



Elektrotehnika

1. Elektrostatika

1. Elektrostatika

1.1. Struktura atoma i naelektrisanje

1.1.1. Provodnici, poluprovodnici i izolatori

1.2. Tačkasto, linijsko, ravansko i zapreminsko naelektrisanje

1.3. Kulonov zakon za tačkasta naelektrisanja

1.4. Električno polje tačkastog naelektrisanja

1.5. Fluks vektora električnog polja i Gausov zakon (GZ)

1.5.1. Određivanje električnog polja naelektrisane ravni primenom GZ

1.5.2. Određivanje električnog polja tačkastog naelektrisanja primenom GZ (videti **Primer 2**)

1.6. Uticaj sredine (dielektrika) na električno polje

1.7. Rad, napon i potencijal

1.7.1. Potencijal tačkastog naelektrisanja

1.8. Kondenzator

1.8.1. Kapacitivnost pločastog kondenzatora

1.8.2. Opterećivanje (punjenje) kondenzatora, proteklo naelektrisanje

1.8.3. Ekvivalentne veze kondenzatora: redna

1.8.4. Ekvivalentne veze kondenzatora: paralelna

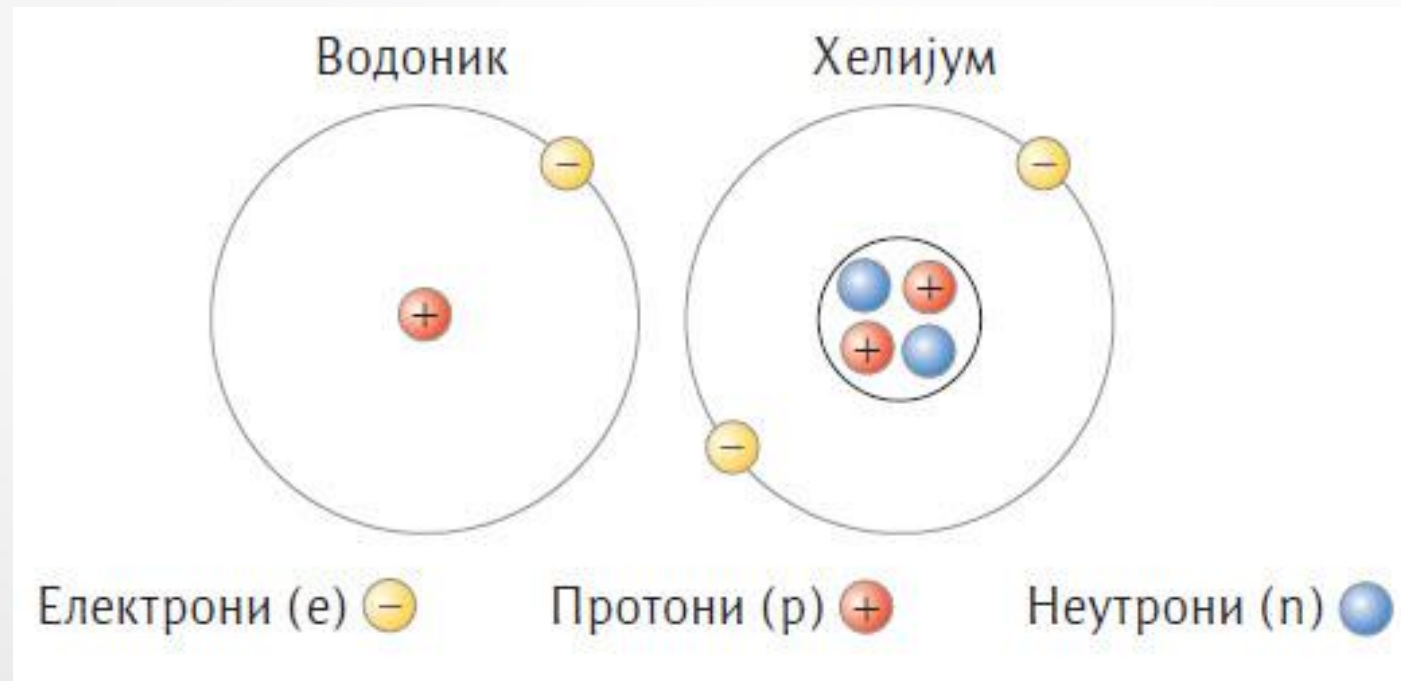
1.8.5. Ekvivalentne veze kondenzatora: trugao i zvezda

1.8.6. Primena kondenzatora

1.9. Primeri

1.1. Struktura atoma i naelektrisanje

- Naelektrisanje jednog protona je: $q_p = 1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (Kulon).
- Naelektrisanje jednog elektrona je: $q_e = -q_p$.



<https://fizis.rs/osnovna-skola/>

1.1.1. Provodnici, poluprovodnici izolatori

- Provodnici:
 - Veliki broj “slobodnih” naelektrisanja: elektroni (metali), joni (tečnosti i gasovi)
 - Metali: platina, zlato, srebro, bakar, aluminijum, ...
 - Rastvori: baterije, akumulatori, kondenzatori, ...
 - Gasovi: neonske lampe
- Izolatori:
 - Izuzetno mali broj “slobodnih” naelektrisanja - sva su vezana za atom (jezgro)
 - Materijali: guma, porcelan, keramika, plastika, ...
- Poluprovodnici:
 - Srednji broj “slobodnih” naelektrisanja koji se tipično mogu kontrolisati/projektovati
 - Materijali: silicijum, germanijum, ... (okolina IV grupe periodnog sistema elemenata)
 - Primene: čipovi, svetleće diode (LED), laserske diode (LD), fotodiode (PD), ...

1.2. Tačkasto, linijsko, ravansko i zapreminsko naelektrisanje

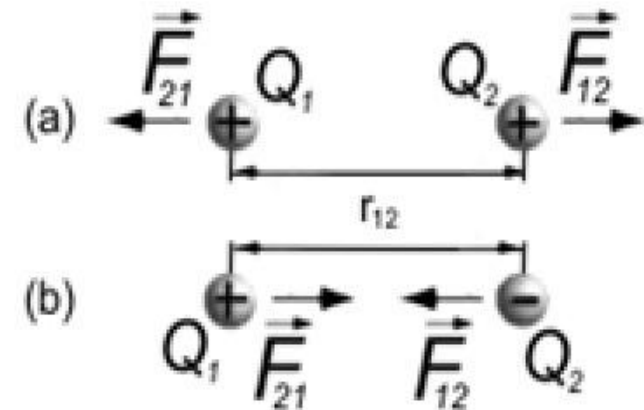
- Tačkasto naelektrisanje - metalna “kuglica” malih dimenzija (tačka)
 - Q - količina naelektrisanja, jedinica je Kulon (C)
- Linijska gustina naelektrisanja - linijsko naelektrisanje
 - $\sigma_L = \frac{Q}{L}$, gde je L - dužina žice na kojoj je akumulirano naelektrisanje (ako je konačna)
- Površinska gustina naelektrisanja - ravansko naelektrisanje
 - $\sigma_S = \frac{Q}{S}$, gde je S - površina ravni na kojoj je akumulirano naelektrisanje (ako je konačna)
- Zapreminska gustina naelektrisanja - prostorno naelektrisanje
 - $\sigma_V = \frac{Q}{V}$, gde je V - zapremina prostora u kome je naelektrisanje (ako je konačna)

1.3. Kulonov zakon za tačkasta naelektrisanja

- Istoimena naelektrisanja se odbijaju, raznoimena se privlače.
- F_{12} je sila kojom naelektrisanje Q_1 deluje na naelektrisanje Q_2 .
- Ort $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ uvek ima smer od naelektrisanja koje deluje silom (za silu F_{12} to je Q_1) ka naelektrisanju na koje se deluje silom (za silu F_{12} to je Q_2).
- $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ [F/m] - dielektrična permitivnost vakuuma

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}; \quad |\vec{r}_0| = 1$$



1.4. Električno polje tačkastog naelektrisanja

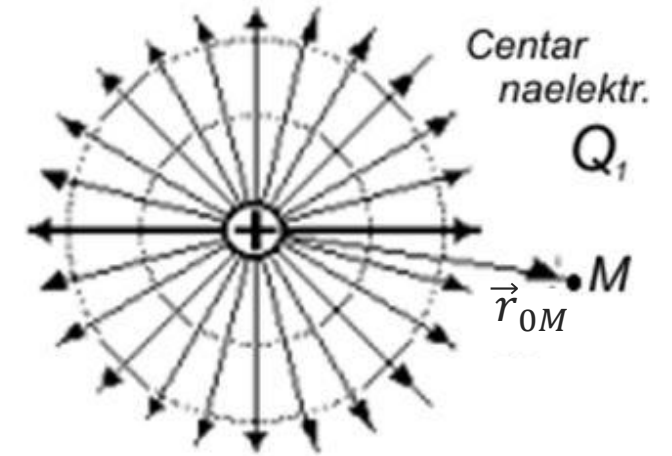
- Električno polje postoji u okolini naelektrisanih tela (Q_1) i definiše se preko sile F_{12} na neko naelektrisanje Q_2 koje se nalazi u okolini Q_1 :

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2}$$

- Jedinica Njutn po Kulonu (N/C) ili Volt po metru (V/m). Ako je naelektrisanje Q_2 bilo u tački M, tada je polje u toj tački:

$$\vec{K}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q_1}{r_M^2} \vec{r}_{0M} \quad |\vec{r}_{0M}| = 1$$

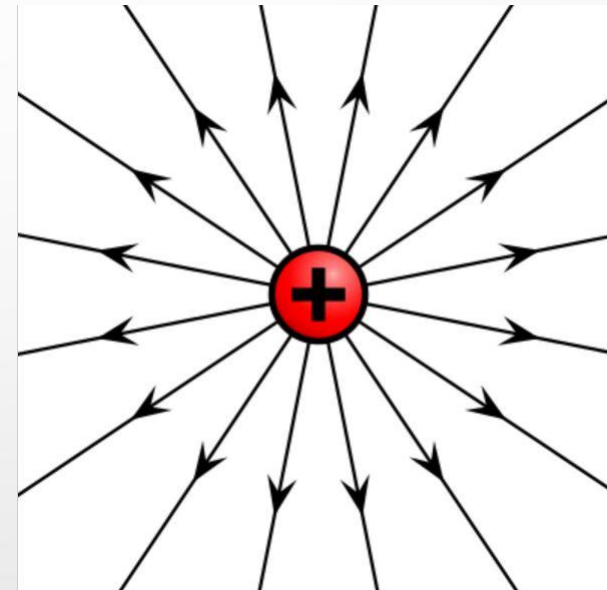
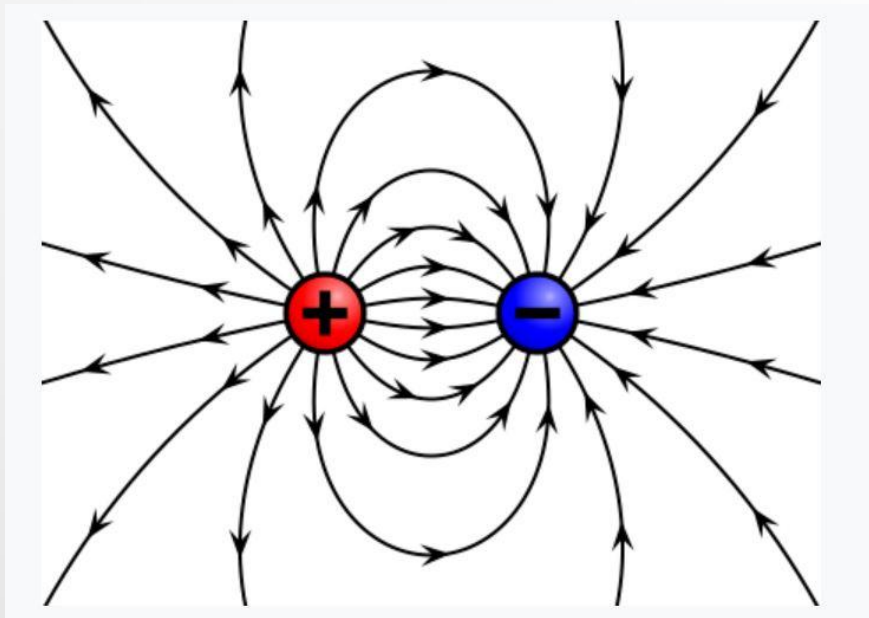
- Ort je uvek usmeren od naelektrisanja Q_1 ka tački M u kojoj se posmatra električno polje.



Slika 1.3.1 Električno polje usamljenog nepokretnog tačkastog naelektrisanja

1.4. Električno polje tačkastog naelektrisanja

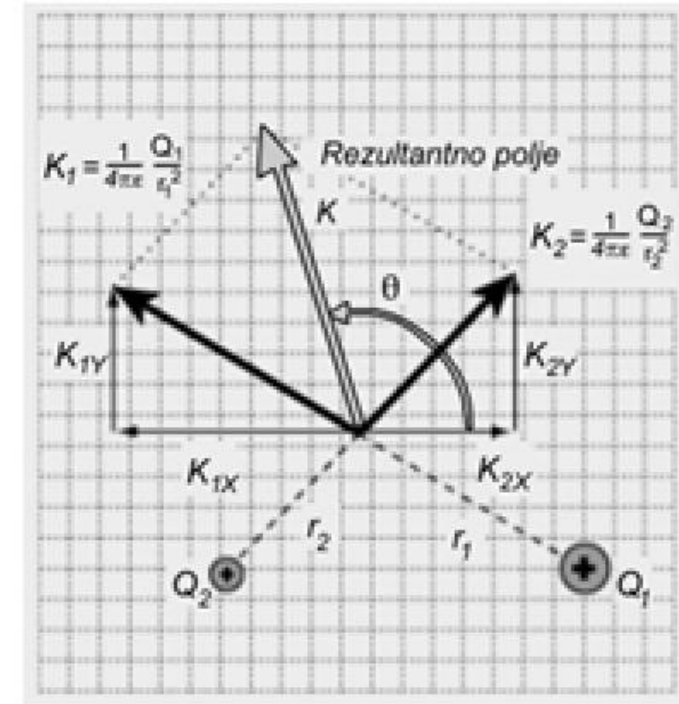
- Električno polje se često grafički prikazuje pomoću linija električnog polja.
- Vektor električnog polja u nekoj tački ima pravac tangente i smer linije polja.



1.4. Električno polje tačkastog naelektrisanja

- Električno polje koje postoji u okolini više tačkastih naelektrisanja se dobija vektorskim sumiranjem polja pojedinih naelektrisanja (superpozicija u linearnoj sredini).

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_{oi}; \quad |\vec{r}_o| = 1$$



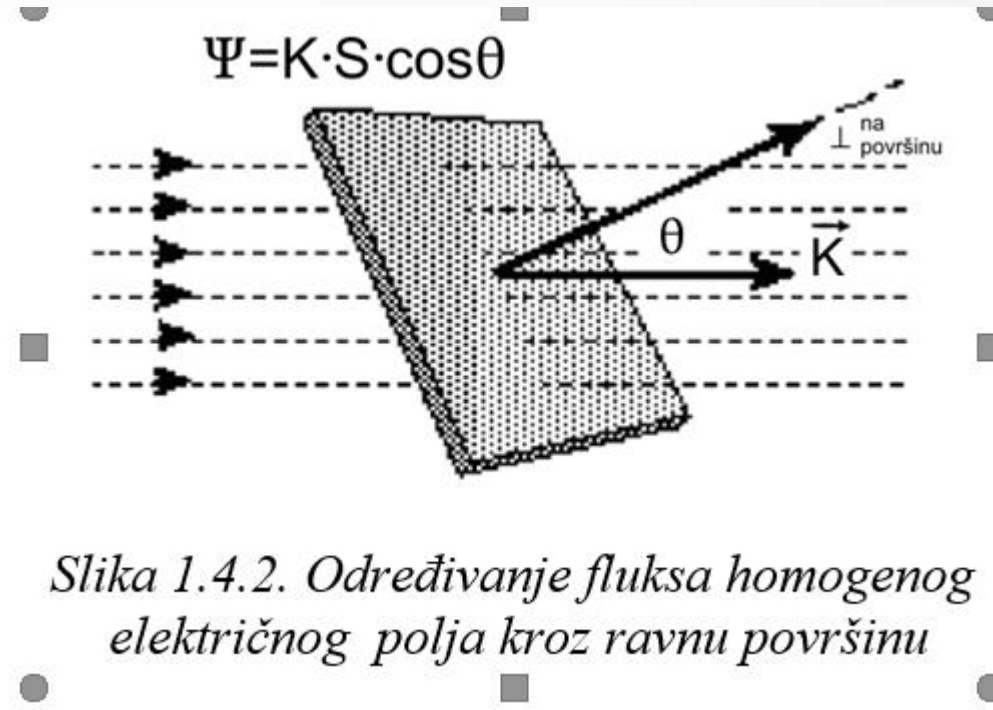
Slika 1.3.2. Električno polje u tački nastalo kao posledica dva tačkasta naelektrisanja

1.5. Fluks vektora električnog polja i Gausov zakon (GZ)

- Fluks električnog polja kroz ravnu površ:

$$\Psi = \vec{K} \vec{S} = K S \cos(\vec{K}, \vec{S})$$

$$\vec{S} = S \vec{n}_o$$

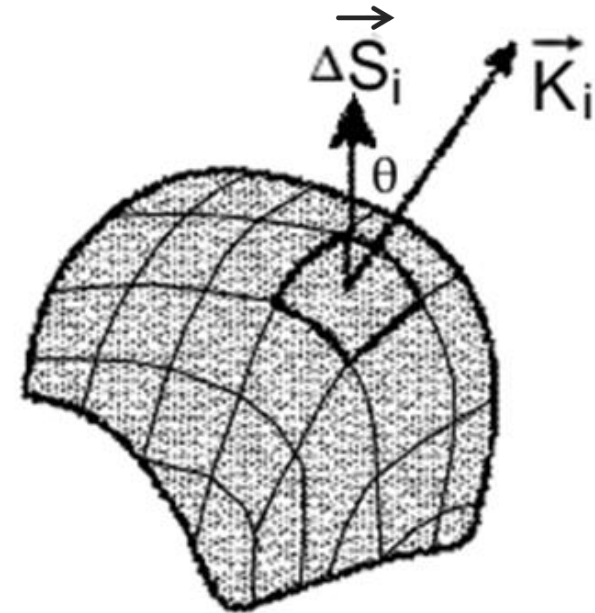


1.5. Fluks vektora električnog polja i Gausov zakon (GZ)

- Šta ako površ nije ravna?
- Podelimo je na male površi koje su približno ravne:

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Delta\Psi_i = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \Delta\vec{S}_i$$

$$Diam\Delta S_i \rightarrow 0$$



Slika 1.4.3 Određivanje fluksa kroz proizvoljnu krivu površinu

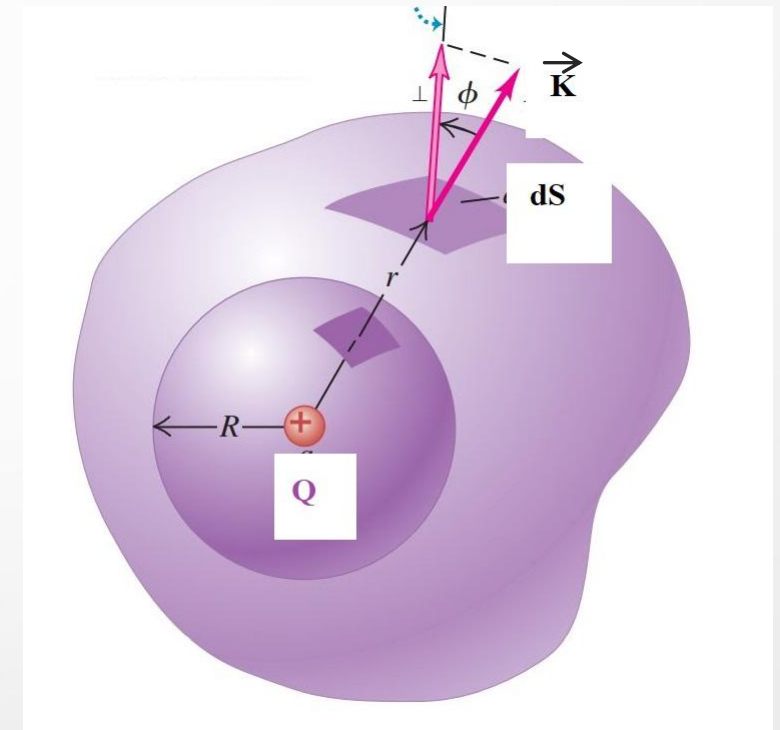
1.6. Fluks vektora električnog polja i Gausov zakon (GZ)

- Šta ako površ zatvorena?
- **Gausov zakon** - fluks vektora električnog polja Ψ_{S_z} kroz zatvorenu površ S_z jednak je zbiru slobodnih naelektrisanja obuhvaćenih tom površi:

$$\Psi_{S_z} = \frac{\sum_{S_z} Q_{S_z}}{\epsilon_0}$$

- Vektor površi $\vec{dS}$ sa normalom prema spolja.
- Fluks kroz zatvorenu površ u kojoj nema slobodnih naelektrisanja je jednak 0:

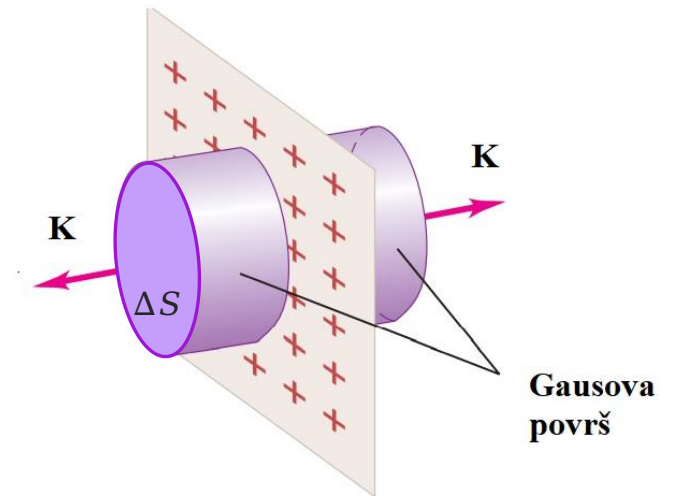
$$\Psi_{S_z} = 0$$



1.5.1. Određivanje električnog polja naelektrisane ravni primenom GZ

- Ako je naelektrisana ravan beskonačna, tada polje u okolini ravni ne zavisi od rastojanja od nje - polje je konstantnog inteziteta.
- Zbog simetrije, linije polja i vektor polja su upravni na beskonačnu ravan.
- Zamislimo Gausovu površ oblika cilindra kao na slici.
- Kroz omotač cilindra nema fluksa.
- Fluks postoji samo kroz osnove: $\psi = 2K \Delta S$.
- Ukupno naelektrisanje obuhvaćeno Gausovom površi je: $Q = \sigma \Delta S$.
- Primenom GZ:

$$\psi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2K \Delta S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Delta S \Rightarrow K = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



1.6. Uticaj dielektrika na električno polje

- Dielektrik je izolator koji se polarizuje pod dejstvom polja.

- Polje sa vakuumom:

$$K_o = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

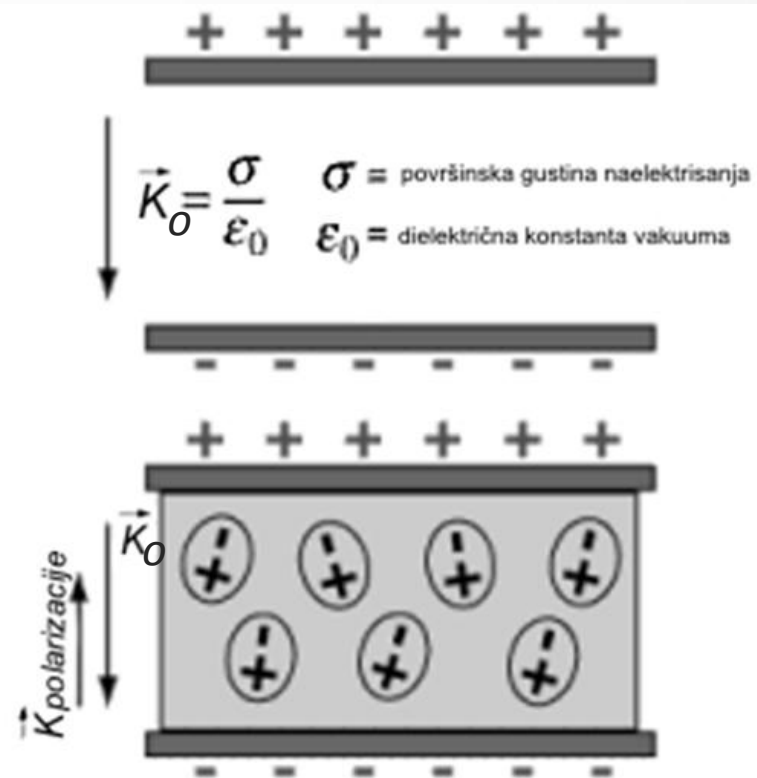
- Polje sa dielektrikom:

$$K_m = K_{rez} = K_o - K_{pol}$$

$$K_m = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

- Relativna dielektrična konstanta ϵ_r
(neimenovani broj):

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_o \quad \epsilon_r > 1$$



Slika 1.3.4. Električno polje između provodnih ploča
a) u vakuumu b) u sredini sa dielektrikom

1.7. Rad, napon i potencijal

- Rad električne sile da pomeri naelektrisanje:

$$\Delta A = \vec{F} \Delta \vec{l}$$

- Elementarni rad sila na nekoj putanji od A do B:

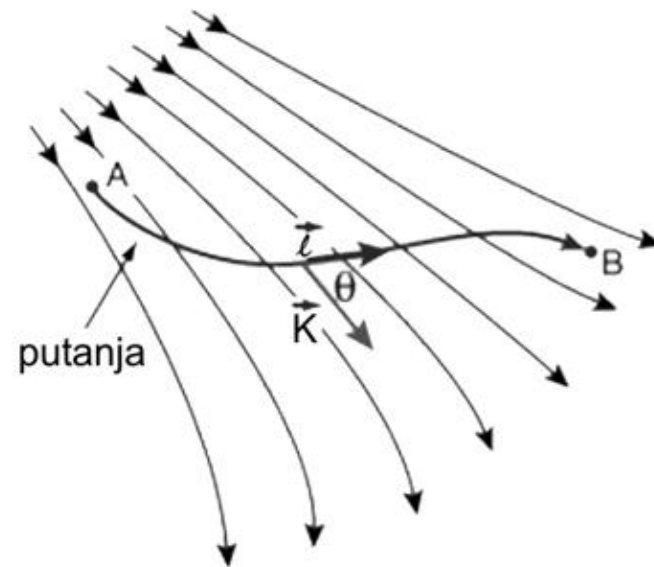
$$\Delta A_i = \Delta Q \vec{K}_i \Delta \vec{l}_i$$

- Jedinica za rad je Džul (J).
- Ukupni rad sila od A do B:

$$A = \sum_{i=1}^N \Delta A_i = \Delta Q \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \Delta \vec{l}_i, \quad |\Delta l_i| \rightarrow 0$$
$$A = \Delta Q \int_A \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

- Zatvorena putanja L (na primer A-B-A):

$$\oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l} = 0$$



1.7. Rad, napon i potencijal

- Napon između tačaka A i B je:

$$U_{AB} = \frac{A}{\Delta Q} = \int_A^B \vec{K} d\vec{l}$$

$$U_{BA} = \int_B^A \vec{K} d\vec{l} = -U_{AB}$$

- Potencijal tačke A je napon između tačke A i referentne tačke R nultog potencijala:

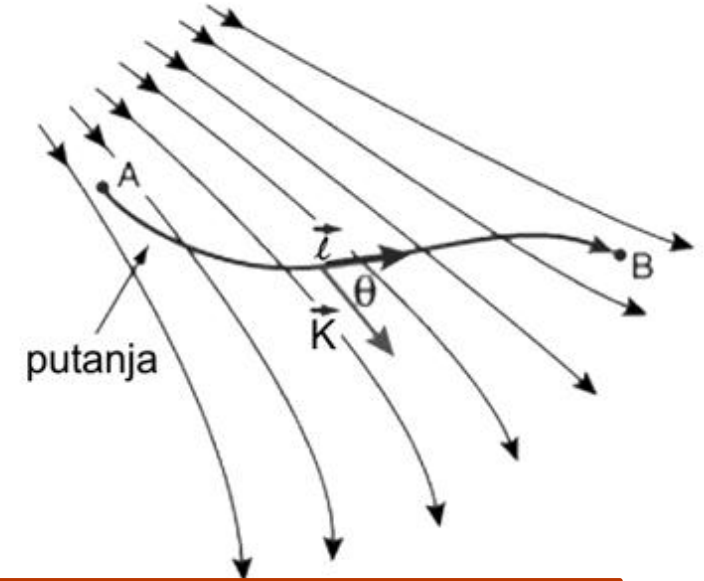
$$V_A = U_{AR} = \int_A^R \vec{K} d\vec{l}$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{K} d\vec{l} = \int_A^R \vec{K} d\vec{l} + \int_R^B \vec{K} d\vec{l} = V_A - V_B$$

- Napon po zatvorenoj putanji je jednak nuli:

$$\oint \vec{K} d\vec{l} = 0$$

- Jedinica za napon i potencijal je Volt (V).



1.7.1. Potencijal tačkastog naelektrisanja

- Električno polje u tački M tačkastog naelektrisanja:

$$\vec{K}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_M^2} \vec{r}_{OM} \quad |\vec{r}_{OM}| = r_M$$

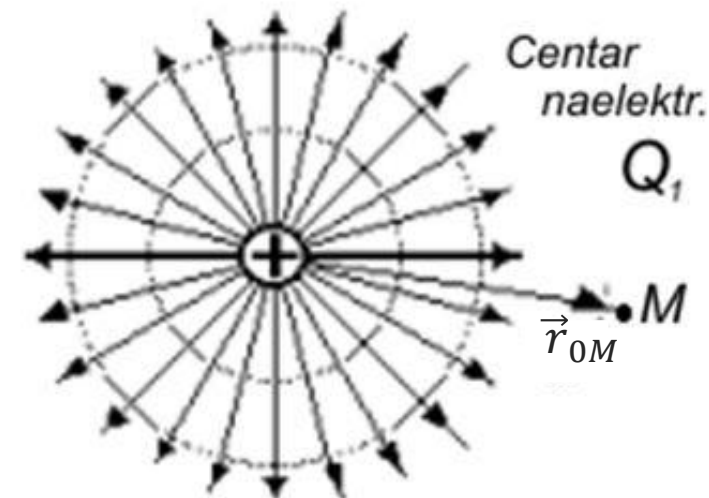
- Potencijal u tački M tačkastog naelektrisanja za referentnu tačku R:

$$V_M = U_{MR} = \int_M^R \vec{K} d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_M^R \frac{dr}{r^2}$$

$$V_M = U_{MR} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_R} \right)$$

- Ako je referentna tačka R u beskonačnosti:

$$V_M = U_{MR} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_M}$$



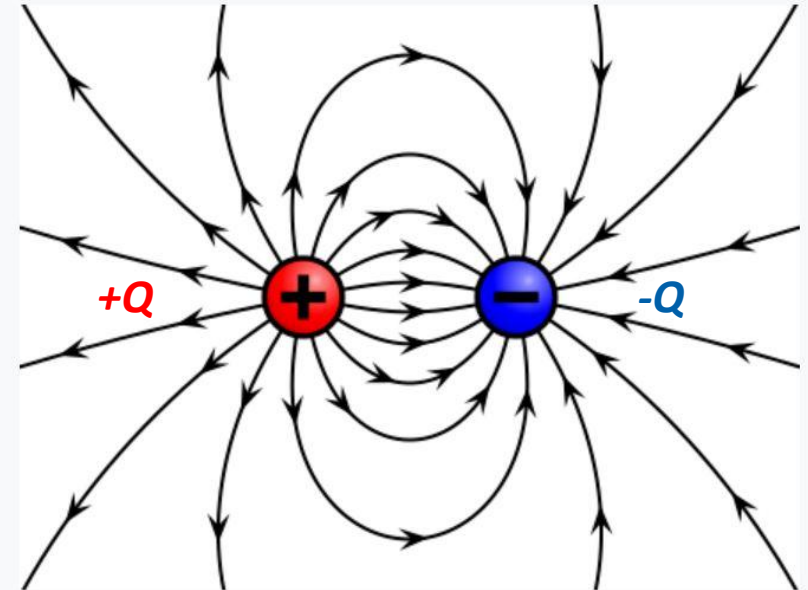
Slika 1.3.1 Električno polje usamljenog nepokretnog tačkastog naelektrisanja

1.8. Kondenzator

- Kondenzator se sastoji iz dve provodne ploče naelektrisane suprotnom količinom naelektrisanja, koje su razdvojene dielektrikom.
- Osnovna osobina je da skladišti energiju električnog polja. Osnovni parametar kondenzatora je kapacitivnost (kapacitet):

$$C = \frac{Q}{U} \text{ (= konstanta!)}$$

- Q je naelektrisanje elektroda, a U napon između njih.
- Jedinica za kapacitivnost je Farad [F].
- Oznake u šemi:



Usaglašeni referentni smer:

smer dotoka “zamišljenog pozitivnog naelektrisanja” je ka (+) ploči, a isto toliko pozitivno naelektrisanje odlazi sa (-) ploče i ona postaje negativna.

1.8.1. Kapacitivnost pločastog kondenzatora

- Kapacitivnost kondenzatora je funkcija njegovih geometrijskih karakteristika (površine ploča S i rastojanja između njih d), i osobina dielektrika (ϵ).
- Pošto je polje između ploča konstantno i jednako dvostrukoj vrednosti polja jedne ploče:

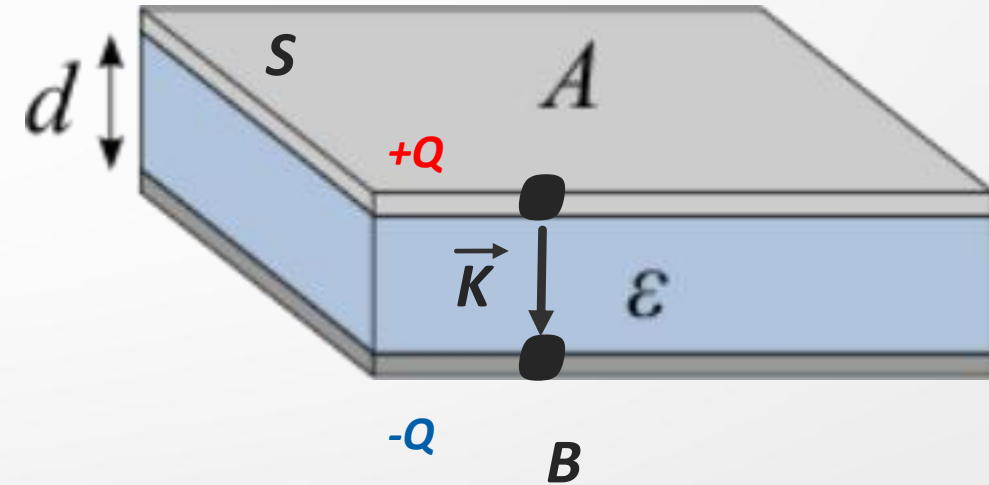
$$K = K_{(+Q)} - K_{(-Q)} = 2K_{(+Q)} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon S}$$

- A napon između tačaka A (na pozitivnoj ploči) i B (na negativnoj ploči):

$$U = U_{AB} = \int_A^B \vec{K} \cdot d\vec{l} = K \int_0^d dl = Kd = \frac{Qd}{\epsilon S}$$

- Tada je kapacitivnost pločastog kondenzatora:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon S}} = \frac{\epsilon S}{d}$$



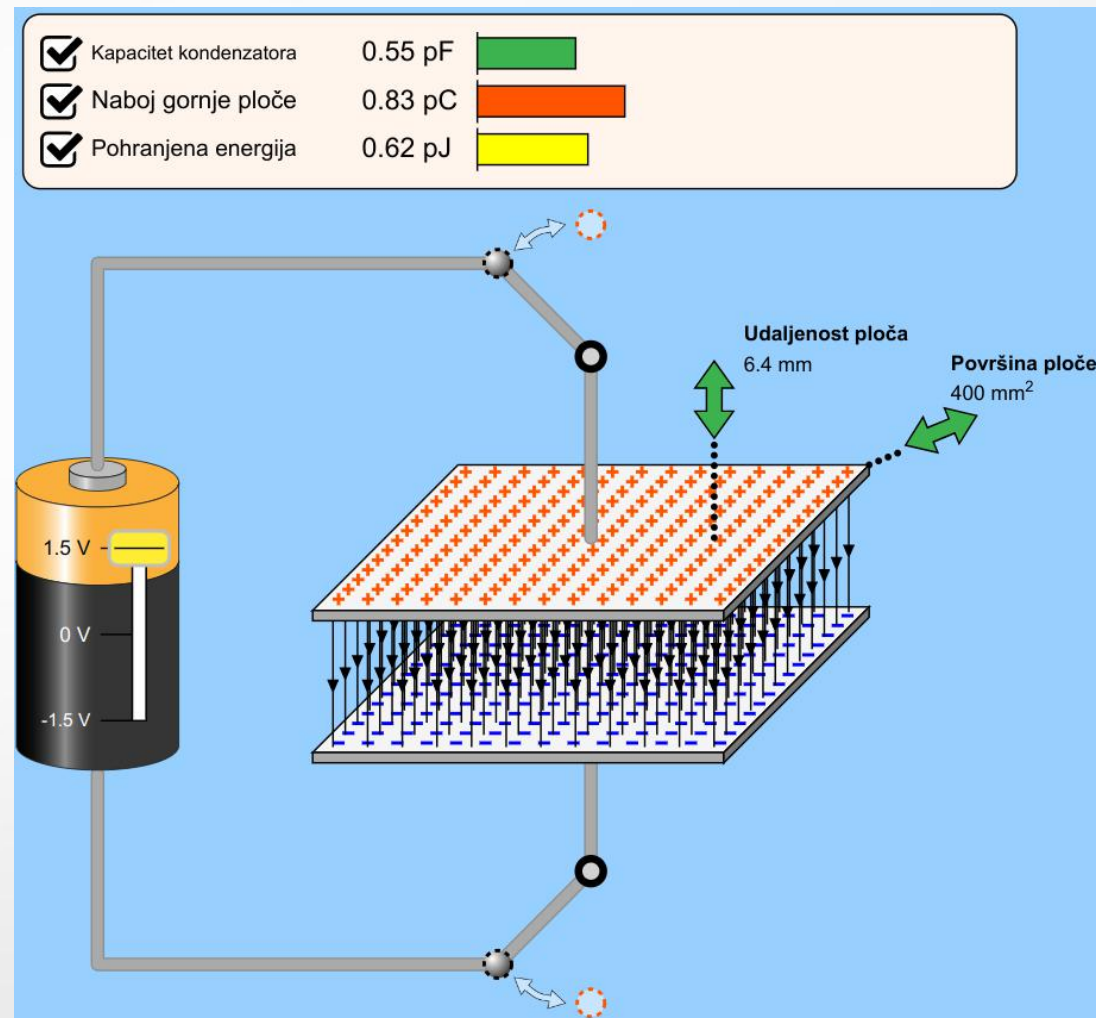
1.8.2. Opterećivanje (punjenje) kondenzatora

- Da bi se kondenzator opteretio neophodno je da postoji takva mašina (generator, baterija) koja će sa jedne electrode “čupati” elektrone i prebacivati ih na drugu elektrodu savlađujući pritom sile električnog polja koje su suprotnog znaka.
- Rad koji se tom prilikom izvršio akumuliran je u vidu energije elektrostatickog polja $W=A$:

$$dW = u dq = \frac{q}{C} dq$$

$$W = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{1}{2C} q^2 \Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$$

- https://phet.colorado.edu/sims/html/capacitor-lab-basics/latest/capacitor-lab-basics_hr.html



1.8.3. Ekvivalentne veze kondenzatora: redna

- Kroz sve kondenzatore je proteklo isto naelektrisanje:

$$q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$$

- Napon na krajevima serijske veze kondenzatora je:

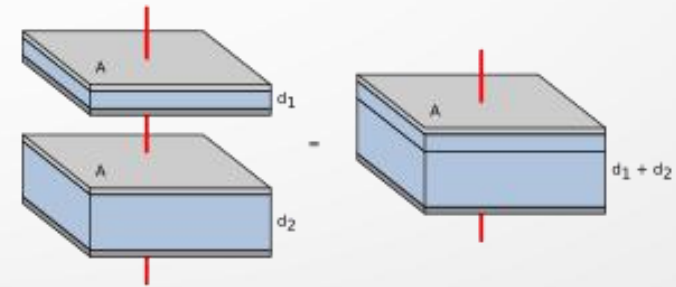
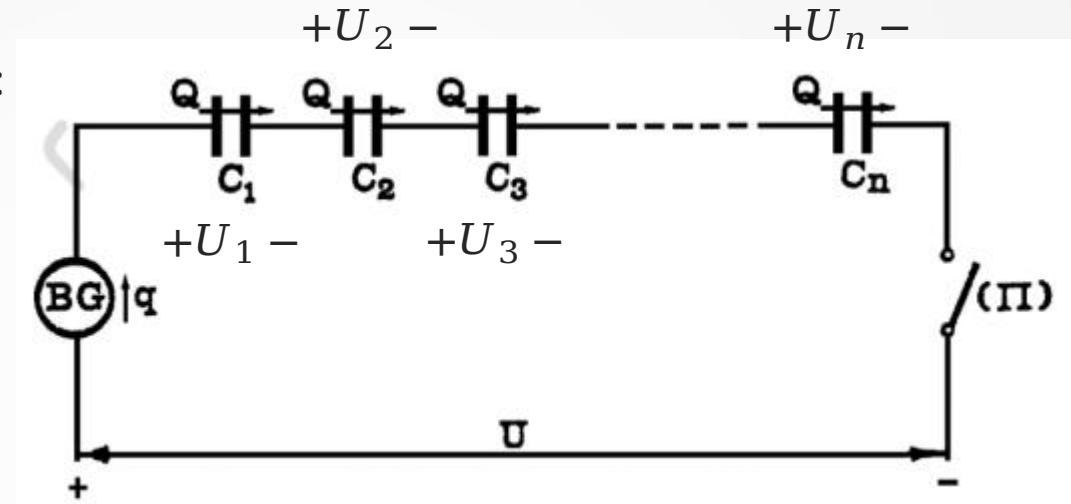
$$U_{(+)(-)} = \int_{(+)}^{(-)} \vec{K} \, d\vec{l}$$

- Elektrčno polje K jednako je nuli (zanemarljivo je malo) u provodnicima (žicama koje povezuju elemente kola na slici), kao i u balističkom galvanometru (BG) i prekidaču, pa je:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \dots + \frac{Q_n}{C_n}$$

$$U = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) Q$$



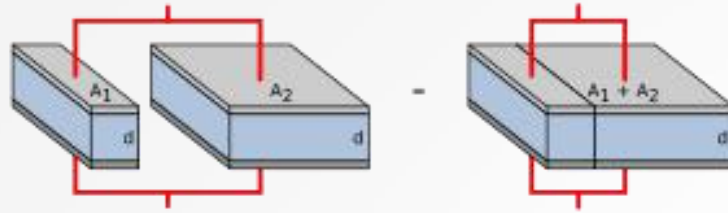
- Za ekvivalentni kondenzator važi:

$$U = \frac{1}{C_e} Q$$

- Ekvivalentna kapacitivnost je:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

1.8.4. Ekvivalentne veze kondenzatora: paralelna



- Naelektrisanje proteklo kroz BG je:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

- Ako su kondenzatori bili neopterećeni pre zatvaranja prekidača, tada je opterećenje ekvivalentnog kondenzatora ($q=Q$, $q_1=Q_1$, ...):

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

$$Q = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_n U_n$$

- Na svim kondenzatorima je isti napon U pa je:

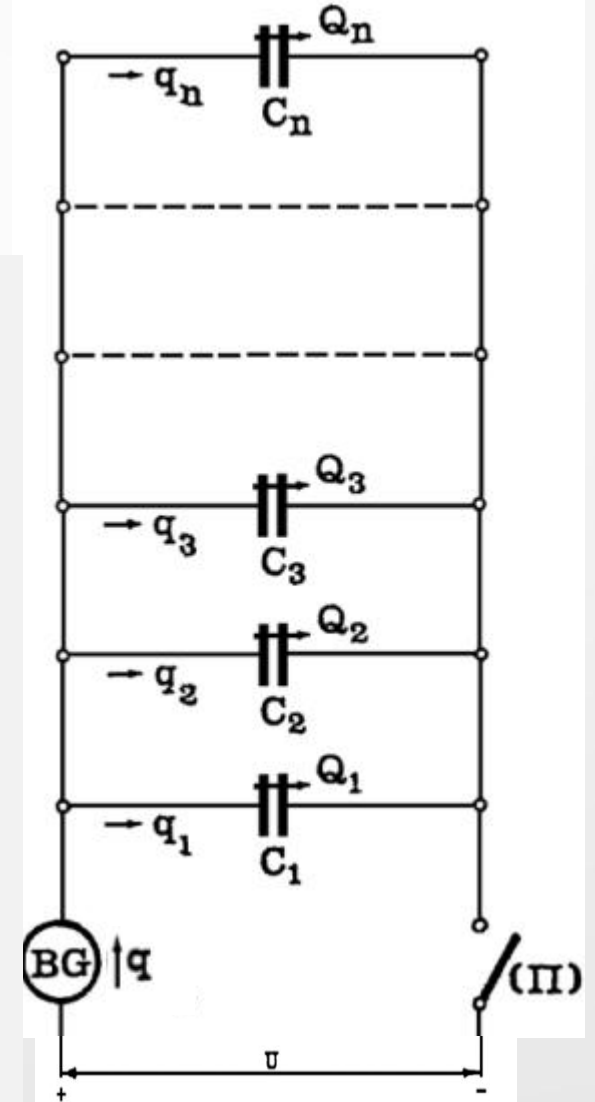
$$Q = (C_1 + C_2 + \dots + C_n)U$$

- Za ekvivalentni kondenzator važi:

$$Q = C_e U$$

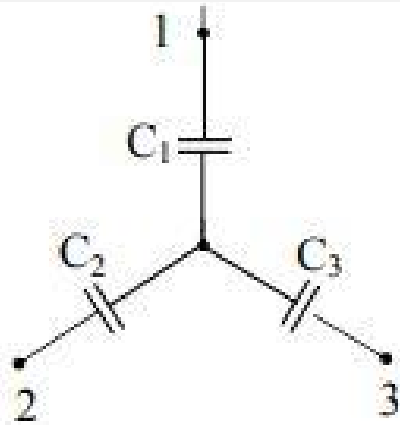
- Ekvivalentna kapacitivnost je:

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



1.8.5. Ekv. veze kondenzatora: trugao i zvezda

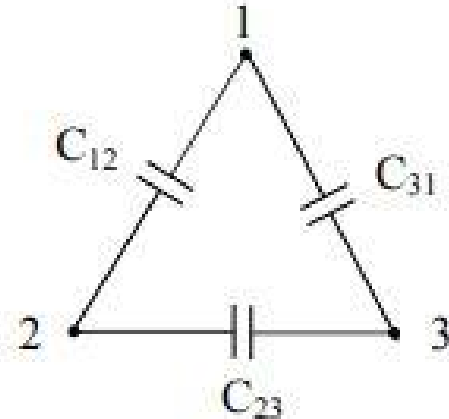
- Ukoliko ne postoje redne i paralelne veze, tada treba potražiti truglove ili zvezde i izvršiti transformaciju zvezde u trougao ili obrnuto!



$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12}C_{31}}{C_{23}}$$

$$C_2 = C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12}C_{23}}{C_{31}}$$

$$C_3 = C_{23} + C_{31} + \frac{C_{23}C_{31}}{C_{12}}$$



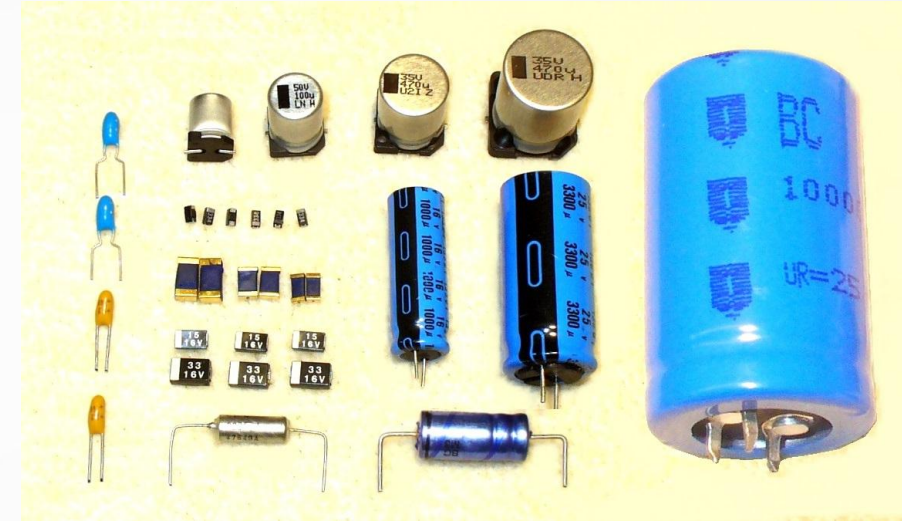
$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

1.8.6. Primena kondenzatora

- U analognoj elektronici za konstrukciju kola za filtriranje komunikacionih signala,
- U digitalnoj elektronici za DRAM memorije, ...
- U energetskej elektronici i energetici za konstrukciju energetskih pretvarača, popravku faktora snage, privremena napajanja (engl. UPS - *Uninterruptible Power Supply*), ...
- Kod električnih vozila gde se zahteva vrlo brzo punjenje i pražnjenje (isporuka velike energije u kratkom intervalu tj. velika snaga) koje ne mogu da obezbede barerije -> superkondenzatori.



Kondenzatori u elektronici



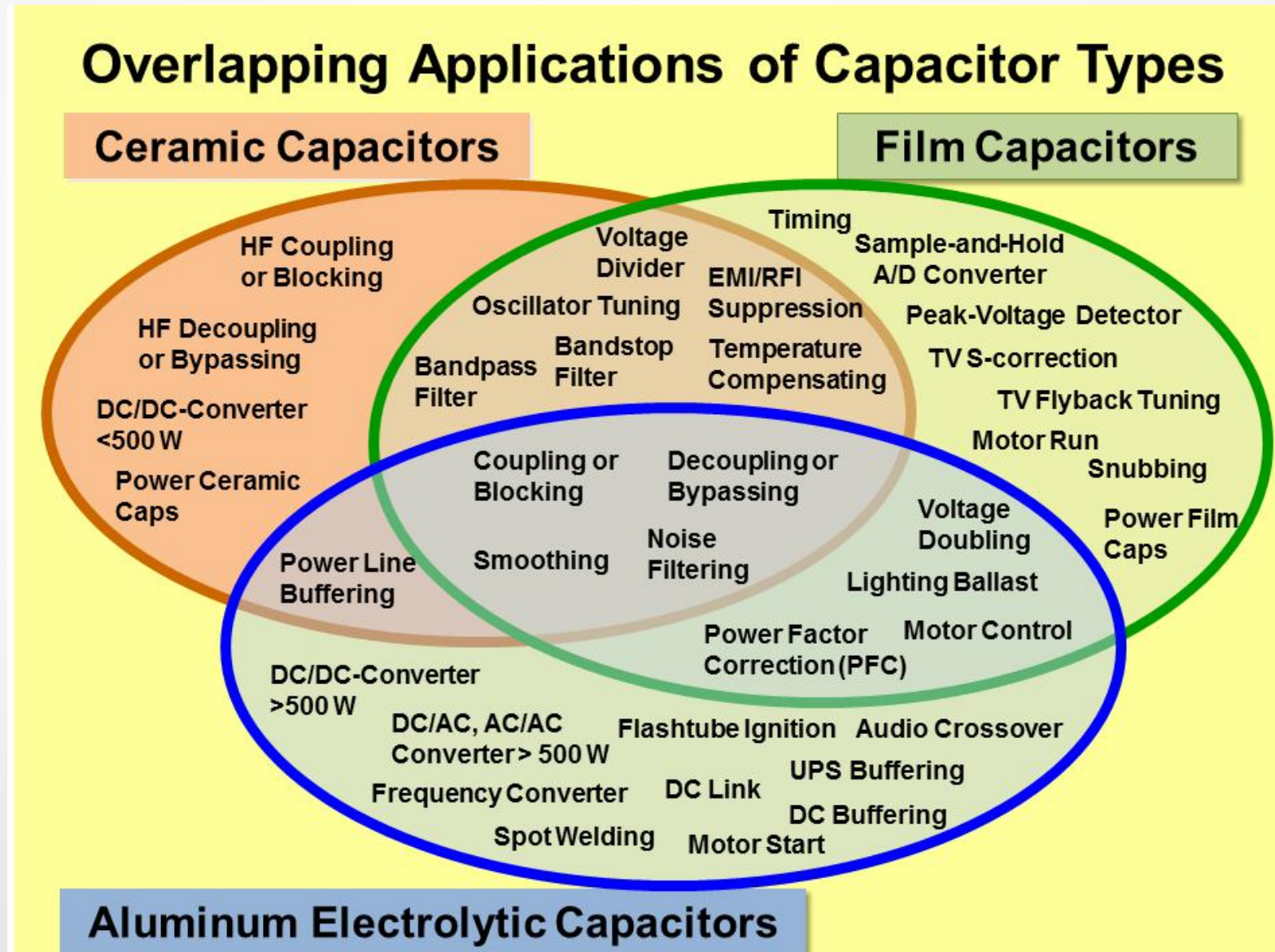
Kondenzator za popravku faktora snage



75MVAR
150 kV
elektrodistri-
butivni
sistem

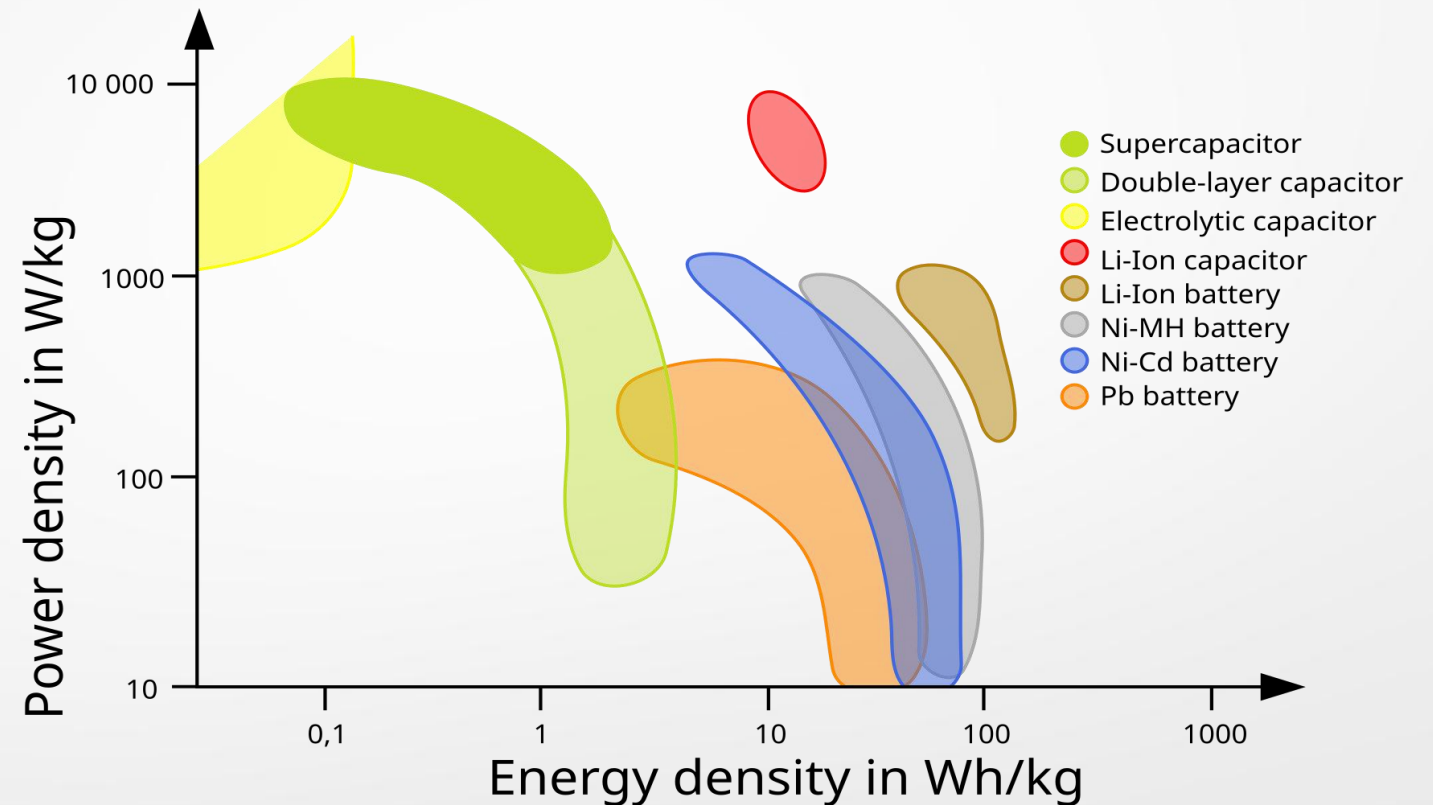
1.8.6. Primena kondenzatora

- Vrste kondenzatora i njihove primene.



1.8.6. Primena kondenzatora

- Baterije mogu da proizvedu više energije za iste dimenzije, kondenzatori mogu brže da je isporuče (veća je snaga $P=dW/dt$).
- Korsite se za vozila za privremeno skladištenje energije pri električnom kočenju i njeno korišćenje pri pokretanju i ubrzanju vozila - rekuperativno (regenerativno) kočenje.



Poređenje kondenzatora i baterija kao izvora energije

1.9. Primeri

- **Primer 1.** Dva tačkasta naelektrisanja $Q_1=Q>0$ i $Q_2=Q$ nalaze se na rastojanju d . Odrediti silu, vektor električnog polja i potencijal na sredini između njih.
- **Primer 2.** Odrediti intezitet električnog polja tačkastog naelektrisanja primenom GZ.
- **Primer 3.** Odrediti napon između dve zadate tačke u električnom polju tačkastog naelektrisanja.
- **Primer 4.** Zadat je vektor homogenog električnog polja u xOy ravni, odrediti napon između dve date tačke A i B.
- **Primer 5.** Dve paralelne ravne ploče, površine S , naelektrisane su istom površinskom gustinom naelektrisanja (σ) ali suprotnog znaka i nalaze se u vazduhu na rastojanju d (pločasti kondenzator). Odrediti vektor električnog polja, napon između ploča, intenzitet sile kojom jedna ploča deluje na drugu i kapacitivnost kondenzatora.
- **Primer 6.** Za zadatu mešovitu (kombinovanu rednu i paralelnu) vezu kondenzatora kao na slici (slika je u rešenju) odrediti ekvivalentni kondenzator.
- **Primer 7.** Dva neopterećena kondenzatora, čije su kapacitivnosti poznate $C_1 = C$ i $C_2 = 2C$, vezani su redno a zatim priključeni na naponski izvor poznate elektromotorne sile E . Odrediti naelektrisanje kondenzatora i napone na njima. Koji kondenzator je uskladištio više energije?
- **Primer 8.** Pločasti kondenzatori C_1 i C_2 istovetnih su geometrijskih karakteristika. Kondenzator C_2 ima dvoslojni dielektrik čije su relativne dielektrične konstante ϵ_{r1} i ϵ_{r2} poznate, a debljine odgovarajućih slojeva su $d_1 = d_2 = 0.5d$. Izračunati odnos kapacitivnosti C_2/C_1 .
- *Potražite na sajtu predmeta još primera...*

