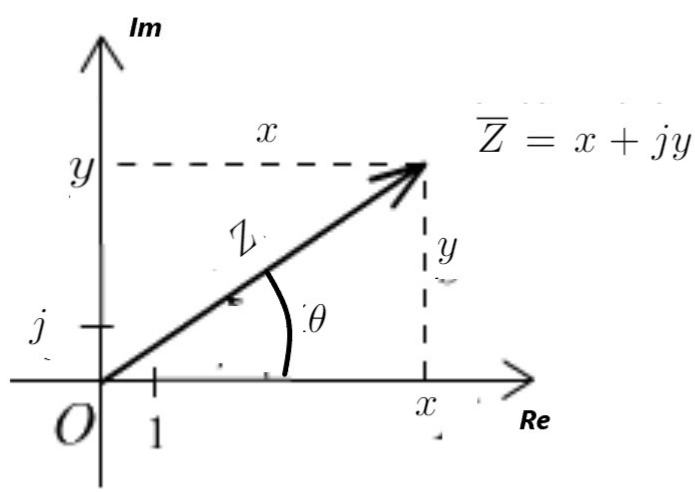
Kompleksni brojevi

d.kostic

December 2020

1 Opšti pojmovi

Iz matematike je poznato da brojevu oblika $x + iy$ predstavljaju kompleksne brojeve gde je x realni deo kompleksnog broja a y imaginarni deo kompleksnog broja . Imaginarna jedinica je definisana pomoću $i = \sqrt{-1}$. U elektrotehnici koristimo oznaku j za imaginarnu jedinicu pošto se oznaka i koristi za trenutnu vrednost električne struje.Da bi pravili razliku u označavanju u odnosu na realne brojeve slovna oznaka kompleksnog broja uključuje nadvučenu crtu iznad slovne oznake. Na primer oznakom Z prikazujemo realni broj dok $\overline{Z}$ predstavlja oznaku kompleksnog broja. Za kompleksni broj $\overline{Z} = x + jy$ x predstavlja realni deo kompleksnog broja y je imaginarni deo kompleksnog broja a j predstavlja imaginarnu jedinicu. Ovakav oblik kompleksnog broja nazivamo algebarski oblik.Za razliku od realnih brojeva koji se geometrijski predstavljaju tačkom na brojnoj pravoj kompleksni broj se predstavlja tačkom u kompleksnoj ravni gde realni deo predstavlja horizontalnu koordinatu dok imaginarni deo predstavlja vertikalnu koordinatu kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1: Kompleksni broj u kompleksnoj ravni

Iz slike 1 vidi se da je rastojanje tačke u kompleksnoj ravni koje odgovara kompleksnom broju $\overline{Z} = x+jy$, od koordinatnog početka $\sqrt{x^2 + y^2}$. Ovo rastojanje koje je pozitivan broj predstavlja apsolutnu vrednost ili modul kompleksnog broja i označavamo ga sa Z (bez nadvučene crte).

Specijalni slučajevi kompleksnog broja su oni brojevi koji sadrže samo jednu komponentu. $\overline{Z} = jy$ je imaginarni broj koji se može predstaviti tačkom na imaginarnoj osi -Im. Kompleksni broj $\overline{Z} = x$ je realni broj koji se može predstaviti tačkom na realnoj osi- Re. Za svaki kompleksni broj $\overline{Z} = x + jy$ definišemo konjugovano kompleksni broj sa oznakom $\overline{Z}^*$ kao $\overline{Z}^* = x - jy$.

1.1 Aritmetika kompleksnih brojeva u algebarskom obliku

Ako su $\overline{Z}_1 = x_1 + jy_1$ i$\overline{Z}_2 = x_2 + jy_2$njihov zbir/razlika je kompleksan broj $\overline{Z}$:

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 \pm \overline{Z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

Proizvod dva kompleksna broja $\overline{Z}_1 = x_1 + jy_1$ i $\overline{Z}_2 = x_2 + jy_2$ izračunava se potpuno na isti način kao što se izračunava proizvod dva binoma, stim što je potrebno koristiti $j^2 = -1$.

$$\overline{Z} = \overline{Z_1 Z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Proizvod kompleksnog broja $\overline{Z}$ i njemu konjugovano kompleksnog broja $\overline{Z}^*$ predstavlja kvadrat modula ili apsolutne vrednosti kompleksnog broja $\overline{Z}\overline{Z}^* = x^2 + y^2 = Z^2$.
Količnik kompleksnih brojeva $\overline{Z}_1 = x_1 + jy_1$ i $\overline{Z}_2 = x_2 + jy_2$ je kompleksni broj $\overline{Z} = x + jy$ koji se određuje se sledećim postupkom:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} = \frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2^*}{\overline{Z}_2\overline{Z}_2^*} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Primer: Pokazati da je:

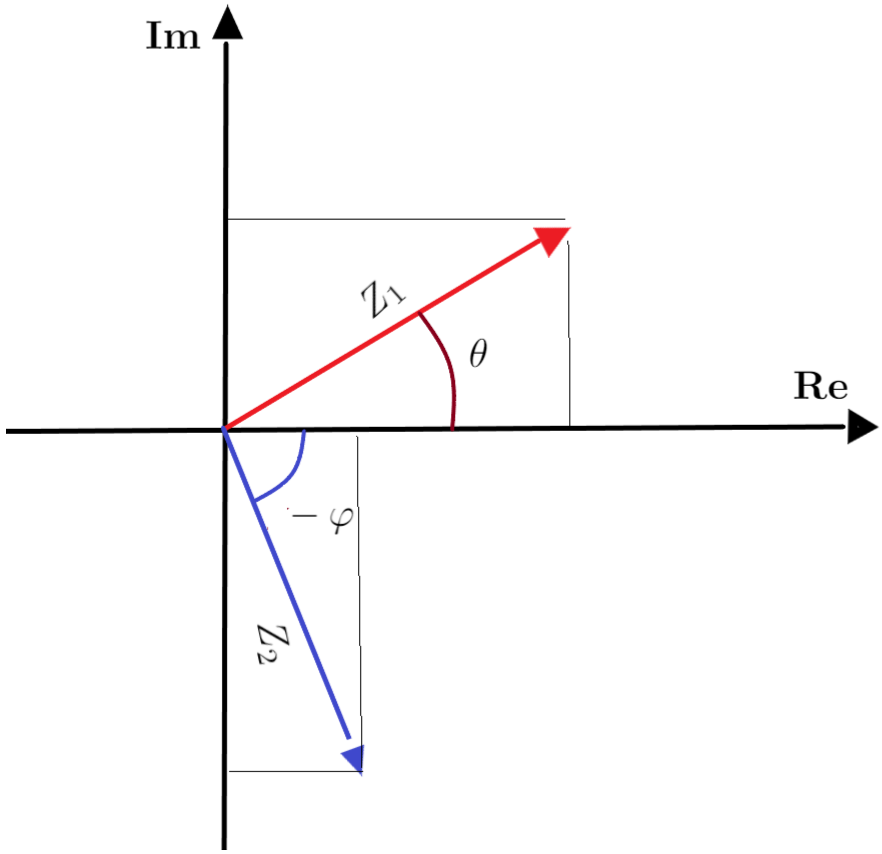
$$\begin{aligned}(5 + j5)(3 - j4) &= 35 - j5\\ \frac{5 + j5}{3 - j4} &= -0.2 + j1.4\\ \frac{1}{3 + j4} &= \frac{3}{25} - j\frac{4}{25}\end{aligned}$$

1.2 Kompleksni brojevi u polarnom obliku

Svaki kompleksni broj $\overline{Z}$ se na jedinstven način može predstaviti pomoću svog modula Z i ugla koji gradi sa pozitivnom realnom poluosom.

$$\begin{aligned}\overline{Z} &= Z\angle\theta\\ Z &= \sqrt{x^2 + y^2}\\ -\pi &\leq \theta \leq \pi\end{aligned}$$

Na slici 2 su prikazani dva kompleksna broja $\overline{Z}_1 = Z_1\angle\theta$ i $\overline{Z}_2 = Z_2\angle - \varphi$. Direktna i jednoznačna relacija između polarne forme kompleksnog broja i fazora je očigledna.Modulu kompleksnog broja odgovara efektivna vrednost naizmenične veličine dok je fazni ugao kojim merimo pomeraj fazora u odnosu na faznu osu odgovara ugaonoj komponenti polarnog oblika kompleksnog broja.Shodno ovome aritmetika ove forme kompleksnih brojeva je potpuno identična aritmetici fazora.



Slika 2: Kompleksni brojevi u polarnoj formi

Konverzija kompleksnog broja u polarni i obratno može se odrediti na osnovu sledećih relacija jasno prikazanih na slici 1.

$$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$x = Z\cos\theta$$
$$y = Z\sin\theta$$

Primeri: 1.Konvertovati kompleksni broj $\overline{Z} = 10\angle\frac{\pi}{6}$ u algebarsku formu.
Rešenje:

$$x = Z\cos\theta = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\sqrt{3}$$
$$y = Z\sin\theta = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5$$
$$\overline{Z} = 5\sqrt{3} + j5$$

2. Konvertovati kompleksne brojeve $\overline{Z}_1 = 5\sqrt{2} - j5\sqrt{2}$ i $\overline{Z}_1 = -5\sqrt{2} + j5\sqrt{2}$ u polarnu formu.

Rešenje:

$$Z_1 = Z_2 = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = 5$$
$$\theta_1 = \arctan\frac{5\sqrt{2}}{-5\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}$$
$$\theta_2 = \arctan\frac{-5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4} + \pi \qquad jer \quad je \quad x < 0$$

Važna napomena je, da je, u slučaju kada je realni deo kompleksnog broja negativan tada se izračunatoj vrednosti ugla putem kalkulatora dodaje π.

1.3 Trigonmetrijska i eksponencijalno trigonometrijska forma kompleksnih brojeva

Iz slika 1 i 2 jasno je da važi:

$$\overline{Z} = x \pm jy = Z\cos\theta \pm jZ\sin\theta$$
$$\overline{Z} = Z(\cos\theta \pm j\sin\theta)$$

. U ovakvoj notaciji Z je modul ili apsolutna vrednost kompleksnog broja dok je ugao θ argument kompleksnog broja Za kompleksne brojeve $\overline{Z}_1 = Z_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$ i $\overline{Z} = Z(\cos\theta + j\sin\theta)$ je:

$$\overline{Z}_1\overline{Z}_2 = Z_1Z_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$
$$\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

Primetimo da izraz $\cos\theta \pm j\sin\theta$ predstavlja kompleksni broj koji se u polarnoj formi predstavlja: $\overline{Z} = 1\angle\pm\theta$ Ojlerov eksponencijalni oblik kompleksnog broja zasniva se na identitetima:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

Kako je $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ a $\cos(-\theta) = \cos\theta$ jasna je povezanost obe formule. Eksponencijalni oblik kompleksnog broja $\overline{Z}$ je predstavlja u stvari kompaktan prikaz njegovog trigonometrijskog oblika jer je:

$$\overline{Z} = Z\left(\cos\theta + j\sin\theta\right) = Ze^{j\theta}$$
$$\overline{Z}^* = Ze^{-j\theta}$$

1.3.1 Aritmetika kompleksnih brojeva u eksponencijalnoj formi

Kako kompleksni broj u eksponencijalnoj formi nastaje zamenom jediničnog vektora u trigonometrijskom obliku eksponencijalnim članom $e^{j\theta}$ operacije množenja i deljenja su potpuno analogne već definisanim operacijama množenja i deljenja kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku uz jedan benefit koji se odnosi na kompaktost eksponencijalnog prikaza u odnosu na trigonometrijski. Osim toga geometrijska predstava koja je neophodna kod polarnog prikaza kompleksnih brojava nije više neophodna.

$$\overline{Z}_1 = Z_1e^{j\theta_1}; \qquad \overline{Z}_2 = Z_1e^{j\theta_2}$$
$$\overline{Z}_1\overline{Z}_2 = Z_1Z_2e^{j(\theta_1+\theta_2}$$
$$\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

Primer:
Kompleksne brojeve $\overline{Z}_1 = 25\sqrt{3} + j25$ i $\overline{Z}_2 = 4\sqrt{2} - j4\sqrt{2}$ predstavite u eksponencijalnom obliku a zatim odrediti $\overline{Z}_p = \overline{Z}_1\overline{Z}_2$ i $\overline{Z}_d = \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2}$.
Izracunati $\overline{Z}_p + \overline{Z}_d$.
Rešenje:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \sqrt{(25\sqrt{3})^2 + 25^2} = \sqrt{2500} = 50; \\
\tan\theta_1 &= \frac{25}{25\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{6}; \\
\overline{Z}_1 &= 50e^{j\frac{\pi}{6}} \\
Z_2 &= \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 4; \\
\tan\theta_2 &= \frac{-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -1 \qquad \theta_2 = -\frac{\pi}{4}; \quad x = 4\sqrt{2} > 0 \\
\overline{Z}_2 &= 4e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
\overline{Z}_p &= 50e^{j\frac{\pi}{6}}4e^{-j\frac{\pi}{4}} = 200e^{-j\frac{\pi}{12}} \\
Z_d &= \frac{50}{4}e^{(j\frac{\pi}{6}-(-j\frac{\pi}{4}))} = 12.5e^{j\frac{5\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Za izračunavanje zbira potrebno je najpre $\overline{Z}_p$ i $\overline{Z}_d$ konvertuju najpre u trigonometrijski a zatim u algebarski oblik pa da se potom izvrši odvojeno sabiranje realnih i imaginarnih delova ovih brojeva. Postupak je sledeći:

$$\begin{aligned}
\cos\theta_p &= \cos-\frac{\pi}{12} = 0.9659; \qquad \sin-\frac{\pi}{12} = -0.2588 \\
\overline{Z}_p &= 200 * 0.9659 - j200 * 0.2588 = 193.2 - j51.8 \\
e^{j\frac{5\pi}{12}} &= 0.2588 + j0.9659 \\
\overline{Z}_d &= 12.5 * (0.2588 + j0.9659) = 3.2 + j12 \\
\overline{Z}_p + \overline{Z}_d &= 196.4 - j39.8
\end{aligned}$$