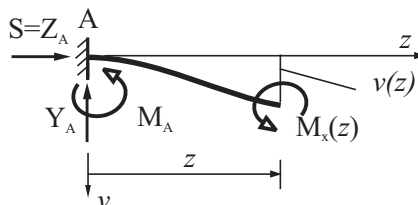
Posmatrajmo štap, uklešten na jednom kraju, a slobodno oslonjen na drugom, na koji deluje aksijalna sila S .



Slika 12.7: Početna konfiguracija.



Slika 12.8: Trenutna konfiguracija.



Slika 12.9: Moment u proizvoljnom preseku.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Ovaj nosač jedanput je statički neodređen. Ako uklonimo ukleštenje i njegov uticaj zamenimo momentom ukleštenja (M_A), dobijamo prostu gredu, koja je opterećena aksijalnom silom (S) i momentom (M_A).

Iz uslova ravnoteže dobijamo:

$$\begin{aligned}\sum_i Y_i &= Y_A - Y_B = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = Y_B, \\ \sum_i Z_i &= Z_A - S = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A = S, \\ \sum_i M_x^{\mathbf{F}_i} &= -M_A + Y_B l = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A = Y_B = \frac{M_A}{l}.\end{aligned}$$

Sada možemo da odredimo vrednost momenta u proizvoljnom preseku³(koji zavisi od M_A):

$$M_z = Z_A y - M_A + Y_A z = S y - \frac{M_A}{l}(l - z).$$

Na osnovu (12.5) izraz za diferencijalnu jednačinu elastične linije (12.1), u ovom slučaju, postaje:

$$\begin{aligned}v'' &= -\frac{1}{E I_x} \left[S v - \frac{M_A}{l}(l - z) \right] = \\ &= -k^2 y + \frac{M_A k^2}{S l}(l - z).\end{aligned}\tag{12.14}$$

Granični uslovi u ovom slučaju su:

$$v|_{z=0} = 0, \quad v'|_{z=0} = 0, \quad v|_{z=l} = 0.\tag{12.15}$$

Kao i u prethodnom slučaju, i ovde imamo nehomogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda, pa je opšti integral:

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \frac{M_A}{S l}(l - z).\tag{12.16}$$

Iz graničnih uslova (12.15) dobijamo:

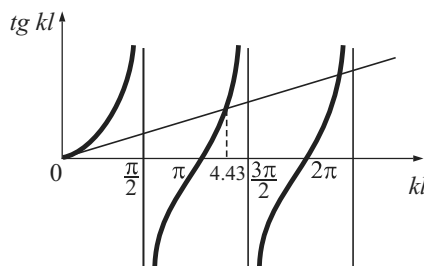
$$\begin{aligned}v|_{z=0} &= C_2 + \frac{M_A}{S} = 0, \quad v'|_{z=0} = C_1 k - \frac{M_A}{S l} = 0, \\ v|_{z=l} &= C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.\end{aligned}$$

³Posmatrajmo levi deo preseka, pa je smer kazaljke na satu pozitivan.

Kada zamenimo prve dve jednačine u treću, dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{M_A}{S \ell k} \sin k\ell - \frac{M_A}{S} \cos k\ell &= 0 \Rightarrow \\ \sin k\ell &= k\ell \cos k\ell \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{tg} k\ell = k\ell.}} \end{aligned} \quad (12.17)$$

Ovu jednačinu možemo da prikažemo grafički:



Slika 12.10: Grafički prikaz rešenja jednačine (12.17)

Sa grafika (vidi sl. 12.10) vidimo da ova jednačina ima više rešenja. Trivijalno rešenje je za $k\ell = 0$, a prvo sledeće za $k\ell = 4,49$.

Sada iz (12.5) dobijamo da je:

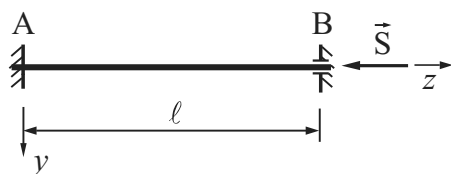
$$\frac{S}{E I_x} = \left(\frac{4,49}{\ell} \right)^2 \Rightarrow S = \left(\frac{4,49}{\ell} \right)^2 E I_x \approx \frac{2\pi^2 E}{\ell^2} I_x.$$

Minimalnu vrednost ove sile ($I_x = I_{\min}$) (Ojlerova kritična sila) je:

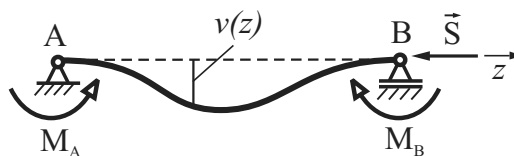
$$S_k \approx \frac{2\pi^2 E}{\ell^2} I_{\min} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \ell \right)^2} I_{\min}. \quad (12.18)$$

4°. slučaj

Četvrti Ojlerov slučaj je **obostrano uklešten štap**.



Slika 12.11: Početna konfiguracija.



Slika 12.12: Trenutna konfiguracija.

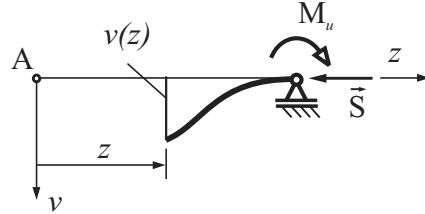
I ovaj slučaj je statički neodređen (dva puta). Uklanjanjem ukleštenja i zamenom uklonjenih veza momentima (M_A , M_B) sveli smo dati primer na prostu gredu.

Iz simetrije, u odnosu na sredinu nosača, sledi da je:

$$|\mathbf{M}_A| = |\mathbf{M}_B| = M_u.$$

Moment u proizvoljnom preseku dat je izrazom:

$$M_x = S v - M_u,$$



Slika 12.13: Moment u proizvoljnom preseku.

pa diferencijalna jednačina (12.1), uz (12.5), postaje:

$$v'' = -\frac{S v - M_u}{E I_x} = -k^2 v + \frac{k^2 M_u}{S}. \quad (12.19)$$

Opšte rešenje ove nehomogene diferencijalne jednačine je:

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \frac{M_u}{S}. \quad (12.20)$$

Integracione konstante određujemo iz graničnih uslova:

$$v|_{z=0} = 0, \quad v'|_{z=0} = 0.$$

Odavde dobijamo:

$$\begin{aligned} v|_{z=0} = C_2 + \frac{M_u}{S} = 0 &\Rightarrow C_2 = -\frac{M_u}{S}, \\ v'|_{z=0} = C_1 k = 0 &\Rightarrow C_1 = 0. \end{aligned}$$

Sada dobijamo zakon promene ugiba:

$$v = \frac{M_u}{S}(1 - \cos kz). \quad (12.21)$$

Međutim, kako je i drugi kraj uklešten, mora da bude zadovoljen i uslov:

$$v|_{z=\ell} = 0. \quad (12.22)$$

Dakle, prema (12.21) i (12.22), dobijamo:

$$1 - \cos k\ell = 0 \Rightarrow \cos k\ell = 1, \quad \text{tj.} \\ k\ell = 2n\pi, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Odavde, prema (12.5), imamo:

$$\frac{S}{E I_x} = \frac{(2n\pi)^2}{\ell^2} \Rightarrow S = \frac{4n^2\pi^2}{\ell^2} E I_x.$$

Minimalna vrednost ove sile je ($n = 1$):

$$S_k = \frac{4\pi^2}{\ell^2} E I_{\min} = \frac{\pi^2}{(\ell/2)^2} E I_{\min}, \quad (12.23)$$

što predstavlja kritičnu Ojlerovu silu za ovaj slučaj.

Primetimo da sva četiri izraza za kritičnu silu:

$$S_k = \frac{\pi^2}{\ell^2} E I_{\min}, \\ S_k = \frac{\pi^2}{(2\ell)^2} E I_{\min}, \\ S_k \approx \frac{\pi^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell)^2} E I_{\min}, \\ S_k = \frac{4\pi^2}{\ell^2} E I_{\min} = \frac{\pi^2}{(\ell/2)^2} E I_{\min},$$

možemo da predstavimo jednim zajedničkim izrazom:

$$\boxed{S_k = \frac{\pi^2}{\ell_k^2} E I_{\min}}. \quad (12.24)$$

Veličina ℓ_k zove se **redukovana** (slobodna) **dužina**⁴, koja je za prethodno opisane slučajeve:

$$\begin{array}{ll} 1^0 - \text{prosta greda:} & \ell_k = \ell, \\ 2^0 - \text{konzola:} & \ell_k = 2\ell, \\ 3^0 - \text{jednostrano uklešten nosač:} & \ell_k \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \\ 4^0 - \text{obostrano uklešten nosač:} & \ell_k = \frac{\ell}{2}. \end{array}$$

⁴Ova dužina predstavlja rastojanje između dve prevojene tačke elastične linije štapa.

Napon, koji se javlja u nosaču, kao posledica pojave kritične sile, zovemo **kritičan napon**. Kako su nosači opterećeni aksijalnom silom, to se, prema (8.11), kritičan napon računa po obrascu:

$$\sigma_k = \frac{S_k}{A}, \quad (12.25)$$

gde je A - površina poprečnog preseka nosača.

Prema (12.24) i (12.25) dobijamo:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\ell_k^2} \frac{I_{\min}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\ell_k^2} i_{\min}^2. \quad (12.26)$$

Ovde smo uveli poluprečnik inercije i_x (4.23), koji ima dimenziju dužine. Uvedimo sada neimenovan broj:

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ell_k}{i_{\min}}. \quad (12.27)$$

Ova veličina (λ) zove se **vitkost štapa na izvijanje**.

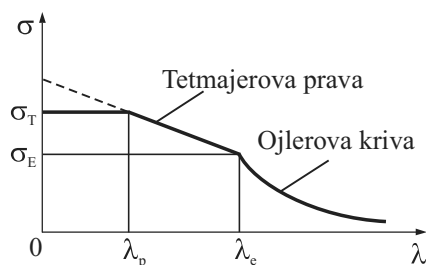
Kritičan napon (12.26) možemo da izrazimo u obliku:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (12.28)$$

☞ Napomenimo da ovi obrasci važe samo dotle dok kritičan napon ne prelazi granicu elastičnosti. Dakle, vrednost za napon (12.26) i (12.28) važe samo za izvijanje u elastičnoj oblasti, tj. kada je:

$$\sigma_k \leq \sigma_E. \quad (12.29)$$

Posmatrajući izraz (12.28) vidimo da se veza između kritičnog napona i vitkosti može geometrijski predstaviti hiperbolom. Ova hiperbola zove se **Ojlerova hiperbola**.



Slika 12.14:

Međutim, sa sl. 12.14, vidimo da će za male vitkosti štapa kritičan napon biti veći od napona na granici elastičnosti, pa ulazimo u oblast plastičnosti, u kojoj ne važi obrazac (12.28).

Proračun izvijanja u plastičnoj zoni zasniva se na empirijskoj relaciji, između kritičnog napona i vitkosti, koju je predložio Tetmajer⁵:

$$\sigma_k = A - B \lambda. \quad (12.30)$$

A i B su konstante, različite za različite materijale.

Relacija (12.30) geometrijski predstavlja pravu - **Tetmajerova prava**. Pomoću (12.30) možemo da odredimo kritičan napon u intervalu između granice elastičnosti i granice tečenja kod aksijalnog pritiska.

Na početku knjige govorili smo o dopuštenim naponima (7.2), tj. o vrednostima napona koje ne treba prekoračiti u konstrukcijama da ne dođe do loma ili plastične deformacije.

Slično i kod izvijanja, gde dolazi do gubljenja stabilnosti ravnoteže, uvodimo **dopušteni kritični napon** (σ_{kdop}):

$$\sigma_{kdop} = \frac{\sigma_k}{n_k},$$

gde je n_k - koeficijent sigurnosti na izvijanje.

Nosač je siguran od izvijanja, ako je:

$$\frac{S}{A} \leq \sigma_{kdop},$$

gde je S - aksijalna sila, a A - površina poprečnog preseka.

Da bi se olakšali proračuni u mnogim zemljama daje se tehničkim propisima, tz. ω - **postupak**:

$$\omega = \frac{\sigma_{dop}}{\sigma_{kdop}} = f(\lambda),$$

gde je σ_{dop} - dopušten napon zatezanja.

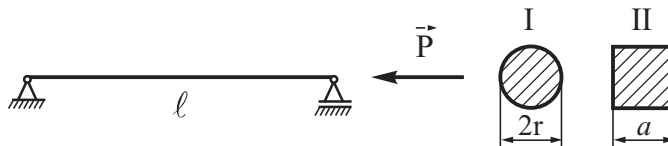
Vrednosti za ω propisane su zakonom za pojedine materijale.

12.1 Zadaci - izvijanje

Zad. 12.1. Dve grede (sl. 12.15), zglobno vezane na krajevima, imaju iste površine poprečnog preseka i isti modul elastičnosti. Jedna je kružnog,

⁵Tetmayer

a druga kvadratnog poprečnog preseka. Uporediti kritične sile izvijanja pretpostavljajući da važi Ojlerov obrazac.



Slika 12.15: uz zad.12.1

Rešenje:

Prema pretpostavci zadatka (važi Ojlerov obrazac) telo se ponaša elastično, pa je

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}.$$

Za nosač 1 (kružni poprečni presek) je $I_x^{(1)} = \pi r^4/4$, a za nosač 2 (kvadratni poprečni presek) je $I_x^{(2)} = \frac{a^4}{12}$. Kako su iste površine ($A^{(1)} = A^{(2)}$), gde je

$$A^{(1)} = \pi r^2 \quad A^{(2)} = a^2,$$

to je

$$\pi r^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = r\sqrt{\pi}.$$

Za momente inercije dobijamo

$$I_x^{(1)} = \frac{\pi r^4}{4} \quad I_x^{(2)} = \frac{a^4}{12} = \frac{\pi^2 r^4}{12}.$$

Kako su oba nosača istog oblika (zglobno vezan na oba kraja - 1° slučaj), to su iste slobodne dužine

$$\ell_0^{(1)} = \ell_0^{(2)} = \ell.$$

Kako su i od istog materijala, to je

$$E^{(1)} = E^{(2)} \equiv E.$$

Dakle, odnos kritičnih sila je

$$\frac{F_{kr}^{(1)}}{F_{kr}^{(2)}} = \frac{\frac{\pi^2 I_x^{(1)}}{\ell_0^2}}{\frac{\pi^2 I_x^{(2)}}{\ell_0^2}} = \frac{I_x^{(1)}}{I_x^{(2)}} = \frac{\pi r^4/4}{\pi^2 r^4/12} = \frac{3}{\pi} = 0,755.$$



Zad. 12.2.

Vitki štap je zglobovno vezan za nepomične oslonce (vidi sl. 12.16).

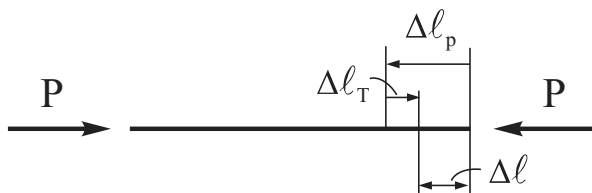


Slika 12.16: uz zad.12.2

Pretpostavljajući elastično ponašanje, odrediti porast temperature ΔT koja će izazvati izvijanje štapa. Poznate su veličine: dužina štapa – ℓ , moment inercije poprečnog preseka – I , površina poprečnog preseka – A i koeficijent linearnog širenja – α .

Rešenje:

Ako štap oslobodimo veza, na njega deluju sile P (vidi sl. 12.17).



Slika 12.17: uz rešenje.

Dakle, pri delovanju sile P štap bi se **skratio** (pritisak) za veličinu $\Delta\ell_P$

$$\Delta\ell_P = \frac{P\ell}{EA}.$$

Kako se on i zagreva, to bi se **izdužio**, zbog porasta temperature, za $\Delta\ell_T$

$$\Delta\ell_T = \alpha\Delta T\ell.$$

Međutim, pošto su oslonci nepomični, to se njegova dužina nije promenila, tj. $\Delta\ell = 0$, pa je

$$\Delta\ell = -\Delta\ell_P + \Delta\ell_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P\ell}{EA} = \alpha\Delta T\ell \quad \Rightarrow \quad P = \alpha\Delta TEA. \quad (12.31)$$

Do izvijanja dolazi kada sila dostiže kritičnu vrednost, čija je vrednost, ako je ponašanje u elastičnoj oblasti (pretpostavka zadatka), jednaka

$$P = P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_x}{\ell_0^2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \quad (12.32)$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

☞ Napomenimo da je $\ell_0 = \ell$, jer je, prema uslovu zadatka, prvi Ojlerov slučaj.

Zamenom vrednosti sile P iz (12.31) u izraz za kritičnu vrednost (12.32), dobijamo

$$\alpha EA(\Delta T)_{kr} = \pi^2 \frac{EI}{\ell^2} \Rightarrow (\Delta T)_{kr} = \frac{\pi^2 I}{\ell^2 \alpha A} = \frac{\pi i^2}{\alpha \ell^2}. \quad (12.33)$$

□

Zad. 12.3. Rešimo ovaj primer za konkretne brojne vrednosti. Neka je: dužina $\ell = 1\text{ m}$, prečnik $d = 3\text{ cm}$, koeficijent toplotnog širenja $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Rešenje:

Kako je u zadatku zadat prečnik, to je oblik poprečnog preseka krug, pa je

$$I = \frac{\pi r^4}{4}, \quad A = \pi r^2, \quad i^2 = \frac{I}{A} = \frac{\pi r^4}{4\pi r^2} = \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{4}\right)^2 = 0,75^2 \text{ cm}^2.$$

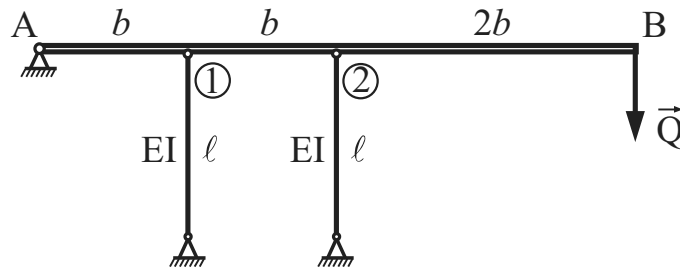
Zamenom ovih vrednosti u izraz (12.33), dobijamo

$$\begin{aligned} (\Delta T)_{kr} &= \frac{\pi i^2}{\alpha \ell^2} = \frac{3,14^2 \cdot 0,75^2 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2 \cdot 1,25} \cdot 10^5 \text{ } ^\circ\text{C} = \frac{3,14^2 \cdot 0,75^2 \text{ cm}^2}{10^4 \text{ cm}^2 \cdot 1,25} \cdot 10^5 \text{ } ^\circ\text{C} = \\ &= 3,14^2 \cdot 10^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \text{ } ^\circ\text{C} = 44,37 \text{ } ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

□

Zad. 12.4.

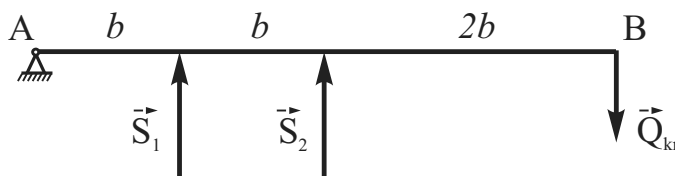
Za konstrukciju na sl. 12.18, koja se sastoji od krute grede AB i štapova 1 i 2, odrediti silu Q pri kojoj dolazi do izvijanja u jednom od štapova, kao i silu Q_{kr} , pri kojoj konstrukcija gubi nosivost usled izvijanja.



Slika 12.18: uz zad.12.4

Rešenje:

Izvijanje izaziva aksijalna sila. U posmatranom slučaju aksijalne sile se javljaju samo u štapovima. Dakle, prvo je potrebno izračunati sile u štapovima (sl. 12.19).



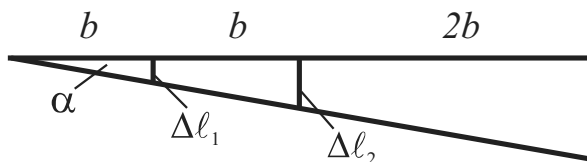
Slika 12.19: uz rešenje.

Posmatrajmo ravnotežu grede AB , po uklanjanju štapova i zamenom njihovih uticaja nepoznatim silama S_1 i S_2 . Pored ovih sila, u osloncu A (nepokretni oslonac) takođe se javljaju nepoznate sile A_x i A_y . Kako imamo četiri nepoznate, a tri uslova ravnoteže, to je zadatak jedaput statički neodređen.

Uslovi ravnoteže:

$$\begin{aligned}\sum_i X_i = 0 &\Rightarrow A_x = 0, \\ \sum_i Y_i = 0 &\Rightarrow A_y + S_1 + S_2 - Q = 0, \\ \sum_i M_A = 0 &\Rightarrow -S_1 \cdot b - S_2 \cdot 2b + Q \cdot 4b = 0 \Rightarrow S_1 + 2S_2 = 4Q.\end{aligned}\tag{12.34}$$

Dopunski uslov sledi iz činjenice da je greda kruta, pa se ne savija (vidi sl. 12.20), tj.



Slika 12.20: Geometrijski uslov.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta \ell_1}{b} = \frac{\Delta \ell_2}{2b} \Rightarrow \Delta \ell_2 = 2\Delta \ell_1.\tag{12.35}$$

Zamenivši u relaciji (12.35) izraz za silu (12.24) na str. 227, dobijamo

$$\frac{S_2 \cdot \ell}{EA} = 2 \frac{S_1 \cdot \ell}{EA} \Rightarrow S_2 = 2S_1.$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

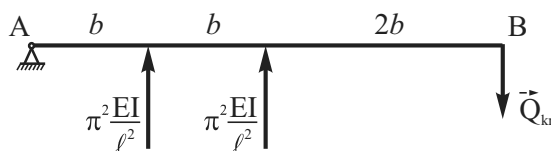
Zamenivši ovu vezu u (12.34) dobijamo

$$S_1 = \frac{4}{5}Q \quad S_2 = \frac{8}{5}Q. \quad (12.36)$$

Do izvijanja **prvo** dolazi u štapu gde je **veća sila**, u ovom slučaju to je štap 2, tj.

$$\left. \begin{array}{l} F_{kr} = S_2 = \frac{8}{5}Q \\ \parallel \\ \pi^2 \frac{EI}{\ell_0^2}, \quad \ell = \ell_0 \text{ I slučaj !} \end{array} \right\} \Rightarrow \pi^2 \frac{EI}{\ell^2} = \frac{8}{5}Q \Rightarrow Q = \frac{5\pi^2 EI}{8\ell^2}.$$

Konstrukcija **gubi nosivost** ukoliko dođe do **izvijanja oba štapa** (slučaj prikazan na sl. 12.21).



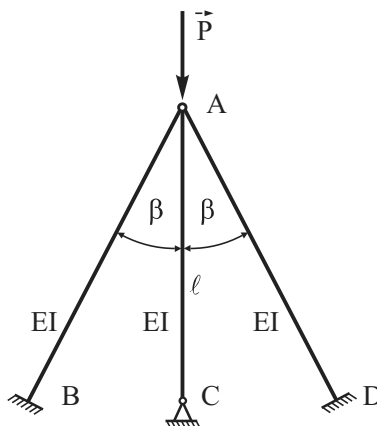
Slika 12.21: Gubitak nosivosti.

$$\sum_i M_A = -\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}b - \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}2b + Q_{kr}4b = 0 \Rightarrow Q_{kr} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}.$$



Zad. 12.5.

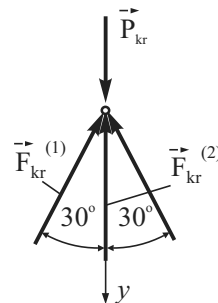
Odrediti silu **P** pri kojoj dolazi do gubljenja nosivosti konstrukcije (sl. 12.22), usled izvijanja.



Slika 12.22: uz zad.12.5

Rešenje:

Uočimo prvo da će napadna tačka sile P , zbog simetrije, da se pomeri duž štapa AC , kao pokretan odlonac, a štapovi AB i AD su uklešteni (Ojlerov slučaj 3). Konstrukcija gubi nosivost ako sile u štapovima dostignu kritičnu vrednost (slučaj prikazan na sl. 12.23).



Slika 12.23: uz rešenje.

Jedan od uslova ravnoteže, projekcija sila na pravac sile P (y - osa), ima oblik

$$\sum_i Y_i = -P_{kr} + 2F_{kr}^{(1)} \cos 30 + F_{kr}^{(2)} = 0.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\ell, \quad \ell_2 = \ell, \\ F_{kr}^{(1)} &= \frac{\pi^2 EI}{(\ell_0^{(1)})^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}\ell_1/2)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}/2 \cdot 2/\sqrt{3}\ell)^2} \Rightarrow \\ F_{kr}^{(1)} &= 1,5 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \\ F_{kr}^{(2)} &= \frac{\pi^2 EI}{(\ell_0^{(2)})^2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \end{aligned}$$

to iz jednačine ravnoteže dobijamo

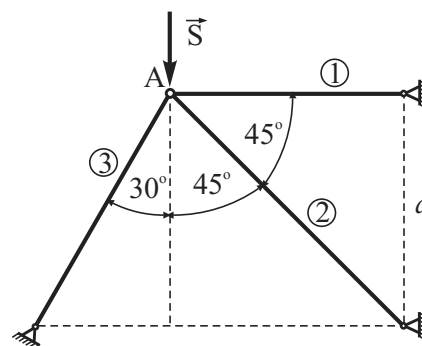
$$\begin{aligned} P_{kr} &= 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1,5 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} + \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = (\sqrt{3} \cdot 1,5 + 1) \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \Rightarrow \\ P_{kr} &= 35,49 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \end{aligned}$$



Zad. 12.6.

Posmatrajmo konstrukciju na sl. 12.24.

- U kom štapu konstrukcije će prvo doći do izvijanja?
- Kolika je sila pri tome?
- Izračunati kritičnu silu F_{kr} pri kojoj nastaje lom konstrukcije usled izvijanja.



Slika 12.24: uz zad.12.6.

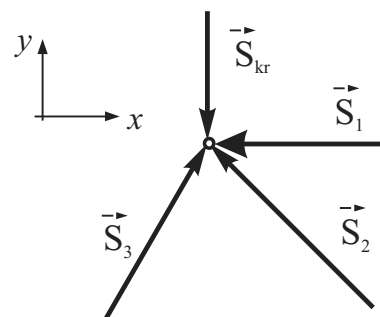
Štapovi su od čelika ($E = 21 \text{ MN/cm}^2$), $I - 16$ profila. Dato je: $a = 2 \text{ m}$, $\lambda_{el} = 100$.

Rešenje:

Odredimo prvo sile u štapovima, u funkciji sile F .

Uslovi ravnoteže:

$$\begin{aligned} \sum_i X_i &= 0 \Rightarrow \\ S_3 \cos 60 - S_2 \cos 45 - S_1 &= 0, \\ \sum_i Y_i &= 0 \Rightarrow \\ -F + S_3 \sin 60 + S_2 \sin 45 &= 0, \end{aligned}$$



Slika 12.25: uz rešenje.

Oдавde sledi sistem jednačina:

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + \frac{1}{2} S_1 &= 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} S_1 &= F \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} S_1 & \frac{1}{2} \\ F & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}S_1 - F)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & S_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & F \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(F + S_1)$$

Oдавде dobijamo za sile S_2 i S_3

$$S_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}(F - \sqrt{3}S_1) \quad (12.37)$$

$$S_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}(F + S_1). \quad (12.38)$$

Uvedimo smenu

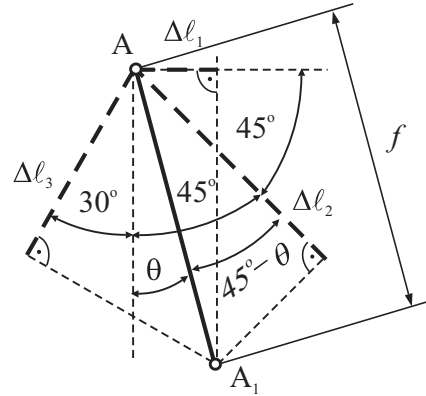
$$\frac{F}{S_1} = \alpha$$

tada jednačine (12.37) i (12.38) mogu da se napišu u obliku

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}(\alpha - \sqrt{3}), \quad (12.39)$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}(\alpha + 1). \quad (12.40)$$

Posmatrajmo sada pomeranje čvora A (sl. 12.26).



Slika 12.26: Pomeranje čvora A.

Izduženja pojedinih štapova mogu da se izraze u obliku:

$$\Delta l_1 = f \cos(90 - \theta) = f \sin \theta,$$

$$\Delta l_2 = f \cos(45 - \theta) = f \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} f (\sin \theta + \cos \theta),$$

$$\Delta l_3 = f \cos(30 + \theta) = f \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right).$$

Veza između sila i pomeranja je

$$\Delta \ell_i = \frac{S_i \ell_i}{AE}$$

ili u ovom konkretnom slučaju:

$$f \sin \theta = \frac{S_1 a}{AE}, \quad (12.41)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} f (\sin \theta + \cos \theta) = \frac{S_2 a \sqrt{2}}{AE}, \quad (12.42)$$

$$\frac{1}{2} f (-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) = \frac{S_3 a 2\sqrt{3}}{3AE}. \quad (12.43)$$

Iz poslednje tri jednačine (12.41)-(12.43), deobom (12.42) i (12.43) sa (12.41) i poredeći sa (12.39), (12.40), dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S_1} &= \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ctg} \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}(\alpha - \sqrt{3}), \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{S_3}{S_1} &= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \theta) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{2}{\sqrt{3} + 1}(\alpha + 1) \end{aligned}$$

dobijamo

$$\alpha = 73,413259 = \frac{F}{S_1} \Rightarrow S_1 = 0,0136F,$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}(\alpha - \sqrt{3})S_1 = 0,505F,$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}(\alpha + 1)S_1 = 0,742F.$$

Geometrijske karakteristike $I - 16$ profila su: $I_{min} = 54,7 [cm^4]$, $A = 22,8 [cm^2]$, $i_{min} = 1,55 [cm]$.

Da bismo našli koji će štap prvo izviti i kolika je sila F pri tome, nađimo kolike su vrednosti sile F potrebna za izvijanje svakog pojedinačnog štapa:

štap 1

$$\lambda_1 = \frac{\ell_1}{i} = \frac{200 [cm]}{1,55 [cm]} = 129 > 100 = \lambda_{el}$$

elastična oblast, pa važi Ojlerov obrazac, tj.

$$\begin{aligned} S_{kr}^{(1)} &= \pi^2 \frac{EI}{\ell_0^2} = \pi^2 \frac{EI}{\ell_1^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 [MN/cm^2] \cdot 54,7 [cm^4]}{200^2 \cdot [cm^2]} = \\ &= \frac{\pi^2 \cdot 21 \cdot 54,7 \cdot 10^6 [N]}{4 \cdot 10^4} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 54,7}{4} [kN] = 283,143 [kN]. \end{aligned}$$

Odavde dobijamo za silu F

$$F = \frac{S_1}{0,0136} = 20808,824 [kN]$$

štap 2

$$\lambda_2 = \frac{\ell_2}{i} = \frac{200\sqrt{2} [cm]}{1,55 [cm]} = 182,479 > 100 = \lambda_{el}$$

elastična oblast, pa važi Ojlerov obrazac, tj.

$$\begin{aligned} S_{kr}^{(2)} &= \pi^2 \frac{EI}{\ell_2^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21 [MN/cm^2] \cdot 54,7 [cm^4]}{2 \cdot 200^2 [cm^2]} = \\ &= \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 54,7}{2 \cdot 4} kN = 141,5715 [kN]. \end{aligned}$$

Odavde dobijamo za silu F

$$F = \frac{S_2}{0,505} = 280,3396 [kN].$$

štap 3

$$\lambda_3 = \frac{\ell_3}{i} = \frac{2\sqrt{3}/3 \cdot 200 [cm]}{1,55 [cm]} = 148,99 > 100 = \lambda_{el}$$

elastična oblast, pa važi Ojlerov obrazac, tj.

$$S_{kr}^{(3)} = \pi^2 \frac{EI}{\ell_3^2} = \frac{\pi^2 EI}{4/3 \cdot 4 \cdot 10^4} = \frac{3}{16} \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 54,7 = 212,36 \approx 213 [kN].$$

Odavde dobijamo za silu F

$$F = \frac{S_3}{0,742} = 287 [kN].$$

Izvijanje počinje pri najmanjoj od ovih sila, tj. za $F = 280$ i to u štapu 2.

b) Lom konstrukcije usled izvijanja će nastati kada sila F poraste toliko da i sila u štapu 3 dostigne svoju kritičnu vrednost (212 [kN]), jer nakon toga konstrukcija postaje mehanizam. Dakle

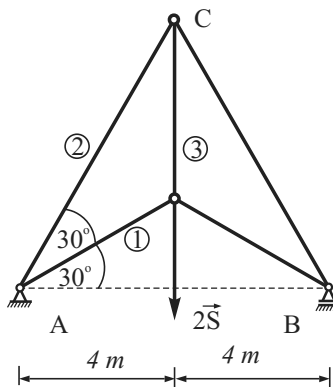
$$\sum_i Y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{kr} + 212 \cdot \cos 30 + 142 \cdot \cos 45 = 0.$$

Iz poslednje relacije dobijamo $F_{kr} = 284 [kN]$. □

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Zad. 12.7.

Odrediti prečnike štapova rešetkaste konstrukcije, prikazane na slici 12.27, iz uslova da ne dođe do izvijanja u konstrukciji. Poznate su vrednosti: kritični napon – $\sigma_{kr} = 1 \text{ kN/cm}^2$, modul elastičnosti $E = 1 \text{ MN/cm}^2$, koeficijent (stepen) sigurnosti $n = 3$ i sila $S = 43 \text{ kN}$.



Slika 12.27: uz zad. 12.7.

Rešenje:

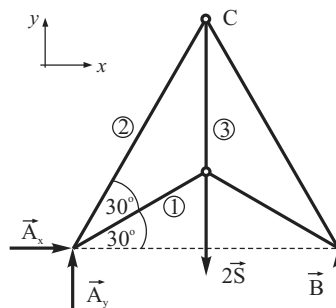
Da bi se izvršilo dimenzionisanje, tj. nalaženje prečnika štapa, potrebno je prvo odrediti sile u štapovima. Posmatrana konstrukcija je spoljašnje statički određena, tj. mogu da se odrede otpori oslonaca iz uslova ravnoteže. Ona je i unutrašnje određena, tj. moguće je odrediti sile u štapovima iz uslova ravnoteže po čvorovima. Naime, uslov za unutrašnju statičku određenost je $s = 2n - 3$ (s – broj štapova, n – broj čvorova), što je u posmatranom slučaju: $n = 4$, $s = 5$, pa je uslov $s = 2 \cdot 4 - 3 = 5 = s$ zadovoljen. Zadatak ćemo rešiti u tri koraka:

1. određivanje otpora oslonaca,
2. određivanje sila u štapovima i
3. dimenzionisanje (određivanje prečnika).

Prvi korak. Kako je nosač simetričan (i geometrija i opterećenje), to odmah sledi da je $A = B = S$. Dokažimo to, koristeći uslove ravnoteže:

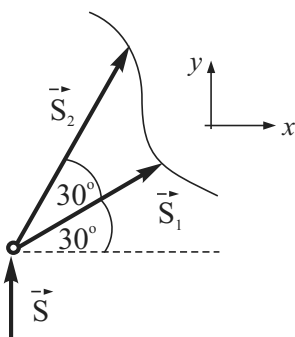
$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \Rightarrow A_x = 0, \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow A_y + B - 2S = 0, \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow 2S \cdot 4 - B \cdot 8 = 0 \end{aligned}$$

Odavde sledi, što smo već i rekli (simetrija!) da je $A_y = B = S$.

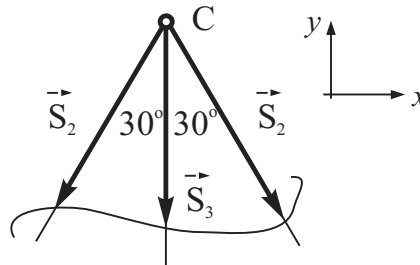


Slika 12.28: Spoljašnje sile (Sile u osloncima + spoljašnje sile).

Drugi korak. Posmatrajmo ravnotežu čvorova prikazanim na slikama 12.29



Slika 12.29: Sile u čvoru A.



Slika 12.30: Sile u čvoru C.

i 12.30. Iz njihove ravnoteže sledi:

- čvor A (slika 12.29):

$$\begin{aligned}\sum X_i = 0 &\Rightarrow S_1 \cdot \cos 30^\circ + S_2 \cdot \cos 60^\circ = 0, \\ \sum Y_i = 0 &\Rightarrow S + S_1 \cdot \sin 30^\circ + S_2 \cdot \sin 60^\circ = 0.\end{aligned}$$

Iz ovog sistema sledi da je: $S_1 = S$ i $S_2 = -\sqrt{3}S$.

- čvor C (slika 12.30):

$$\begin{aligned}\sum X_i = 0 &\Rightarrow -S_2 \cdot \sin 30^\circ + S_2 \cdot \sin 30^\circ = 0, \\ \sum Y_i = 0 &\Rightarrow -2S_2 \cdot \cos 30^\circ - S_3 = 0.\end{aligned}$$

Iz ovog sistema sledi da je: $S_3 = 3S$. Dakle, samo je štap 2 pritisnut, pa kod njega može da dođe do izvijanja.

Treći korak. Izvijanje. Pretpostavimo da do izvijanja može da dođe u oblasti elastičnosti. Tada je dopuštena sila $S_2 = S_{dop} = S_{kr}/n$. Kritična sila u oblasti elastičnosti je $S_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = \pi^2 \frac{E I_{min}}{\ell_0^2}$. Kako su oba kraja zglobovno vezana (I Ojlerov slučaj), to je $\ell_0 = \ell$. Prema slici 12.27 je $\ell \cos 60^\circ = 4 [m]$, tj. $\ell = 2 \cdot 4 [m] = 800 [cm]$.

Kako se traži prečnik štapa, to znači da je poprečni presek krug, pa je

$$\begin{aligned}I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi d^4}{64}, \\ A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}, \quad i^2 = \frac{I}{A} = \frac{d^2}{16} &\Rightarrow i = \frac{d}{4}.\end{aligned}$$

Dakle, da ne bi došlo do izvijanja, sila S_2 , u štapu 2, ne sme da bude veća

od dopuštene sile, tj.

$$S_2 \leq \frac{S_{kr}}{n} = \frac{1}{n} \frac{\pi^2 E I}{\ell_0^2} \Rightarrow \sqrt{3} S \leq \frac{1}{n} \frac{\pi^2 E I}{\ell_0^2} \Rightarrow d^4 \geq \frac{\sqrt{3} S 64 \cdot n \cdot \ell^2}{\pi^3 E}.$$

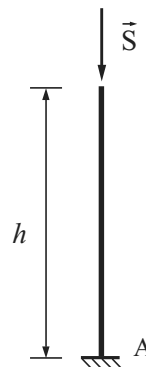
Za date brojne vrednosti: $S = 43 [kN]$, $n = 3$, $\sigma_{kr} = 1 [kN/cm^2]$, $E = 1 MN/cm^2 = 10^6 N/cm^2 = 10^3 kN/cm^2$, $\ell = 800 [cm] = 8 \cdot 10^2 [cm]$, dobija se

$$d^4 = \frac{\sqrt{3} \cdot 43 [kN] \cdot 64 \cdot 3 \cdot 8^2 (10^2)^2 [cm^2]}{\pi^3 \cdot 10^3 [kN/cm^2]} = \frac{\sqrt{3} \cdot 43 \cdot 64^2 \cdot 3 \cdot 10}{\pi^3} = (23,3)^4 \Rightarrow d \geq 23,3 [cm].$$

Za $d = 23,3 [cm]$ je: $i = \frac{d}{4} = 5,825 cm$, vitkost $\lambda = \frac{\ell}{i} = \frac{800}{5,825} = 137,339 \approx 137$. Za ove podatke granična vitkost (u oblasti elastičnosti) je $\lambda_{el} = \pi \sqrt{E/\sigma} = \pi \sqrt{\frac{10^3 kN/cm^2}{1 kN/cm^2}} = 10\pi\sqrt{10} = 99,34588 \approx 99$. Dakle, do izvijanja neće doći za $d \geq 23,3 [cm]$ (pretpostavka za kritičnu silu, u oblasti elastičnosti, je dobra). $\square$

Zad. 12.8.

Stub visine $h = 5 [m]$ i prečnika d , prikazan na slici 12.31, na jednom kraju je uklešten, a na drugom je slobodan. Odrediti prečnik stuba, ako je opterećen aksijalnom silom intenziteta $S = 30 kN$. Uzeti da je: modul elastičnosti $E = 0,12 \cdot 10^6 N/cm^2$, koeficijent (stepen) sigurnosti $n = 6$ i granična vitkost $\lambda_e = 100$.



Slika 12.31: uz zad. 12.8.

Rešenje:

U elastičnoj oblasti

$$S_{kr} = \frac{\pi^2 E}{(2\ell)^2} I_{\min} = n \cdot S_{dop} = n \cdot S \Rightarrow I_{\min} = \frac{4h^2 \cdot n S}{\pi^2 E}.$$

Kako je $I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$, to dobijamo

$$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{4h^2 \cdot nS}{\pi^2 E} \Rightarrow d^4 = \frac{4 \cdot 64 \cdot 25 [m] \cdot 6 \cdot 30 [kN]}{\pi^3 0,12 \cdot 10^6 [N/cm^2]} = (4,2)^4 [cm^4] \Rightarrow d = 4,2 [cm].$$

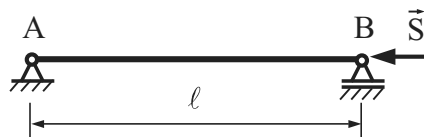
$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 13,85 [cm^2], \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{15,27}{13,85}} = 1,05 [cm]$$

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i_{\min}} = \frac{10 [m]}{1,05 [cm]} > 100$$

Ispravno po Ojlerovom obrascu. □

Zad. 12.9. Čelični štap, kružnog poprečnog preseka, pritisnut je silom $S = 200 kN$. Ako je stepen sigurnosti $n = 10$, dužina štapa $\ell = 2 [m]$ i modul elastičnosti $E = 2,1 \cdot 10^4 kN/cm^2$.

Odrediti prečnik štapa, pod uslovom da je zglobovno vezan na oba kraja. Uzeti da je u plastičnoj oblasti $\sigma_T = 32 - 0,1 \lambda$, a granične vitkosti su: $\lambda_e = 101$, $\lambda_p = 70$.



Slika 12.32: uz zad. 12.9.

Rešenje:

Kritična sila u oblasti elastičnosti

$$S_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\ell_0^2} I_{\min} = n \cdot S_{dop} = n \cdot S \Rightarrow I_{\min} = \frac{\ell_0^2 \cdot nS}{\pi^2 E} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Kako je $I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$, to dobijamo

$$d^4 = \frac{64 \cdot \ell^2 \cdot n \cdot S}{\pi^3 E} = \frac{10 \cdot 64 \cdot 200 [kN] \cdot 4 [m^2]}{\pi^3 2,1 \cdot 10^4 [kN/cm^2]} = (9,416)^4 [cm^4] \Rightarrow$$

$$d = 9,416 [cm] \quad \text{i} \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4} = 2,354 [cm].$$

Provera:

$$\ell_k = \ell = 200 [cm], \quad \lambda = \frac{\ell}{i_{\min}} = \frac{200}{2,354} = 84,96 \approx 85,$$

$$70 \leq \lambda \leq 101$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Nije u elastičnoj oblasti! U plastičnoj oblasti

$$\sigma_k = 32 - 0,1\lambda = 32 - 0,1 \cdot 85 = 23,5 [kN/cm^2].$$

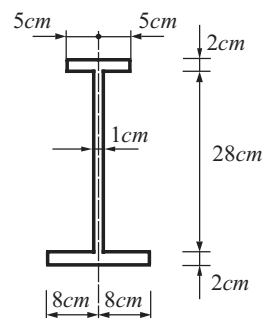
Stvarni napon

$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{200}{70} = 2,857, \quad n = \frac{S_k}{S} = \frac{\sigma_k}{\sigma} = \frac{23,5}{2,857} = 8,225 < 10$$

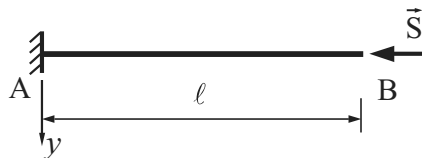
mora da se poveća prečnik štapa d . □

Zad. 12.10.

Za nosač, prikazan na sl. 12.34, odrediti kritičnu silu izvijanja. Poprečni presek skiciran je na sl. 12.33. U zadatku je: $\ell = 1 [m]$, $\sigma_E = 180 [MPa]$, $\sigma_T = 220 [MPa]$, $E = 210 [GPa]$, $\sigma_{kr}^T = 310 - 1,2\lambda [MPa]$.



Slika 12.33: Poprečni presek nosača.



Slika 12.34: uz zadatak 12.10.

Rešenje Minimalan poluprečnik inercije je $i_{\min} = 3,26 [cm]$ (vidi zadatak 4.3, na str. 69).

Odredimo prvo granične vitkosti za dati materijal:

$$\lambda_e^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{kr}^E} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 [MPa]}{180 [MPa]} \Rightarrow \lambda_e = 107,3, \quad \lambda_p = \frac{310 - 220}{1,2} = 75.$$

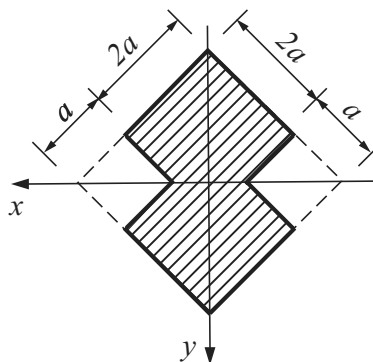
Stvarna vitkost štapa je

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i_{\min}} = \frac{2\ell}{i_{\min}} = \frac{200}{3,2} = 62,5 < \lambda_p.$$

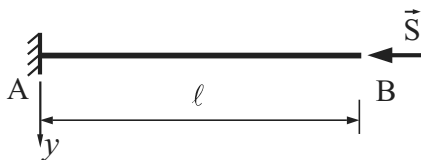
Kako je ova vrednost u oblasti gnječenja, to štap nije izložen izvijanju. □

Zad. 12.11.

Štap dužine $\ell = 100\pi [cm]$, prikazan na sl. 12.36, poprečnog preseka prikazanog na sl. 12.35, opterećena je aksijalnom silom $S = 100 [kN]$. Odrediti dužinu a tako da sigurnost ovog nosača na izvijanje bude $n = 3,5$. U zadatku je: $\sigma_E = 210 [MPa]$, $\sigma_T = 240 [MPa]$, $E = 210 [GPa]$, $\sigma_{kr}^T = 310 - 1,14\lambda [MPa]$.



Slika 12.35: Poprečni presek nosača sa sl. 12.36.



Slika 12.36: uz zadatak 12.11.

Rešenje:

Za ovaj poprečni presek (zadatak 4.7 na str. 76) videli smo da su ose x , y glavne težišne ose i za njih smo izračunali momente inercije. Dobili smo da je minimalni poluprečnik inercije:

$$i_y^2 = i_2^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{31}{84}a^2.$$

Dopuštena sila

$$S_{dop} = \frac{S_{kr}}{n} \Rightarrow S_{kr} = n \cdot S_{dop} = 350 [kN],$$

vitkost

$$\lambda_E = \pi \sqrt{E/\sigma_E} \approx 99,4, \quad \lambda_p = \frac{310 - \sigma_T}{1,14} = 61,4, \quad \lambda = \frac{2\ell}{a} \sqrt{\frac{84}{31}}.$$

Pretpostavimo da do izvijanja može da dođe u elastičnoj zoni, tada je

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

kritična sila (po Ojleru)

$$S_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{\ell_k^2} \Rightarrow I_{\min} = \frac{S_{kr} \ell_k^2}{\pi^2 E} = \frac{31}{12} a^4 \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{2 \ell_k}{\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot S_{kr}}{31 E}} = 20^2 \cdot 10^{-1} \sqrt{5/31} \Rightarrow a \approx 4 [cm].$$

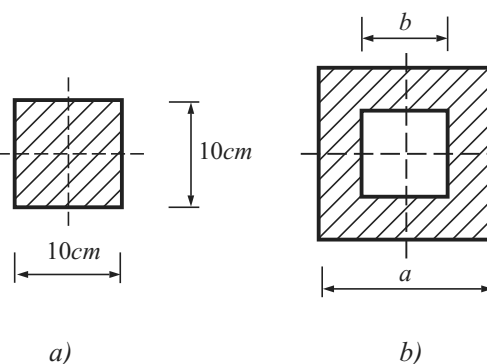
Provera na izvijanje:

$$\lambda = \frac{\ell_0}{i_{\min}} = \frac{200\pi}{a} \sqrt{\frac{84}{31}} = 258,57 > \lambda_e.$$

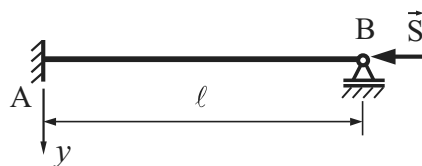
Usvajamo $d = 4 [cm]$. Dakle, za ovako izabrano d neće doći do izvijanja. $\square$

Zad. 12.12.

Poprečni presek datog nosača može biti oblika prikazanog na sl. 12.37a ili sl. 12.37b. Naći odnos kritičnih napona $\sigma_{kr}^1/\sigma_{kr}^2$, ako je: $\ell = 4 [m]$, $E = 210 [GPa]$, $\sigma_E = 210 [MPa]$, $\sigma_T = 240 [MPa]$, $\sigma_{kr}^T = 290 - 0,805 \lambda [MPa]$. $A_1 = A_2 = 100 [cm^2]$, $a/b = 1,1$.



Slika 12.37: Poprečni presek (a) ili b) nosača sa sl. 12.38.



Slika 12.38: uz zadatak 12.12.

Rešenje:

Kako je u pitanju isti štap (isti materijal i isto oslanjanje), to je u oba slučaja:

- vitkost štapa

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\ell/2}{i_{\min}}$$

- granična vitkost na granici elastičnosti

$$\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_E}} = \pi \sqrt{\frac{210 [GPa]}{210 [MPa]}} = \pi \sqrt{10^3} = 99,35,$$

- granična vitkost na granici plastičnosti

$$\lambda_T = \frac{290 - \sigma_{kr}^T}{0,805} = \frac{290 - 240}{0,805} = 62,11.$$

Razlika se pojavljuje zbog različitog $i_{\min}$. Dakle, potrebno je izračunati prvo momente inercije, a zatim poluprečnike inercije za poprečne preseke.

I slučaj (poprečni presek pod a)):

$$\begin{aligned} I_x = I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{10^4}{12}, \quad i_{\min}^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{100^2}{12} \cdot \frac{1}{100} = \frac{25}{3} \Rightarrow \\ i_{(1)} = \frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda_{(1)} = \frac{\sqrt{2} \cdot 400/2}{5/\sqrt{3}} = 40\sqrt{6} = 97,98, \Rightarrow \\ \lambda_T < \lambda_{(1)} < \lambda_E. \end{aligned}$$

Dakle, za ovaj poprečni presek kritična sila je

$$\sigma_{kr1}^T = 290 - 0,805 \cdot \lambda_{(1)} = 290 - 0,805 \cdot 97,98 = 211 [MPa].$$

II slučaj (poprečni presek pod b)):

Ovde prvo treba izračunati a i b . Poznat je samo odnos $a/b = 1,1$. Međutim, kako su površine poprečnih preseka jednake, to je

$$\begin{aligned} A_1 = 100 = A_2 = a^2 - b^2 = b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \Rightarrow b^2 (1,1^2 - 1) = 100 \\ b^2 \cdot 0,21 = 100 \Rightarrow b = \frac{10}{\sqrt{0,21}} = \frac{100}{\sqrt{21}}. \end{aligned}$$

Moment inercije je

$$\begin{aligned} I = \frac{a^4 - b^4}{12} = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{12} = \frac{100}{12} b^2 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1 \right] = \\ = \frac{25}{3} \frac{100^2}{21} (1,21 + 1) = \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 2,21}{63} \Rightarrow \\ i^2 = \frac{I}{A} = \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 2,21}{63 \cdot 100} \Rightarrow i = \frac{5 \cdot 10 \sqrt{2,21}}{3\sqrt{7}} = 9,3647 \approx 9,4. \end{aligned}$$

Konačno, za vitkost, za ovaj poprečni presek, dobijamo

$$\lambda_{(2)} = \frac{100\sqrt{2}}{9,4} = 30,089 \approx 30.$$

Kako je

$$\lambda_{(2)} < \lambda_T$$

to u ovom slučaju ne dolazi do izvijanja!

