Elektrotehnika

2. Jednosmerne struje

2. Jednosmerne struje

2.1. Pojam električne struje, provodnosti materijala i pretvaranja električne energije u toplotu

2.1.1. Površinska gustina električne struje

2.1.2. Specifična provodnost i otpornost

2.1.3. Jačina struje

2.1.4. Prvi i drugi Kirhofov zakon (I KZ i II KZ)

2.1.5. Naponi i potencijali

2.2. Otpornik u kolu jednosmerne struje

2.3. Generator u kolu jednosmetne struje

2.3.1. Generator i strujno kolo

2.3.2. Idealni naponski i strujni generatori

2.3.3. Realni naponski i strujni generatori

2.3.4. Uslov prenosa maksimalne snage potrošaču

2.4. Metoda rešavanja kola jednosmerne struje pomoću Kirhofovih zakona

2.4.1. Prvi i drugi Kirhofov zakon u kolima jednosmerne struje

2.4.2. Rešavanje kola ponoću Kirhofovih zakona

2. Jednosmerne struje

2.5. Ekvivalentne veze otpornika

- 2.5.1. Redna i paralelna veza otpornika
- 2.5.2. Veze otpornika u trougao u zvezdu
- 2.5.3. Kratak spoj i otvorena veza

2.6. Metoda konturnih struja

- 2.6.1. Šta raditi ako postoji jedan ili više IDEALNIH strujnih generatora?

2.7. Metoda potencijala čvorova (napona između čvorova)

- 2.7.1. Šta raditi ako postoji jedan ili više IDEALNI naponski generator?

2.8. Tevenenova teorema

2.9. Nortonova teorema

2.10. Teorema superpozicije

2.11. Električna kola sa kondenzatorima

- 2.11.1. Elektrostatička kola
- 2.11.2. Kola jednosmernih struja sa kondenzatorima

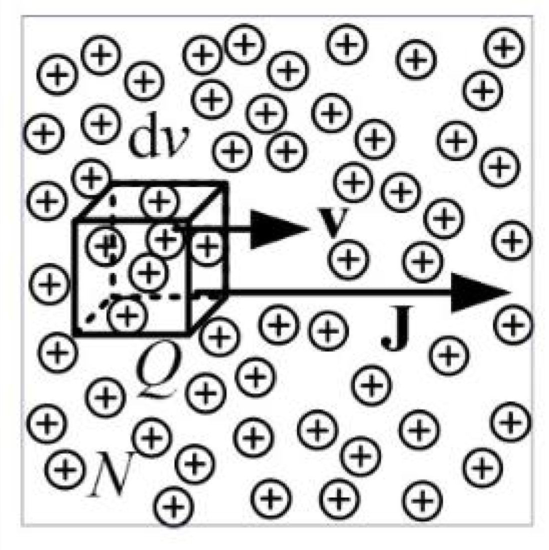
2.12. Primeri

2.1.1. Površinska gustina električne struje

- Električna struja u provodnicima nastaje pod dejstvom električnog polja.
- Električno polje deluje na naelektrisane čestice koje se usmenreno kreću u pravcu polja (pozitivne u smeru vektora polja, a negativne u suprotnom smeru) brzinom ***v***.
- Vektr površinske gustine električne struje se definiše

$$\vec{J} = NQ\vec{v} = NQ\mu\vec{K}$$

- ***Q*** je naelektrisanje slobodne čestice, ***N*** njihova koncentracija u prostoru, a $\boldsymbol{\mu}$ pokretljivost.
- Smer vektora ***J*** je tehnički smer struje, **svejedno je da li se pozitivna čestica kreće u pravcu polja ili negativna u suprotnom pravcu**!!!
- Jedinica je $\mathbf{A/m^2}$ (A - Amper).



2.1.2. Specifična provodnost i otpornost

- Dakle, važi da je

$$\vec{J} = \gamma \vec{K}, \qquad \vec{K} = \rho \vec{J}, \qquad \rho = 1/\gamma$$

- Specifična provodnost $\boldsymbol{\gamma}$ ima jedinicu $\mathbf{S/m}$ (S - Simens).
- Specifična otpornost $\boldsymbol{\rho}$ ima jedinicu $\mathbf{\Omega m}$ (Ω - Om).
- Specifična provodnost srebra je 63 MS/m, a specifična otpornost 16 nΩm.
- Specifična provodnost bakra je 58 MS/m, a specifična otpornost 17 nΩm.
- Savršeni provodnik

$$\gamma \to \infty, \ \rho = 0$$

- Dakle, i ako postoji struja, električno polje je ***K*=0**!
- Savršeni izolator

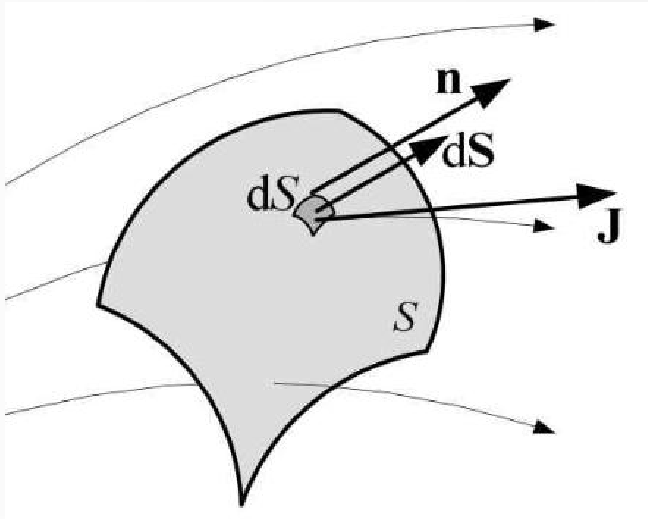
$$\gamma = 0, \ \rho \to \infty$$

- Dakle, i ako postoji električno polje, gustina struje je ***J*=0**!

2.1.3. Jačina struje

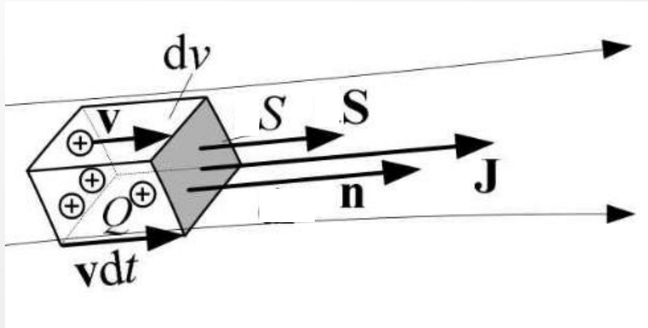
- U praktičnim primenama često nije važna raspodela struje u prostoru, odnosno vektor gustine struje.
- Kada struja protiče kroz provodne žice, najčešće je dovoljno samo posmatrati brzinu proticanja slobodnih naelektrisanja kroz poprečni presek žičanog provodnika.
- U tu svrhu definiše se **jačina struje** (jedinica A - Amper)

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$$



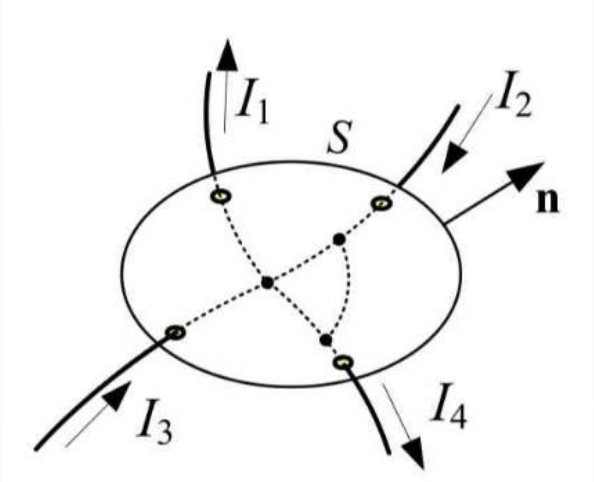
- Ako posmatramo površ *S* normalnu na vektor gustine struje koju čine nosioci naelektrisanja *Q* i koncentracije *N*, a brzina njihovog kretanja je *v*, tada je

$$I = JS = (NQv)S = \frac{QNS(vdt)}{dt} = \frac{QN(Sdl)}{dt} = \frac{QNdV}{dt} = \frac{dq}{dt}$$



- Gde je *dl=vdt* pređeni put naelektrisanja, *dV=Sdl* zapremina, a *dq=QNdV* proteklo naelektrisanje tokom vremena *dt*. Dakle, jačina struje je jednaka brzini protoka naelektrisanja kroz površ *S* u jedinici vremena.

2.1.4. Prvi i drugi Kirhofov zakon



- Ukoliko nema nagomilavanja naelektrisanja fluks vektora gustine struje kroz zatvorenu površ *S* jednak je nuli

$$\oint_S \vec{J} \bullet \vec{dS} = 0$$

- Ukoliko zatvorena površ *S* obuhvata žičane provodnike kao na slici

$$+I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

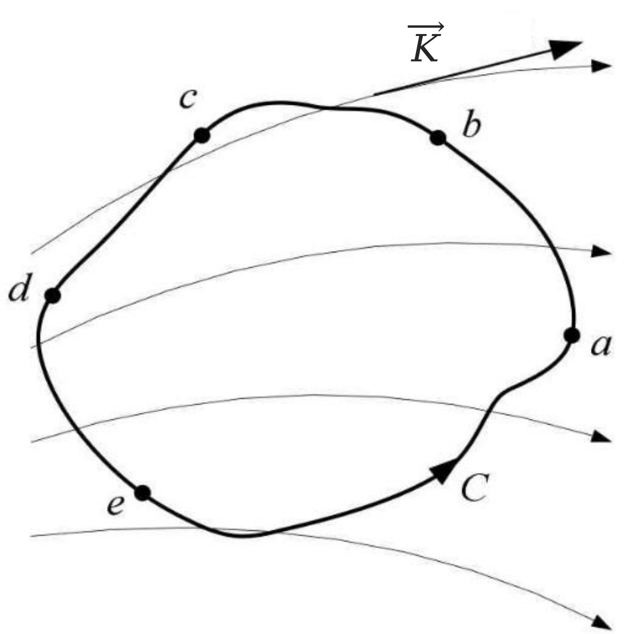
- Ova jednakost se naziva I Kirhofov zakon (I KZ).
- Duž zatvorene konture *C* cirkulacija vektora K je jednaka nuli

$$\oint_C \vec{K} \bullet \vec{dl} = 0$$

- Ako se ovaj integral razloži na delove putanje *C*, dobija se

$$\oint_C \vec{K} \bullet \vec{dl} = \int_a^b \vec{K} \bullet \vec{dl} + \int_b^c \vec{K} \bullet \vec{dl} + \int_c^d \vec{K} \bullet \vec{dl} + \int_d^e \vec{K} \bullet \vec{dl} + \int_e^a \vec{K} \bullet \vec{dl} = 0$$

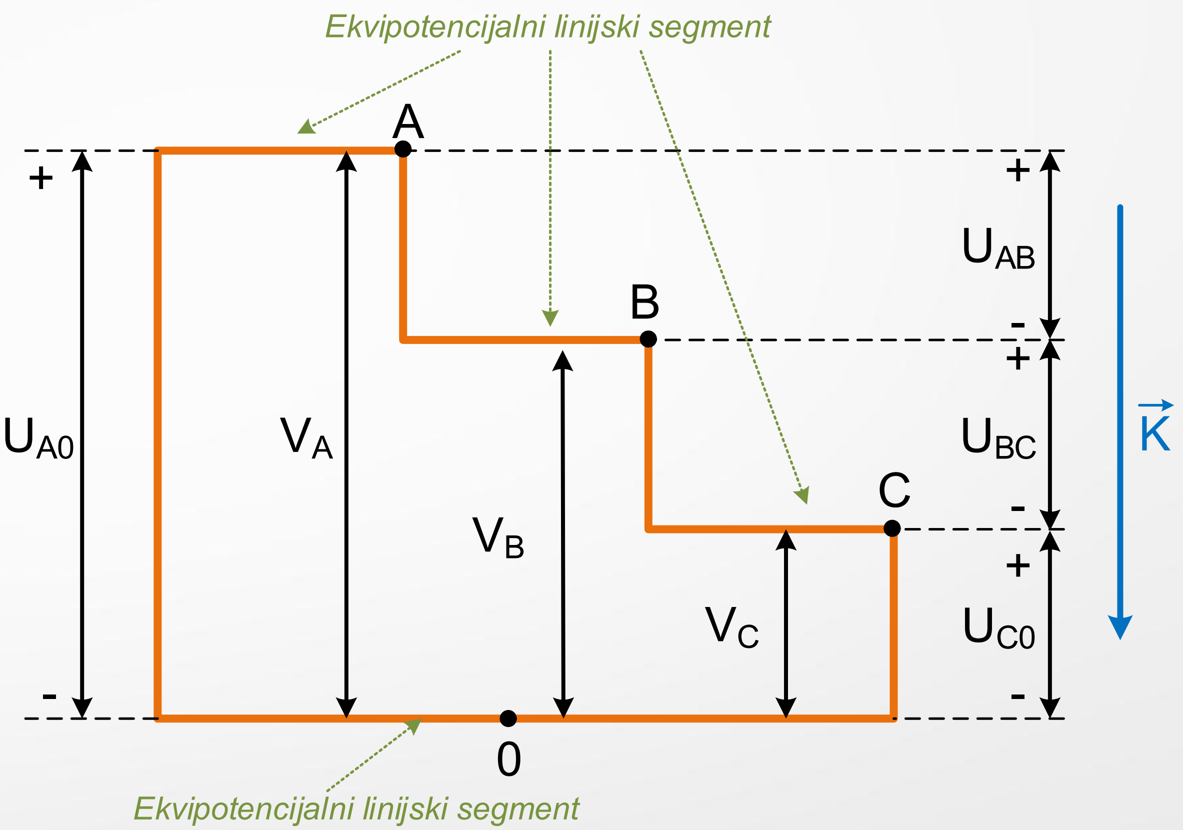
$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{de} + U_{ea} = 0$$



- Ova jednakost se naziva II Kirhofov zakon (II KZ).

2.1.5. Naponi i potencijali

- Dva načina pisanja jednačina po II KZ:
    - Kretanje niz polje (u smeru opadanja napona): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (+) ka (-),
    - Kretanje uz polje (u smeru porasta napona): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (-) ka (+).
- I način (piše se (+) u smeru opadanja napona), ako se kreće u smeru kazaljki na satu dobija se
$$U_{AB} + U_{BC} + U_{C0} - U_{A0} = 0$$
- II način (piše se (+) u smeru porasta napona), ako se kreće u smeru kazaljki na satu dobija se
$$-U_{AB} - U_{BC} - U_{C0} + U_{A0} = 0$$
- Oba načina pisanja daju istu jednačinu: dovoljno je obrnuti smer obilaska konture (suprotan od kretanja kazaljki na satu) ili pomnožiti jednačinu sa (-1).
- Odaberite stil pisanja jednačina po vašoj želji!



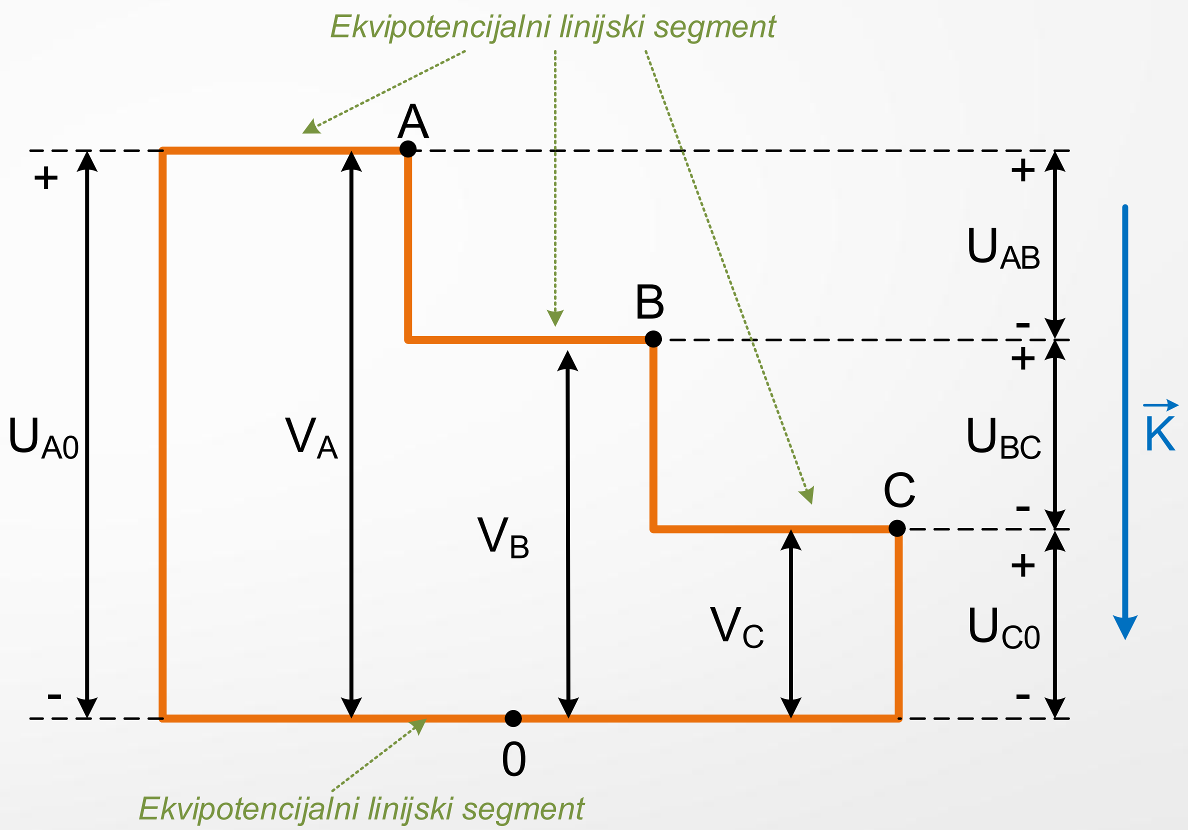
2.1.5. Naponi i potencijali

- Dva načina pisanja jednačina za potencijal:
  - Kretanje u smeru opadanja napona od tačke u kojoj se traži potencijal ka 0 (referentnoj tački): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (+) ka (-),
  - Kretanje u smeru porasta napona od tačke 0 (referentne tačke) ka tački u kojoj se traži potencijal: u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (-) ka (+).
- I način (piše se (+) u smeru opadanja napona): kretanje mora da se vrši od tačke A/B/C prema tački 0 (reefrentna tačka)

  $V_A = U_{AB} + U_{BC} + U_{C0} = U_{A0}$

  $V_B = U_{BC} + U_{C0} = -U_{AB} + U_{A0}$

  $V_C = U_{C0} = -U_{BC} - U_{AB} + U_{A0}$
- II način (piše se (+) u smeru porasta napona): kretanje mora da se vrši od tačke 0 (referentna tačka) prema tački A/B/C. Jednačine su iste i moraju biti iste!!!

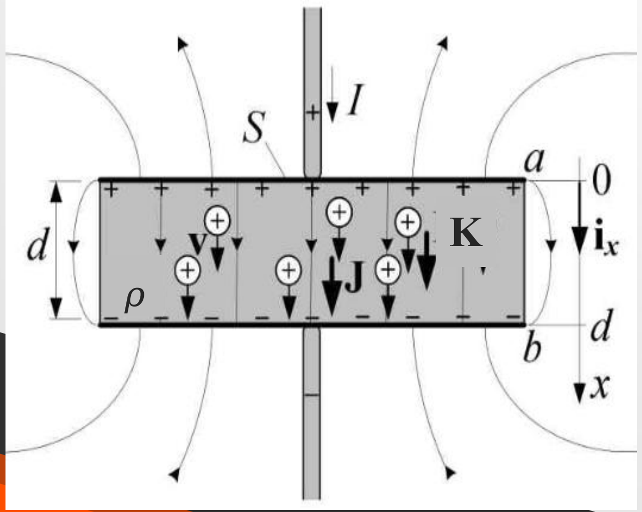


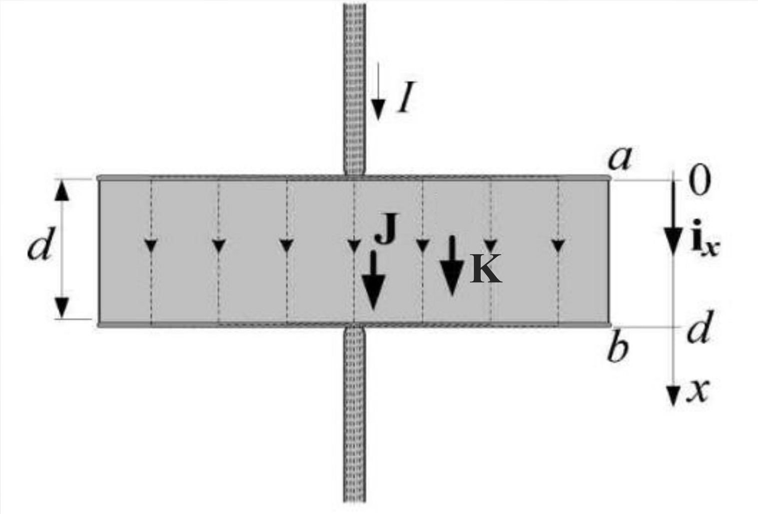
2.2. Otpornik u kolu jednosmerne struje

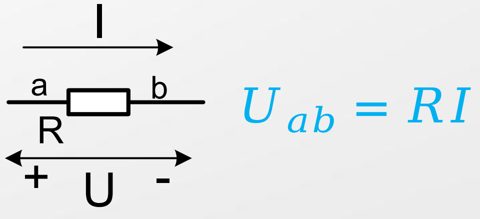
- Napon na krajevima otpornika je

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{K} \bullet \vec{dl} = \int_a^b \rho \vec{J} \bullet \vec{dl} = \rho J \int_a^b dl = \rho J d = \frac{\rho d}{S} I = RI$$

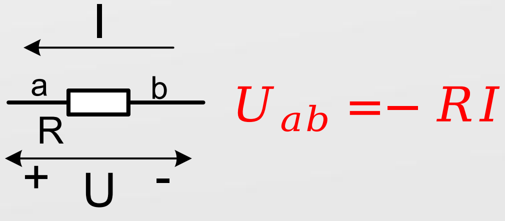
- Gde je $R = \rho \frac{d}{S}$ parametar koji nazivamo otpornost, a jedinica provodnosi je om (Ω).
- Recipročna vrednost otpornosti naziva se provodnost $G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{S}{d}$ a jedinica je simens (S).
- Jednakost $U_{ab} = RI$ naziva se **Omov zakon**.
- Treba voditi računa da je smer struje od priključka a ka b - usaglašeni referentni smer!







usaglašeni referentni smer



neusaglašeni referentni smer

2.2. Otpornik u kolu jednosmerne struje

- Kada se se naelektrisanja kreću kroz otpornik, zbog sudara sa jonima, dolazi do zagrevanja materijala - električni rad se pretvara u toplotu.
- Ovakva pojava da se rad električnih sila pretvara u otporniku u toplotu se naziva **Džulovim gubicima**.
- Može se izvesti da je snaga Džulovih gubitaka $P = UI$, a imajući u vidu Omov zakon dobija se da je

$$P = UI = RI^2 = \frac{I^2}{G} = \frac{U^2}{R} = GU^2$$

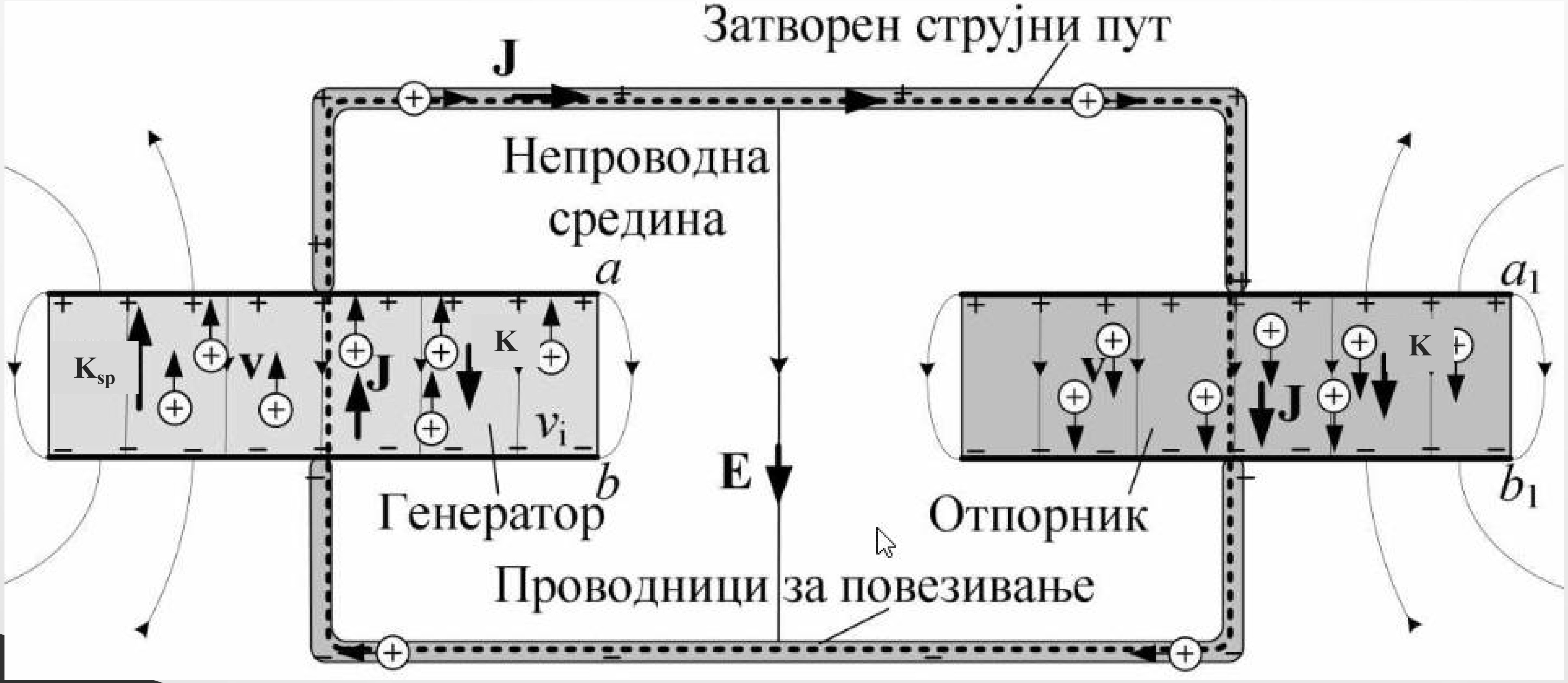
- Snaga predstavlja brzinu vršenja rada tj. brzinu sa kojom se vrši konverzija električne energije u toplotnu

$$P = \frac{dA}{dt}$$

- Jedinica za energiju i rad je J (Džul), a za snagu W (Vat).

2.3.1. Generator i strujno kolo

- Unutar generatora deluje ekvivalentno strano električno polje tj. strana sila koja razdvaja naelektrisanja (a koje potiče od hemijske, mehaničke, svetlosne, toplotne i dr. energije koja se u generatoru konvertuje u električnu).
- Ovom spoljašnjem polju odgovara napon koji se naziva elektromotorna sila i označava sa ***E***.



2.3.1. Generator i strujno kolo

- Šematski prikaz prethodnog strujnog kola je prikazana na slici.
- Napon generatora U_g je jednak elektromotornoj sili E.
- Po II KZ, napon otpornika je takođe jednak elektromotornoj sili

$$U_R = U_g = E$$

- Prema Omovom zakonu struja u kolu je

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{E}{R}$$

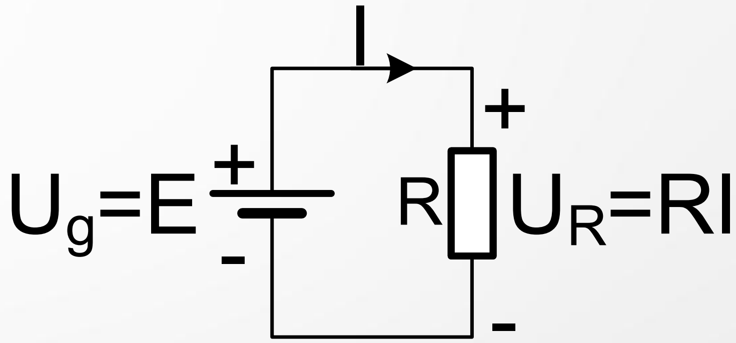
- Snaga Džulovih gubitaka u otporniku

$$P_R = RI^2 = U_R I = EI = \frac{E^2}{R}$$

- Snaga koja se troši u otporniku snabdeva se iz generatora

$$P_g = EI = P_R$$

- Usaglašeni referentni smerovi generatora su suprotni nego za otpornik (struja je usmerena od (-) kraja ka (+) kraju generatora)!

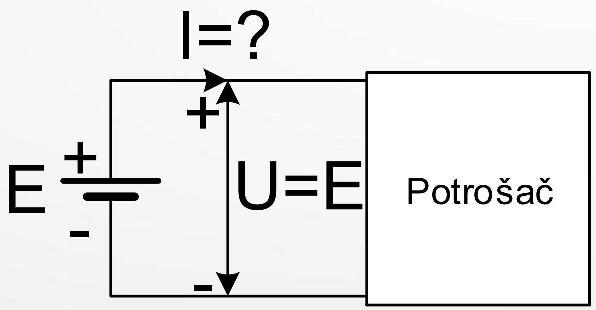


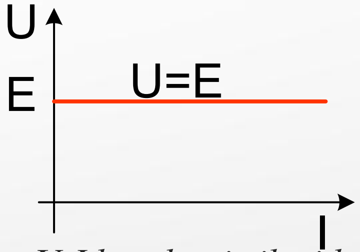
2.3.2. Idealni naponski i strujni generatori

- Analogno naponskom generatoru, kod koga je napon je $U_g = E$ može se uvesti i strujni generator kod koga je

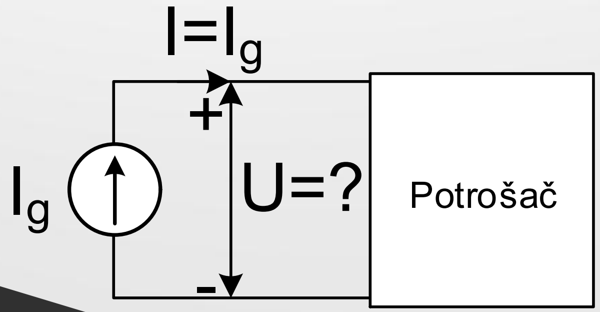
$$I_g = I$$

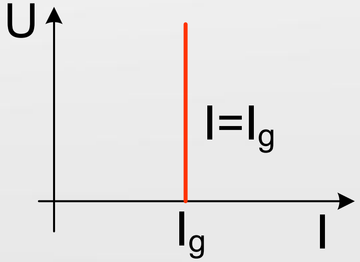
- Prethodno definisani generatori nazivaju se **idealnim (naponskim tj. strujnim) generatorima**.
- Struja idealnog naponskog generatora je određena ostatkom kola koje je na njega povezano.
- Napon idealnog strujnog generatora je određen ostatkom kola koje je na njega povezano.





U-I karakteristika idealnog naponskog generatora

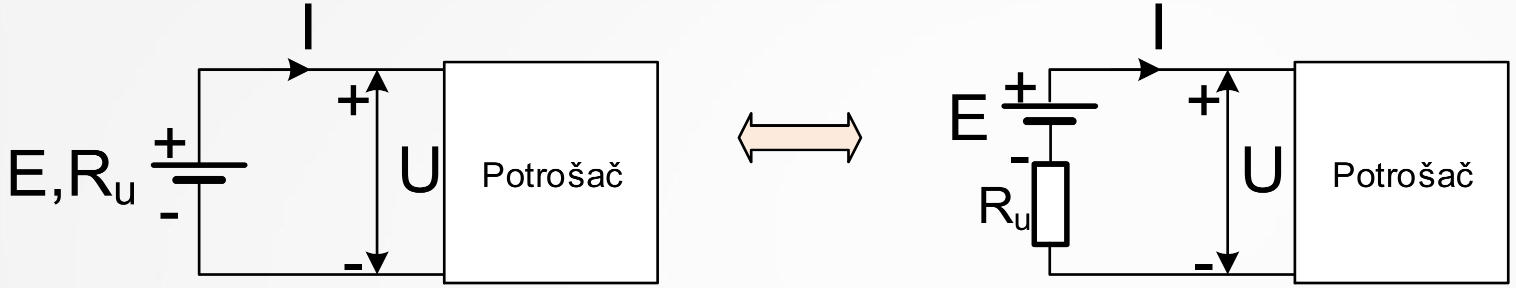




U-I karakteristika idealnog strujnog generatora

2.3.3. Realni naponski i strujni generatori

- Realni naponski generatori imaju Džulove gubitke koji se modeluju redno vezanim "unutrašnjim" otpornikom čija je otpornot R_u.



NAPONSKI GENERATOR JE ODREĐEN SA (E, R_u)

- Napon realnog naponskog generatora opada sa porastom struje kroz potrošač

$$U = E - R_u I$$

- Snaga koju realni naponski generator isporučuje potrošaču umanjena je za Džulove gubitke na unutrašnjem otporniku (obratite pažnju na referentne smerove U i I)

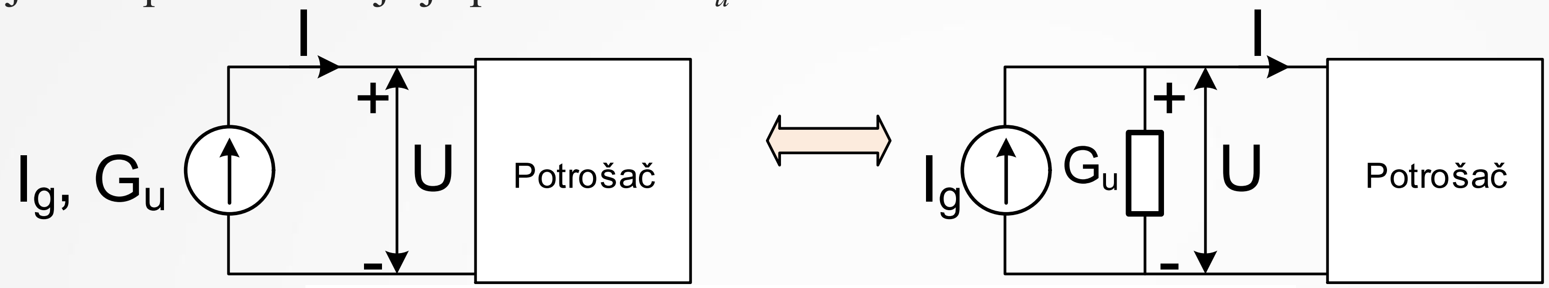
$$P_{generatora\ ka\ potrošaču} = UI = (E - R_u I)I = EI - R_u I^2$$

- Realni naponski generator se može u kolima transformisati u realni strujni, vodeći računa da referentni smerovi ostanu neizmenjeni! Patametri ekvivalentnog strujnog generatora su

$$G_u = \frac{1}{R_u}, \qquad I_g = \frac{E}{R_u}$$

2.3.3. Realni naponski i strujni generatori

- Realni strujni generatori imaju Džulove gubitke koji se modeluju paralelno vezanim "unutrašnjim" otpornikom čija je provodnot G_u.



STRUJNI GENERTOR JE ODREĐEN SA (I_g, G_u)

- Struja realnog strujnog generatora opada sa porastom napona potrošača

$$I = I_g - G_u U$$

- Snaga koju realni strujni generator isporučuje potrošaču umanjena je za Džulove gubitke na unutrašnjem otporniku (obratite pažnju na referentne smerove U i I)

$$P_{generatora\ ka\ potrošaču} = UI = U(I_g - G_u U) = UI_g - G_u U^2$$

- Realni strujni generator se može u kolima transformisati u realni naponski vodeći računa da referentni smerovi ostanu neizmenjeni! Patametri ekvivalentnog naponskog generatora su

$$R_u = \frac{1}{G_u}, \qquad E = \frac{I_g}{G_u}$$

2.3.4. Uslov prenosa maksimalne snage

- Kada se realni generator (E, R_u) poveže na potrošač u vidu otpornika otpornosti R_p, kolika je optimalna vrednost otpornosti tako da se potošaču prenese maksimalna snaga?

$$U_{PN} = R_p I$$
$$U_{PN} = E - U_{R_u} = E - R_u I$$
$$R_p I = E - R_u I$$
$$I = \frac{E}{R_p + R_u}$$

- Snaga opornika tj. potrošača je

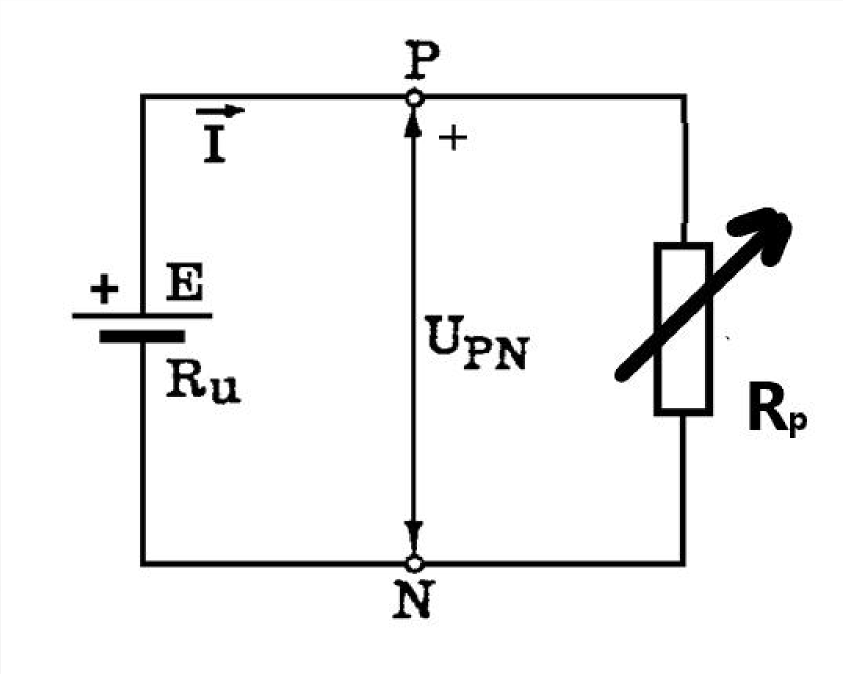
$$P = R_p I^2 = \frac{R_p E^2}{(R_p + R_u)^2}$$

- Maksimum se dobija za

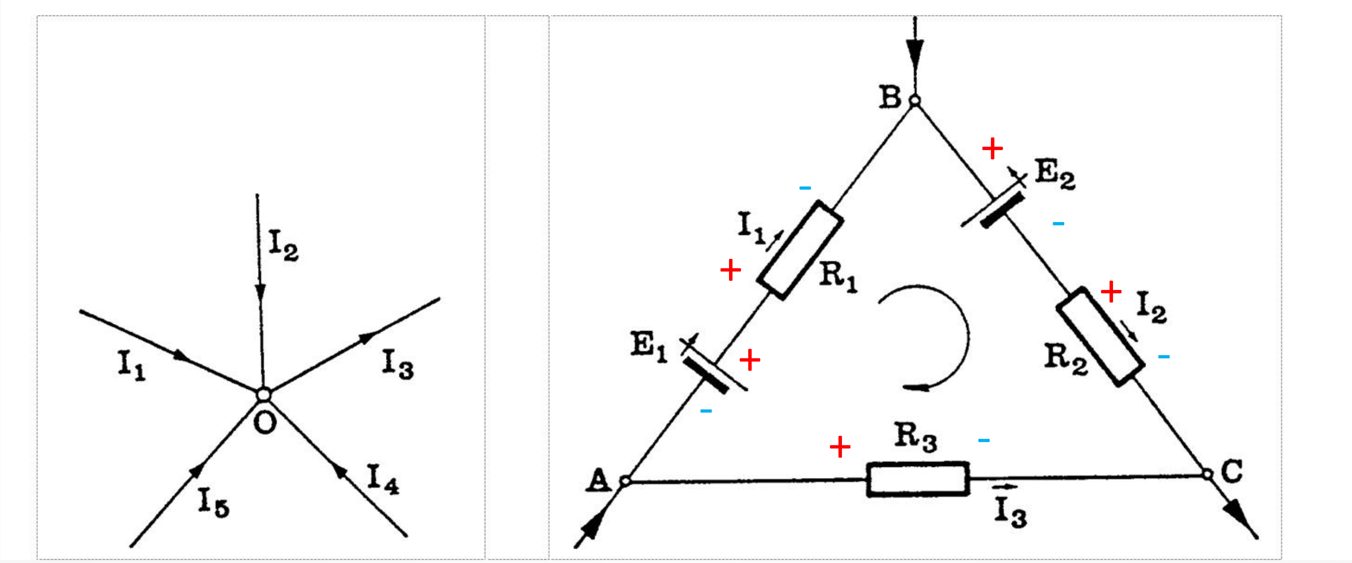
$$\frac{\partial P}{\partial R_p} = 0$$

- Uslov prenosa maksimalne snage je odatle

$$\boldsymbol{R_p = R_u}$$



2.4.1. I i II KZ u kolima jednosmerne struje



$$I\ KZ: \sum_{Čvor\ O} I = 0 \qquad II\ KZ: \sum_{Kontura} U = 0$$

Omov zakon: $U_R = RI$

- I KZ za čvor O: $-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$ -> struje koje izlaze sa (+) a koje ulaze sa (-)

  $I_1 + I_2 + I_4 + I_5 = I_3$ -> suma struja koje ulaze = sumi struja koje izlaze
- II KZ za kont. A-B-C: $-E_1 + R_1 I_1 + E_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$ -> (+) ako napon opada tj. niz struju

  $+E_1 - R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0$ -> (+) ako napon raste tj. uz struju

  $R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_1 - E_2$ -> sređena jednačina (nepoznate levo, poznate desno)

2.4.2. Rešavanje kola ponoću Kirhofovih zakona

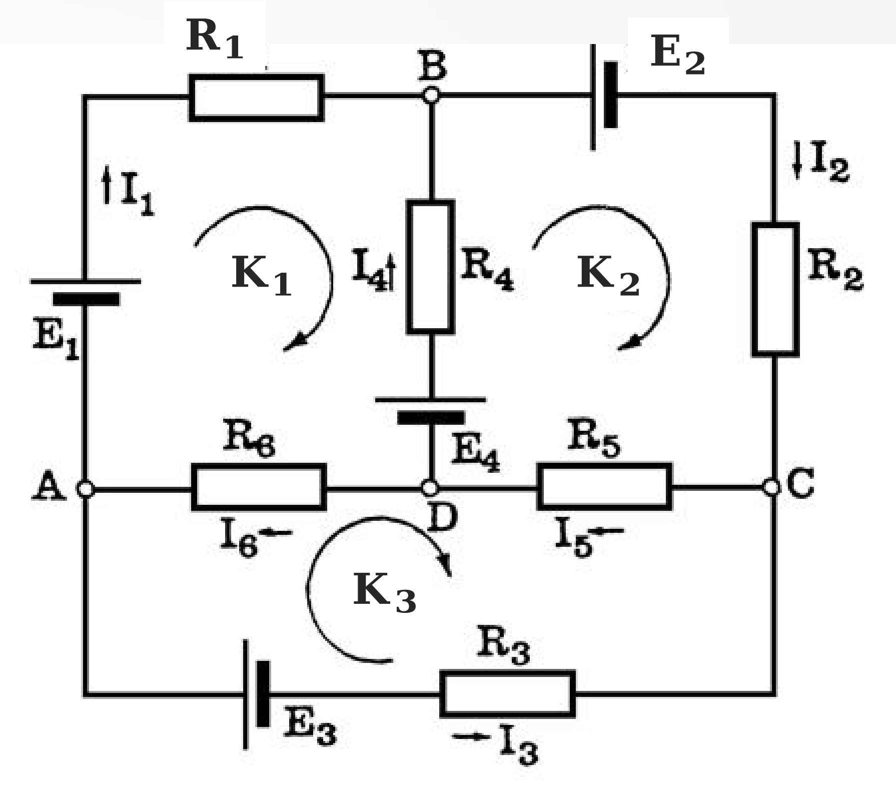
- Rešiti kolo <=> Odrediti struje u svim granama kola.
- Struje se mogu orjentisati proizvoljno: ako se dobije da je struja negativna to samo znači da je realnismer struje zapravo suprotan od pretpostavljenog referentnog smera. Ne trba okretati smer jer to menja sve jednačine!
- Broj čvorova: A, B, C, D -> $n_č = 4$. Jedan čvor je suvišan - referentni čvor. Broj jednačina po I KZ je

$$n_č - 1 = 4 - 1 = 3$$

- Broj grana i nepoznatih struja: A-B, A-C, A-D, B-D, B-C, C-D -> $n_g = 6$. Broj jednačina po II KZ je

$$n_g - (n_č - 1) = 6 - 3 = 3$$

- Broj jednačina po II KZ jednak je broju nezavisnih kontura (nezavisne su ako imaju bar jednu samo svoju granu): K_1, K_2 i K_3.
- ..... *napisati jednačine na času* .....
- Kada su poznate struje lako se određuju naponi na svim otpornicima, kao i snage svih elemenata (generatora i otpornika).

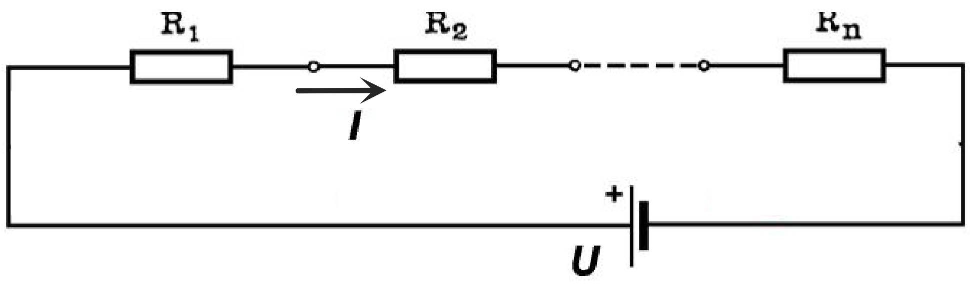


- Šta ako postoji idealni strujni generator???
- Tada je struja u toj grani već poznata tako da je potrebna jedna jednačina manje!!!
- Ne piše se jednačina po II KZ kroz strujni generator (napon na njemu je nepoznat)!!!
- Broj jednačina po II KZ je tada

$$n_g - (n_č - 1) - n_{I_g}$$

2.5.1. Redna i paralelna veza otpornika

- **Redna veza**



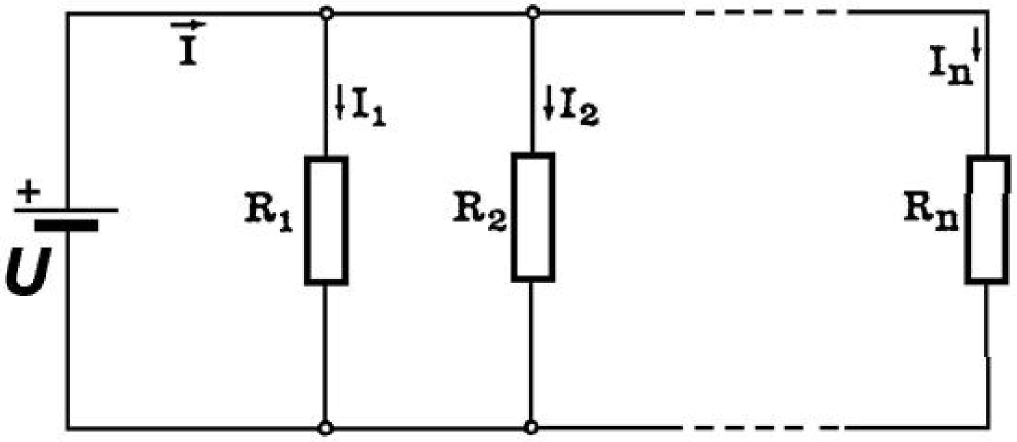
$$U = I(R_1 + R_2 \cdots + R_n)$$

$$R_e = \frac{U}{I}$$

$$R_e = R_1 + R_2 \cdots + R_n = \sum_{i-1}^{n} R_i$$

$$\frac{1}{G_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{G_i}$$

- **Paralelna veza**



$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \cdots + \frac{U}{R_n}$$

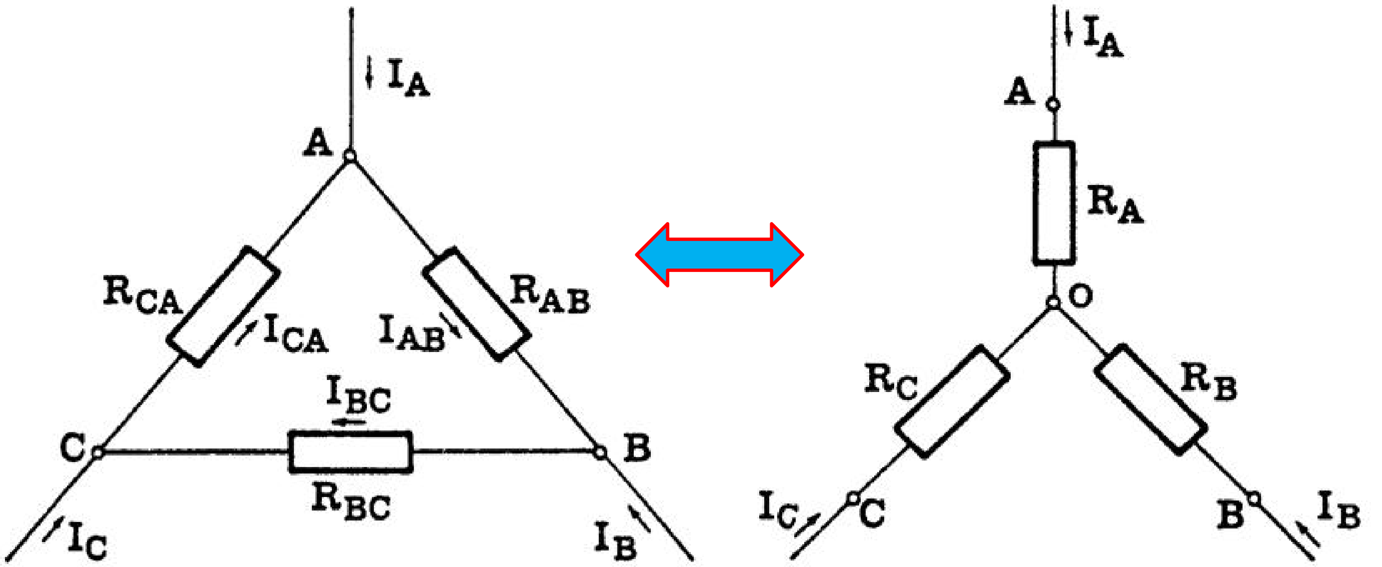
$$\frac{1}{R_e} = \frac{I}{U}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$G_e = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

2.5.2. Veze otpornika u trougao u zvezdu

- Ako ne postoje ni redne ni paralelne veze, onda treba potražiti zvezdu ili trougao...



$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B}$$

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

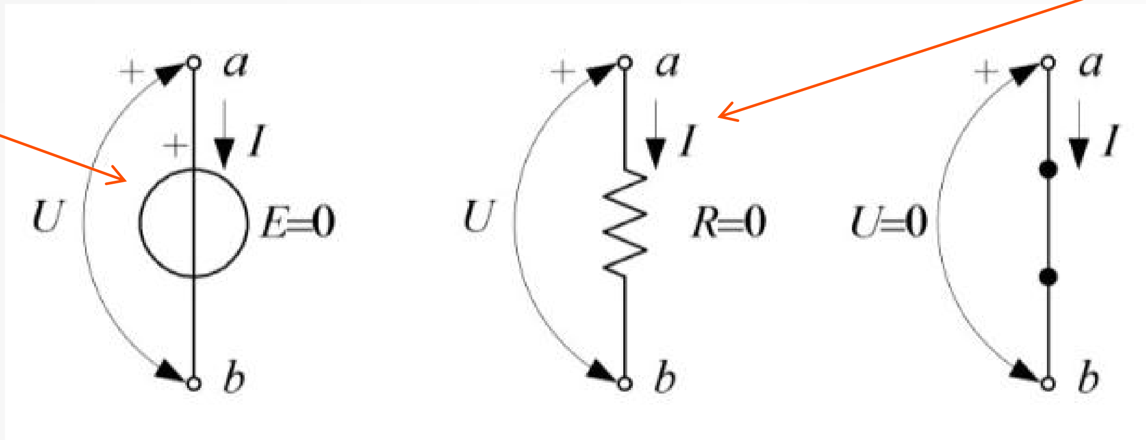
$$R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

2.5.3. Kratak spoj i otvorena veza

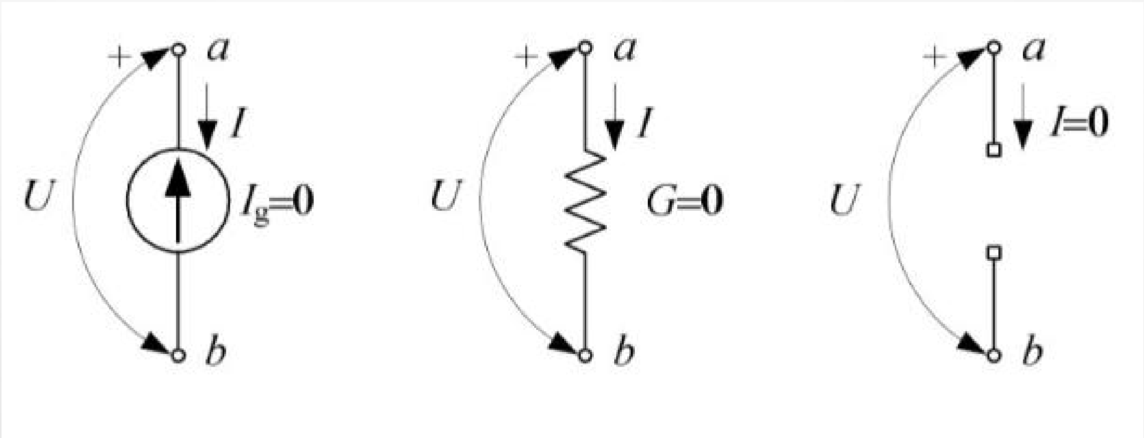
- Kratk spoj je ekvivalentan idealnom provodnom elementu tj. otporniku $R = 0$, $G \to \infty$ ili idealnom naponskom generatoru elektromotorne sile $E = 0$.

Oznaka za idealni naponski generator u knjizi sa ETF-a

Oznaka za otpornik u knjizi sa ETF-a

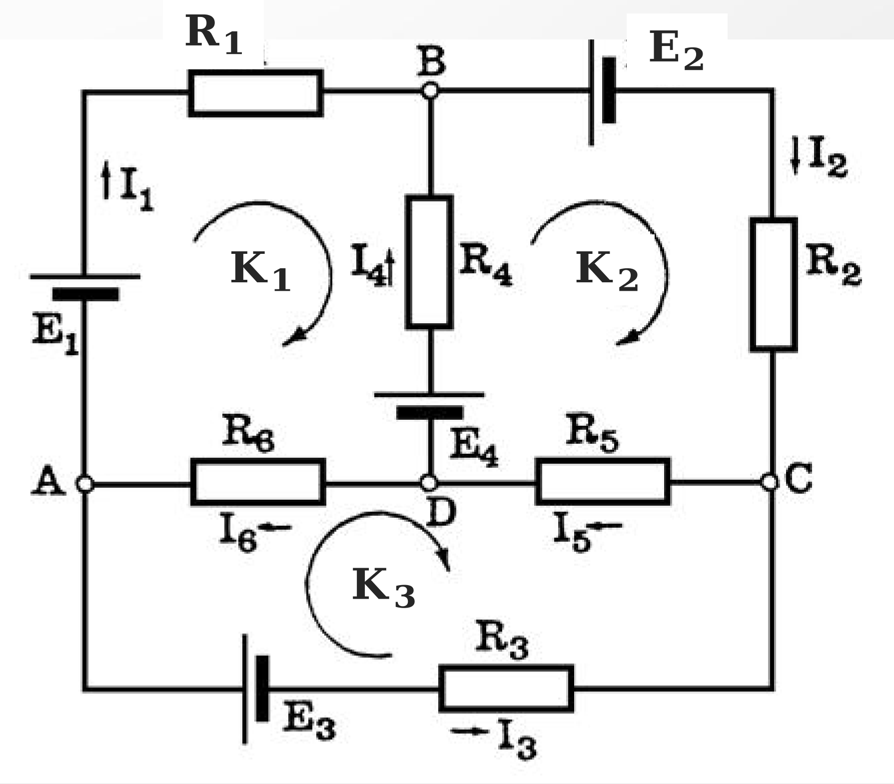


- Otvorena veza je ekvivalentna idealnom izolujućem elementu tj. otporniku $G = 0$, $R \to \infty$ ili idealnom strujnom generatoru struje $I_g = 0$.



2.6. Metoda konturnih struja

- Broj jednačina u sistemu n_g se može redukovati tako što se izbegne pisanje jednačina po I KZ čime se dobija **metoda konturnih struja (MKS)**.
- Pisanje jednačina po I KZ se može izbeći ako su te jednačine "automatski zadovoljene" što se postiže uvođenjem koncepta zamišljenih konturnih struja koje "teku" po konturama po kojima se pišu jednačine za II KZ. Pošto kroz svaki čvor kroz koji prolazi, konturna struja i ulazi i izlazi iz čvora I KZ je autoamtski zadovoljen i ove jednačine se ne pišu.
- Dakle, potrebno je napisati samo jednačine po II KZ po odabranim konturama koristeći konturne struje a to je sistem sa $n_g - (n_č - 1)$ jednačina.
- Pri tome se koriste oznake za konturne struje u skladu sa numerisanjem kontura. Za datu sliku postoje 3 konture i 3 konturne struje I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}. Smerovi ovih struja su isti kao i smerovi obilaska kontura K_1, K_2, K_3.
- Realne struje u granama se dobijaju kao algebarski zbir konturnih struja pri čmu se struja uzima sa znakom (+) ako se poklapa sa smerom konturne struje, a sa znakom (-) ako je smer suprotan: $I_1 = I_{k1}$, $I_2 = I_{k2}$, $I_3 = -I_{k3}$, $I_4 = -I_{k1} + I_{k2}$, $I_5 = I_{k2} - I_{k3}$, $I_6 = I_{k1} - I_{k3}$.



2.6. Metoda konturnih struja

- Jednačine po MKS za kolo **bez idealnih strujnih generatora** se u opštem obliku mogu zapisati kao

$$\begin{aligned}
&R_{11} I_{k1} + R_{12} I_{k2} + \ldots + R_{1n_k} I_{kn_k} = E_{k1} \\
&R_{21} I_{k1} + R_{22} I_{k2} + \ldots + R_{2n_k} I_{kn_k} = E_{k2} \\
&\vdots \\
&R_{n_k 1} I_{k1} + R_{n_k 2} I_{k2} + \ldots + R_{n_k n_k} I_{kn_k} = E_{kn_k}
\end{aligned}$$

- Gde je n_k broj kontura $n_k = n_g - (n_č - 1)$.
- R_{ii}, $i=1,2,\ldots,n_k$ su sopsvene otpornosti konture i jednake su zbiru svih otpornosti u ***i***-toj konturi (uzete uvek sa predznakom (+)).
- R_{ij}, $i,j=1,2,\ldots,n_k$, $i \neq j$ su međusobne otpornosti konture ***i*** i konture ***j*** i jednake su algebarskom zbiru svih otpornosti koje zu zajedničke za obe konture. Otpornosti se uzimaju sa predznakom (+) ako se smerovi obilaska kontura u tim zajedničkim granama poklapaju. Ako se smerovi obilaska kontura ***i*** i ***j*** ne poklapaju, uzima se predznak (-). Očigledno je $R_{ji}=R_{ij}$.
- E_{ki}, $i=1,2,\ldots,n_k$ je algebarski zbir elektromotornih sila idealnih naponskih generatora u konturi ***i***. Ako se pri obilasku u smeru konture smer poklapa sa smerom dejstva elektromotorne sile (u smeru porasta napona tj. od (-) ka (+) kraju generatora) uzima se predznak (+), a predznak (-) ako se smer obilaska konture i dejstvo elektromotorne sile ne poklapaju (u smeru opadanja napona tj. od (+) ka (-) kraju generatora)).

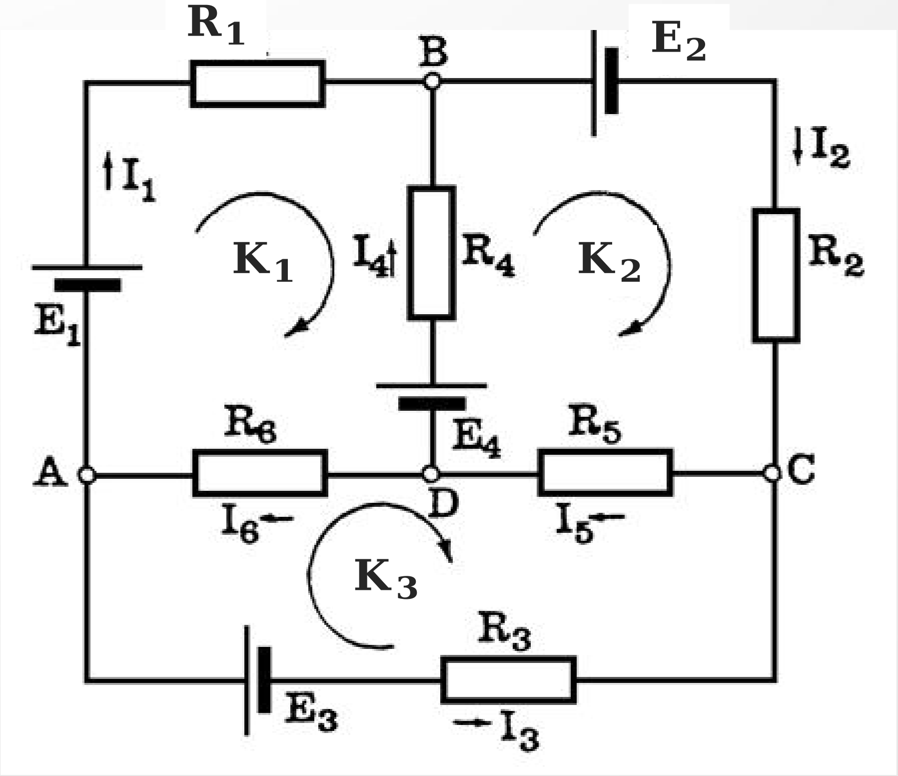
2.6. Metoda konturnih struja

- Za kolo sa slike potrebno je napisati $n_k = n_g - (n_č - 1) = 3$ jednačine.
- $R_{11} I_{k1} + R_{12} I_{k2} + R_{13} I_{k1} = E_{k1}$
- $R_{21} I_{k1} + R_{22} I_{k2} + R_{23} I_{k3} = E_{k2}$
- $R_{31} I_{k1} + R_{32} I_{k2} + R_{33} I_{k3} = E_{k3}$
- Sopstvene otpornosti su $R_{11} = R_1 + R_4 + R_6,\ \ R_{22} = R_2 + R_4 + R_5,\ \ R_{33} = R_3 + R_5 + R_6.$
- Međusobne otpornosti su $R_{12} = R_{21} =- R_4,\ R_{13} = R_{31} =- R_6,\ R_{23} = R_{32} =- R_5.$
- Elektromotorne sile

  $E_{k1} = E_1 - E_4,\ E_{k2} =- E_2 + E_4,\ E_{k3} = E_3.$
- Realne struje u granama su

  $I_1 = I_{k1},\ \ I_2 = I_{k2},\ \ I_3 =- I_{k3},\ I_4 =- I_{k1} + I_{k2},$

  $I_5 = I_{k2} - I_{k3},\ \ \ I_6 = I_{k1} - I_{k3}.$



2.6.1. Šta raditi ako postoji jedan ili više IDEALNIH strujnih generatora?

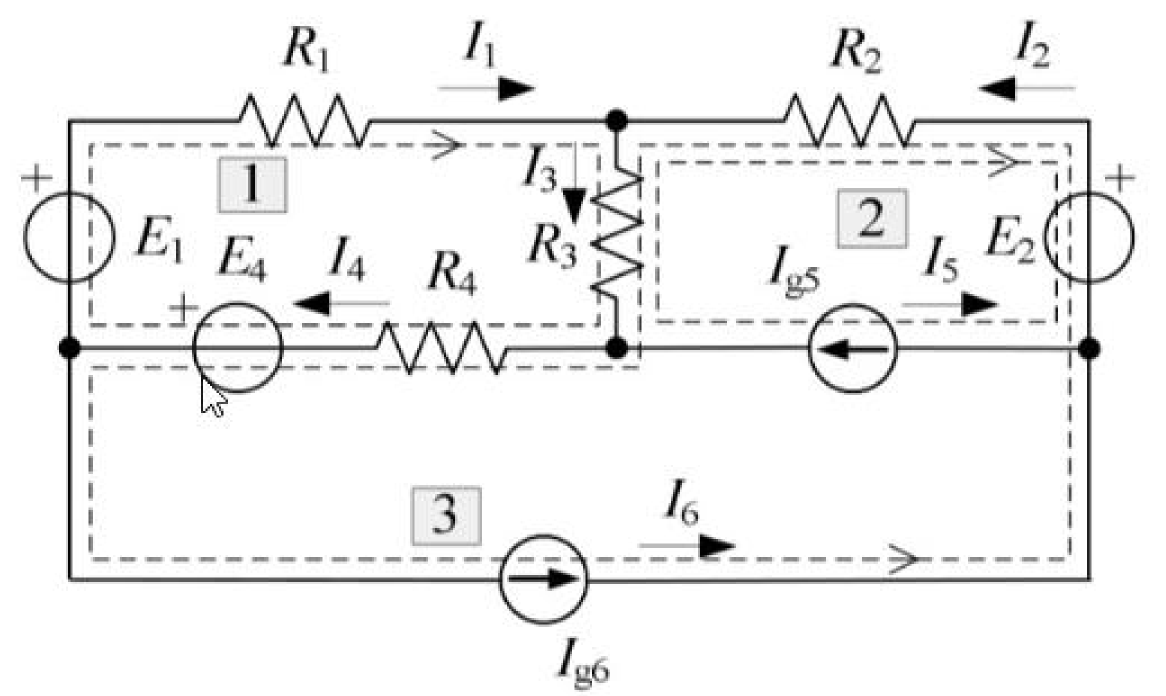
- **Za kolo sa n_{Ig} idealnih strujnih generatora** treba napisati $n_k - n_{I_g} = n_g - (n_č - 1) - n_{I_g}$ jednačina.
- Preostalih n_{Ig} jednačina su trivijalne jednačine oblika

$$I_{ki} = I_{gi}\ , \qquad i = 1,2,\ldots,n_{I_g}$$

- Međutim, da bi se ovakve jednačine mogle lako napisati **neophodno je provući jednu i samo jednu konturu kroz jedan idealni strujni generator**!!!
- Tada je i struja u grani sa strujnim generatorom i odgovarajuća konturna struja jednaka upravo struji tog strujnog generatora.
- Ako se greškom provuče još neka kontura (tj. konturna struja) kroz isti strujni generator tada je struja strujnog generatora jednaka zbiru tih konturnih struja i rešavanje kola se nepotrebno komplikuje!!!
- Dakle, prvo je potrebno odabrati n_{Ig} kontura od kojih svaka prolazi samo kroz jedan strujni generator i za njih napisati jednačine oblika $I_{ki} = I_{gi}$.
- A zatim napisati preostalih n_k - n_{Ig} jednačina po MKS **birajući konture koje nikako ne smeju da prođu ni kroz jedan strujni generator**!
- Dimenzija sistema jednačina po MKS je i dalje $n_k = n_g - (n_č - 1)$ i postoji isto toliko konturnih struja, samo se ne pišu sve jednačine sistema već se umesto njih pišu jednačine oblika $I_{ki} = I_{gi}$. Ali odgovarajuće međusobne otpornosti sa konturama sa strujnim generatorima i dalje postoje!

2.6.1. Šta raditi ako postoji jedan ili više IDEALNIH strujnih generatora?

- Za kolo sa dva idealna strujna generatora i tri nezavisne konture treba napisati ukupno tri jednačine, dve trivijalne jednačine kroz idealne strujene generatore i jedna po MKS.
- Kontura K_1 sa slike je odabrana tako da ne prolazi ni kroz I_{g5} ni kroz I_{g6} i po toj konturi se može pisati jednačina po MKS: $R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} + R_{13}I_{k3} = E_1$.
- Kontura K_2 prolazi kroz idealni strujni gerator I_{g5} u smeru istom kao i struja generatora pa je: $I_{k2} = I_{g5}$.
- Kontura K_3 prolazi kroz idealni strujni gerator I_{g6} u smeru istom kao i struja generatora pa je: $I_{k3} = I_{g6}$.



- Potpuni sistem jednačina po MKS je

$$1:\ (R_1 + R_3 + R_4)I_{k1} - R_3 I_{k2} + (R_3 + R_4)I_{k3} = E_1 + E_4$$

$$2:\ I_{k2} = I_{g5}$$

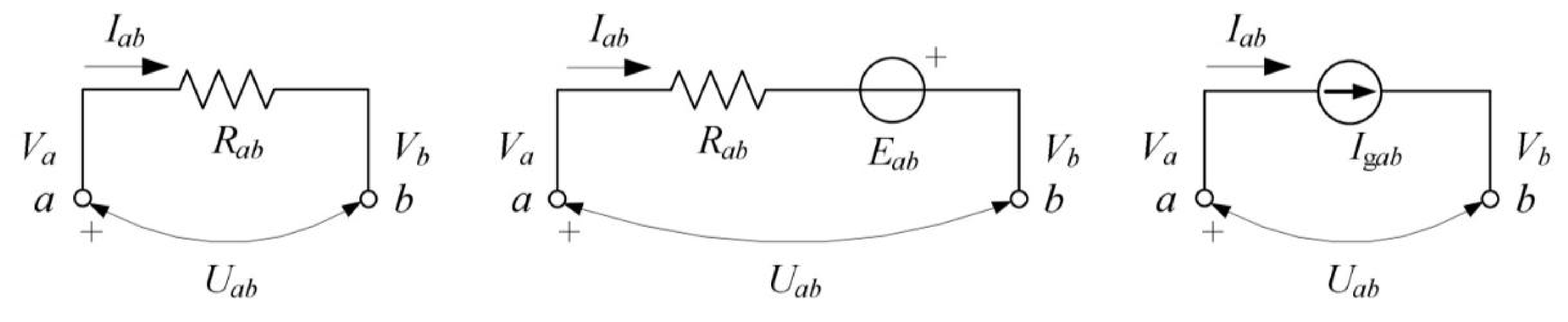
$$3:\ I_{k3} = I_{g6}$$

- Sistem se rešava po jedinoj nepoznatoj struji I_{k1}.
- Dalje su struje u granama

$I_1 = I_{k1}$, $I_2 = I_{g6} - I_{g5}$,
$I_3 = I_{k1} - I_{g5} + I_{g6}$,
$I_4 = I_{k1} + I_{g6}$, $I_5 = -I_{g5}$, $I_6 = I_{g6}$.

2.7. Metoda potencijala čvorova

- Broj jednačina u sistemu n_g se može redukovati i tako što se izbegne pisanje jednačina po II KZ čime se dobija **metoda napona između čvorova (MNČ)** ili **metoda potencijala čvorova (MPČ)**.
- Pisanje jednačina po II KZ se može izbeći ako su te jednačine "automatski zadovoljene" što se postiže pisanjem sistema jednačina po potencijalima čvorova kola.
- U kolu postoji $n_č - 1$ nezavisnih potencijala čvorova, te se može napisati isto toliko jednačina po I KZ.
- Ako se na neki način sve struje u jednačinama po I KZ izraze preko potencijala čvorova, dobio bi se potpuni sistem jednačina dimenzije $n_č - 1$. Kako to uraditi?



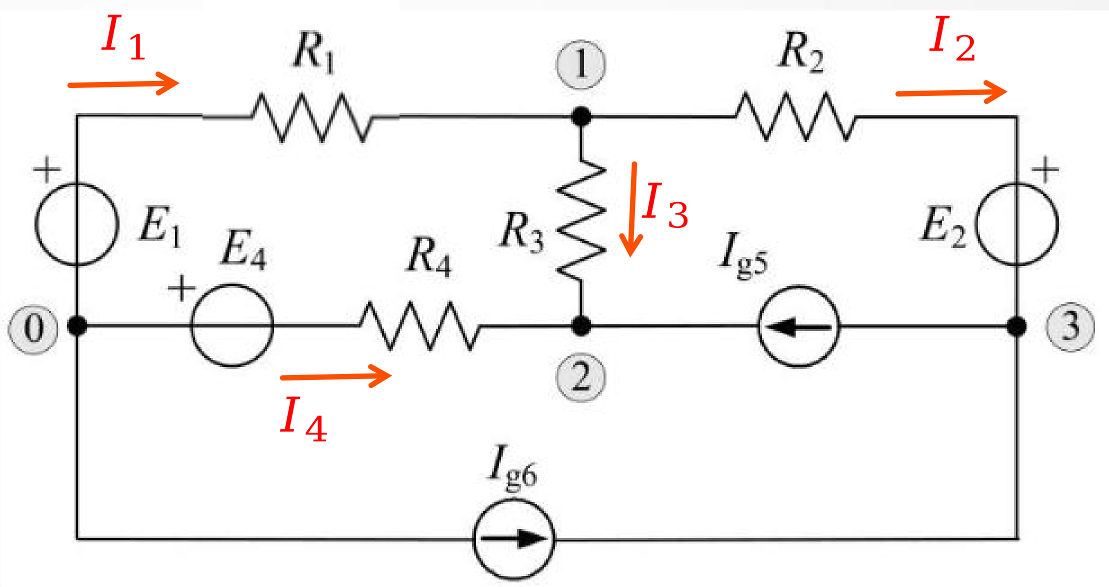
$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{R_{ab}} = \frac{V_a - V_b}{R_{ab}}$$

$$I_{ab} = \frac{U_{ab} + E_{ab}}{R_{ab}} = \frac{V_a - V_b + E_{ab}}{R_{ab}}$$

$$I_{ab} = I_{gab}$$

2.7. Metoda potencijala čvorova

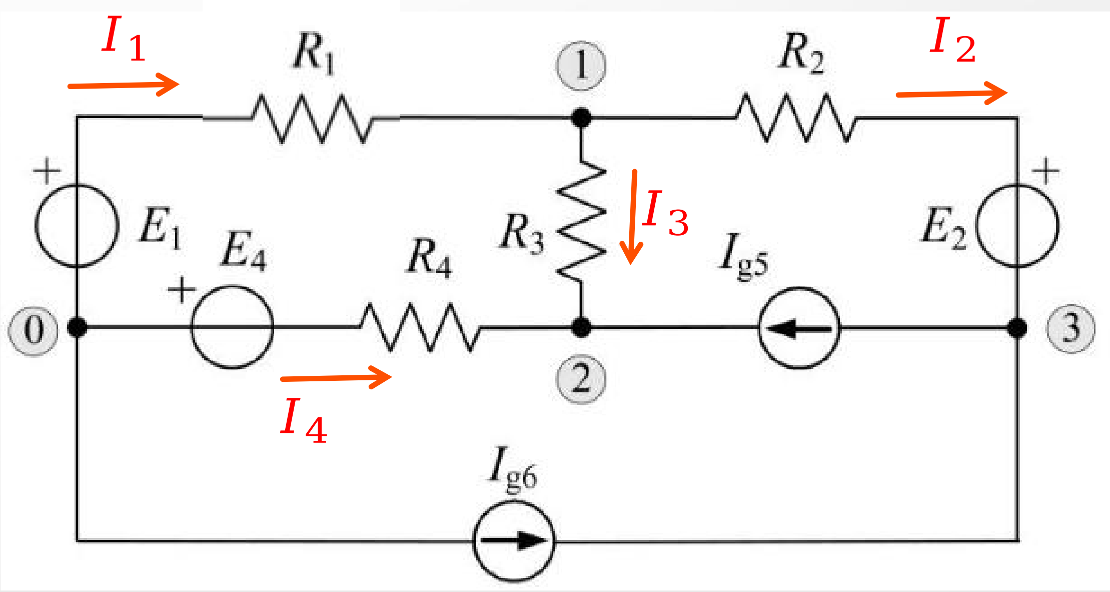
- Za kolo na slici, **bez idealnih naposnskih generatora**, po I KZ se mogu napisati tri jednačine za čvorovce 1, 2 i 3, gde je čvor 0 izabran kao referentni i za njega se ne piše jednačina po I KZ.
- 1: $I_1 = I_2 + I_3$
- 2: $I_3 + I_4 + I_{g5} = 0$
- 3: $I_2 + I_{g6} = I_{g5}$
- Po ugledu na jednačine sa prethodnog slajda
- $I_1 = (E_1 - V_1)/R_1$
- $I_2 = (V_1 - V_3 - E_2)/R_2$
- $I_3 = (V_1 - V_2)/R_3$
- $I_4 = (-E_4 - V_2)/R_4$
- Zamenom u jednačine napisane po I KZ, dobija se
- 1: $(E_1 - V_1)/R_1 = (V_1 - V_3 - E_2)/R_2 + (V_1 - V_2)/R_3$
- 2: $(V_1 - V_2)/R_3 + (-E_4 - V_2)/R_4 + I_{g5} = 0$
- 3: $(V_1 - V_3 - E_2)/R_2 + I_{g6} = I_{g5}$



2.7. Metoda potencijala čvorova

- Sređivanjem se dobija
- 1: $+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_1-\frac{1}{R_3}V_2-\frac{1}{R_2}V_3=+\frac{1}{R_1}E_1+\frac{1}{R_2}E_2$
- 2: $-\frac{1}{R_3}V_1+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)V_2-0\bullet V_3=-\frac{1}{R_4}E_4+I_{g5}$
- 3: $-\frac{1}{R_2}V_1-0\bullet V_2+\frac{1}{R_2}V_3=-\frac{1}{R_2}E_2+I_{g6}-I_{g5}$

- U jednačini za čvor 1, uz V_1 je suma provodnosti grana koje se stiču u čvoru 1 sa znakom (+), uz V_2 je suma provodnosti grana između čvorova 1 i 2 sa znakom (-), a uz V_3 je suma provodnosti grana između čvorova 1 i 3 sa znakom (-). Na desnoj strani su sume struja ekvivalentnih strujnih generatora grana koje se stiču u čvoru 1 sa znakom (+) ako ulaze u čvor, a znakom (-) ako struje izlaze iz čvora.
- Isto je i za ostale jednačine...



2.7. Metoda potencijala čvorova

- Za kolo na slici, **bez idealnih naposnskih generatora**, po I KZ se mogu napisati tri jednačine za čvorovce 1, 2 i 3, gde je čvor 0 izabran kao referentni i za njega se ne piše jednačina po I KZ.

$$1:\ -I_1 - I_2 + I_3 = 0\,,$$

$$2:\ I_1 - I_4 + I_6 + I_8 = 0\,,$$

$$3:\ -I_3 + I_4 + I_5 - I_6 + I_7 = 0$$

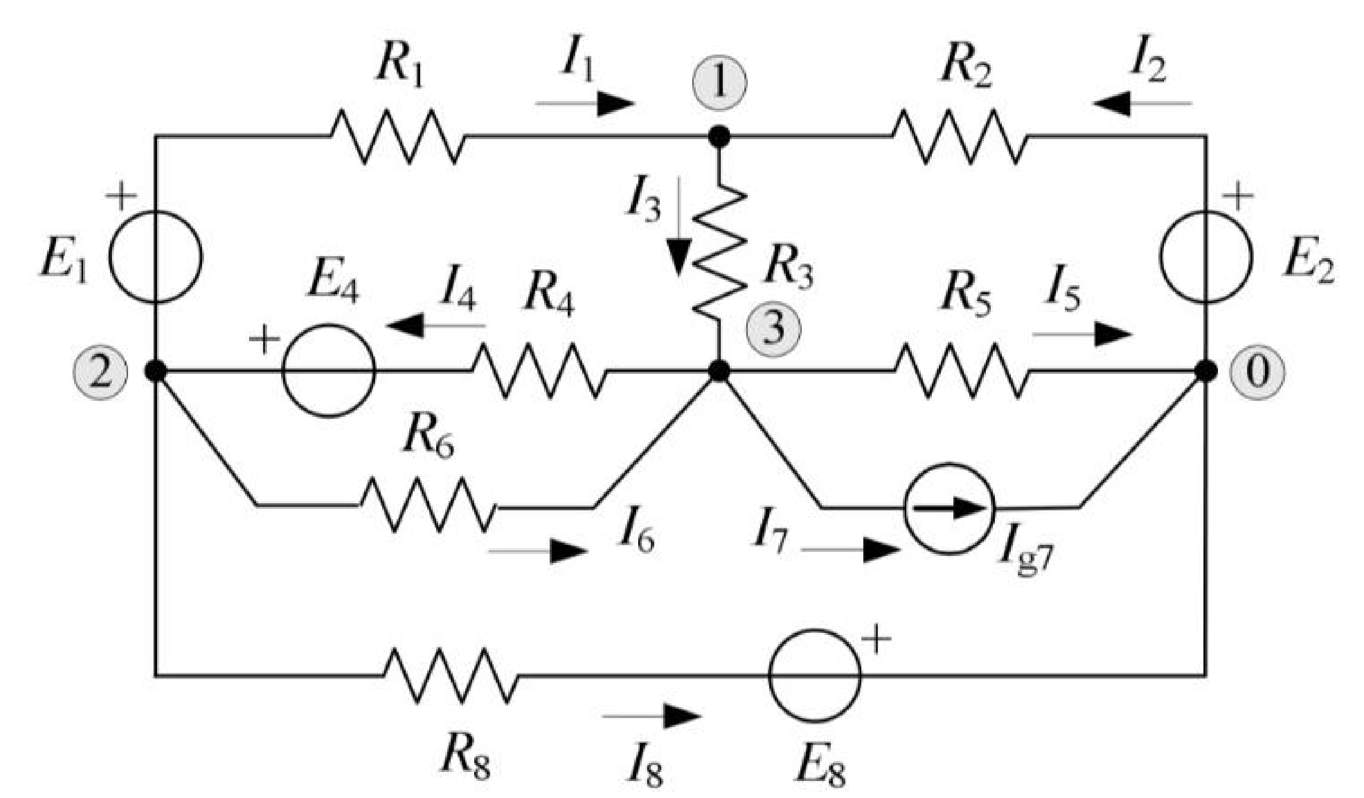
- Sa slike važi da je

$$I_1 = \frac{V_2 - V_1 + E_1}{R_1} \qquad I_2 = \frac{-V_1 + E_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_3}{R_3}\,, \qquad I_4 = \frac{V_3 - V_2 + E_4}{R_4}$$

$$I_5 = \frac{V_3}{R_5}\,, \qquad I_6 = \frac{V_2 - V_3}{R_6}$$

$$I_7 = I_{g7} \qquad I_8 = \frac{V_2 + E_8}{R_8}$$



2.7. Metoda potencijala čvorova

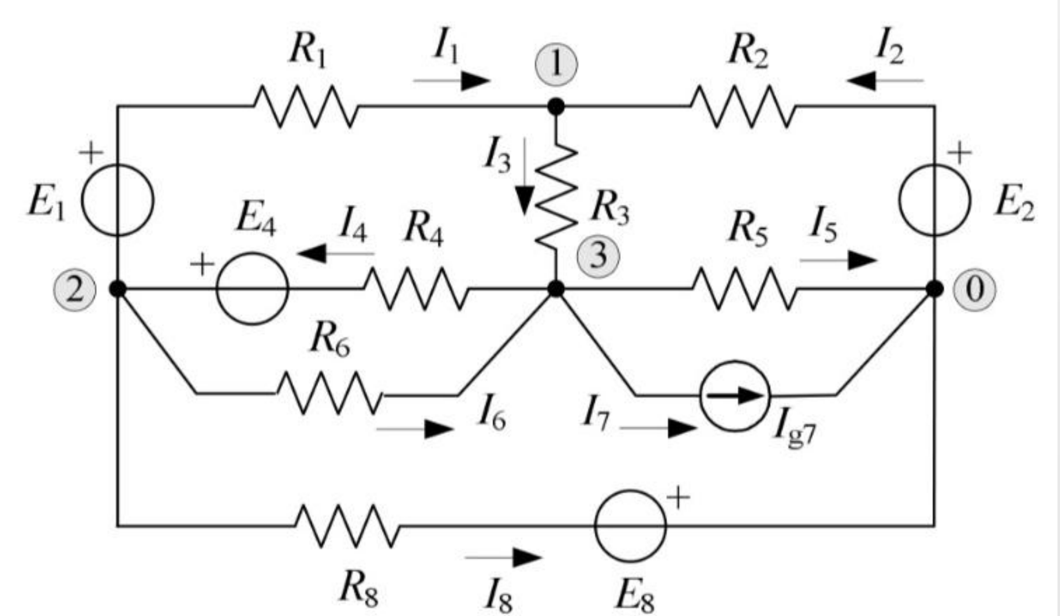
- Zamenom jednačina za struje u jednačine po I KZ za kolo na slici, dobija se

$$1:\ \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_1-\frac{1}{R_1}V_2-\frac{1}{R_3}V_3=\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2},$$

$$2:\ -\frac{1}{R_1}V_1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_8}\right)V_2-\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right)V_3=-\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_4}{R_4}-\frac{E_8}{R_8},$$

$$3:\ -\frac{1}{R_3}V_1-\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right)V_2+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)V_3=-\frac{E_4}{R_4}-I_{g7}.$$

- Ovako napisane jednačine predstavljaju MNČ / MPČ.
- U jednačini za čvor 1, uz V_1 je suma provodnosti grana koje se stiču u čvoru 1 sa znakom (+), uz V_2 je suma provodnosti grana između čvorova 1 i 2 sa znakom (-), a uz V_3 je suma provodnosti grana između čvorova 1 i 3 sa znakom (-). Na desnoj strani su sume struja ekvivalentnih strujnih generatora grana koje se stiču u čvoru 1 sa znakom (+) ako ulaze u čvor, a znakom (-) ako struje izlaze iz čvora.
- Analogno je i za ostale jednačine... **ali pazi na I_{g7}**!!!



2.7. Metoda potencijala čvorova

- Jednačine po MPČ za kolo **bez idealnih naponskih generatora** se u opštem obliku mogu zapisati

$$
\begin{aligned}
&G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \ldots + G_{1(n_č-1)}V_{(n_č-1)} = I_{č1} \\
&G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \ldots + G_{2(n_č-1)}V_{(n_č-1)} = I_{č2} \\
&\vdots \\
&G_{(n_č-1)1}V_1 + G_{(n_č-1)2}V_2 + \ldots + G_{(n_č-1)(n_č-1)}V_{(n_č-1)} = I_{č(n_č-1)}
\end{aligned}
$$

- Gde je $n_č$ broj čvorova u kolu.
- G_{ii}, i=1,2,...,$n_č$-1 su sopsvene provodnosti čvora ***i*** i jednake su zbiru provodnosti svih grana koje se stiču u ***i***-tom čvoru (uzete uvek sa predznakom (+)).
- G_{ij}, i,j=1,2,...,$n_č$-1, $i \neq j$ su međusobne provodnosti čvora ***i*** i čvora ***j*** i jednake su zbiru provodnosti svih grana koje direktno povezuju ova dva čvora (uzete uvek sa predznakom (-)). Ukoliko čvorovi ***i*** i ***j*** nisu direktno povezani ili je u toj grani idealni strujni generator tada je $G_{ij}=0$. Očigledno je $G_{ji}=G_{ij}$.
- $I_{či}$, i=1,2,...,$n_č$-1 je algebarski zbir struja svih idealnih strujnih generatora i ekvivalentnih realnih strujnih generatora koji se stiču u čvoru ***i***. Ako je strujni generator okrenut prema čvoru uzima se predznak (+), a predznak (-) ako je strujni generator okrenut od čvora.

2.7.1. Šta raditi ako postoji jedan ili više IDEALNIH naponskih generatora?

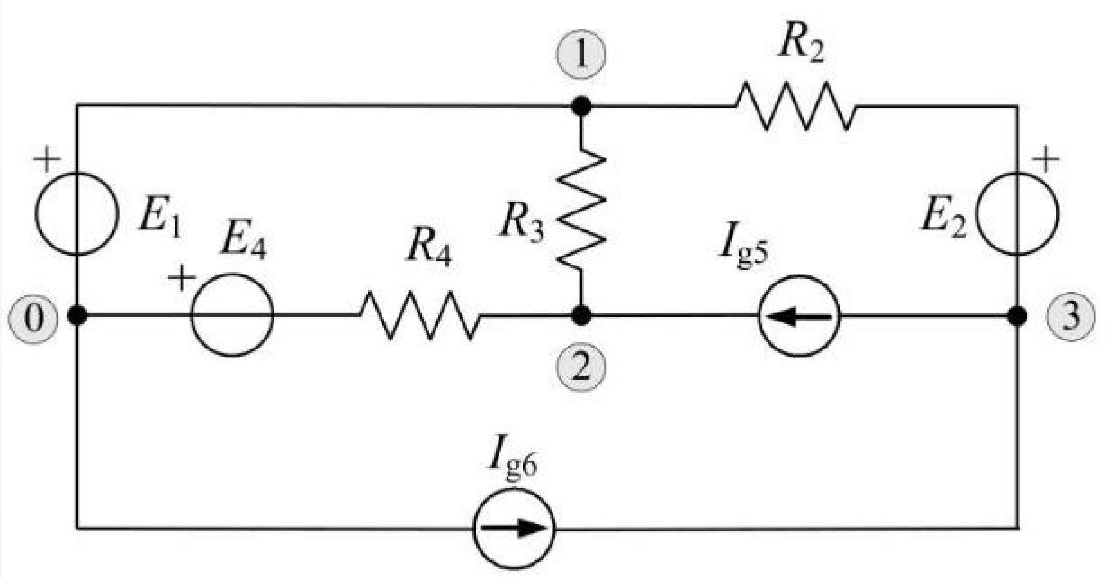
- Kada u kolu postoje idealni naponski generatori, otpornosti tih grana su jednake 0 a odgovarajuće provodnosti grana sa indealnim naponskim generatorima su beskonačne. Zbog toga se **jednačine po metodi MPČ za čvorove u kojima se stiču grane sa idealnim naponskim generatorima ne mogu pisati**!
- Ako postoji **jedan ili više idealnih naponskih generatora koji su svi jednim svojim krajem povezani za referentni čvor**, tada se, slično kao kod MKS, može napisati redukovani skup jednačina.
- Za svaki čvor u kome se stiče grana sa idealnim naponskim generatorom, ne piše se jednačina po MPČ, već se piše jednačina oblika

$$V_i = E_i \,, \qquad i = 1,2,\ldots,n_E$$

- Gde je $\boldsymbol{n_E}$ broj grana koje sadrže samo idealne naponske generatore, a $\boldsymbol{E_i}$ su elektromotorne sile tih generatora. Ako je generator okrenut prema čvoru uzima se predznak (+), a predznak (-) ako je generator okrenut od čvora (tj. prema referentnom čvoru).
- Dimenzija sistema jednačina po MPČ je i dalje $(n_č - 1)$ i postoji isto toliko potencijala čvorova, samo se ne pišu sve jednačine sistema, već se umesto njih pišu jednačine oblika $V_i = E_i$.
- Međusobne provodnosti preko grana sa idealnim naponskim generatorima kod ove metode ne postoje postoje!
- Zato je primena MNČ sa više idealnih naponskih generatora koji nisu svi jednim krajem povezani na referentni čvor otežana. Iako nije previše teško naći rešenje i za ovaj slučaj, nećemo se time baviti na ovom kursu...

2.7.1. Šta raditi ako postoji jedan ili više IDEALNIH naponskih generatora?

- Kolo sa slike ima **idealni naponski generator** između čvorova 0 i 1.
- Dimenzija sistema i dalje ostaje $n_{č} - 1 = 4 - 1 = 3$, jer toliko ima nezavisnih potencijala, ali se jednačina za čvor 1 ne piše po MPČ, već ima oblik $V_1 = E_1$.



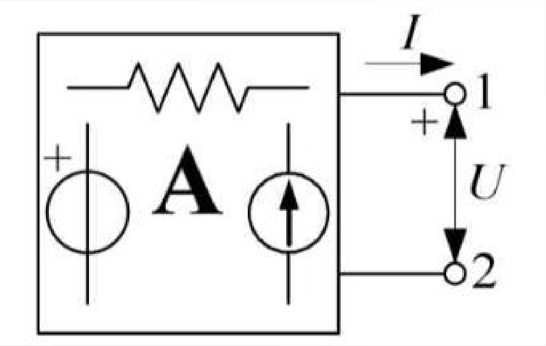
$$1:\ \boxed{V_1 = E_1}$$

$$2:\ -\frac{1}{R_3}V_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 = -\frac{E_4}{R_4} + I_{g5},$$

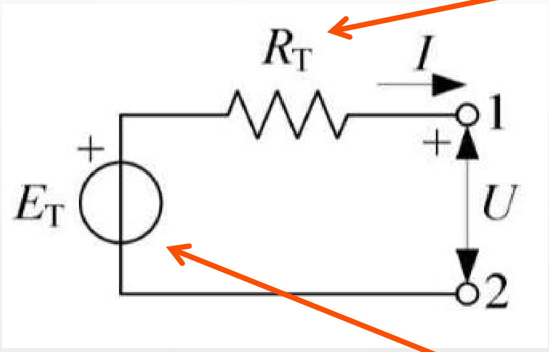
$$3:\ -\frac{1}{R_2}V_1 + \frac{1}{R_2}V_3 = -\frac{E_2}{R_2} - I_{g5} + I_{g6}.$$

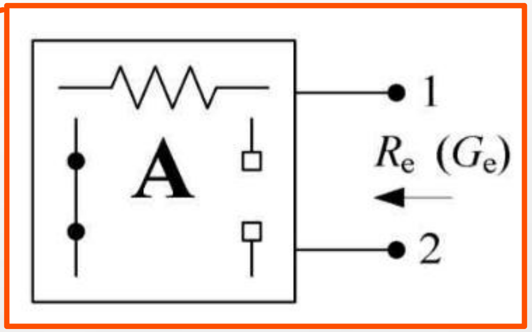
2.8. Tevenenova teorema

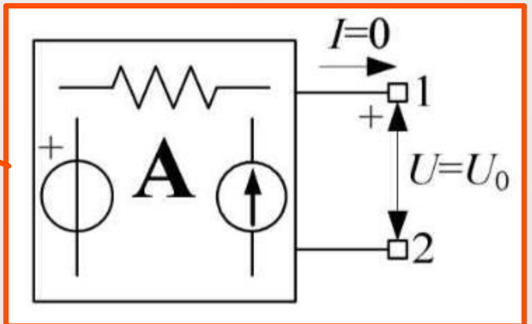
- Tevenenova i Nortonova teorema se često koriste ako nije potrebno rešiti kopletno kolo/mrežu tj. ne moraju se naći sve struje i naponi, već je to potrebno samo u određenom delu (često u samo jednoj grani). Preostali deo linearnog kola između dva priključka (dva čvora) se može zameniti realnim naponskim generatom - Tevenenova teorema ili realnim strujnim generatorom - Nortonova teorema.
- **Tevenenova teorema**: Mreža A sa slike levo (između priključaka 1 i 2) se može zameniti realnim naponskim generatorom sa slike desno, čija je elektromotorna sila jednaka naponu između otvorenih priključaka te mreže ($E_T = U_0$), a unutrašnja otpornost je jednaka ekvivalentnoj otpornosti te mreže između priključaka 1 i 2 ($R_T = R_e$, kada su svi generatori isključeni).



⇔



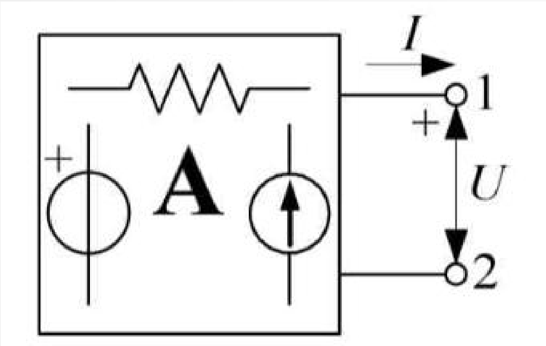




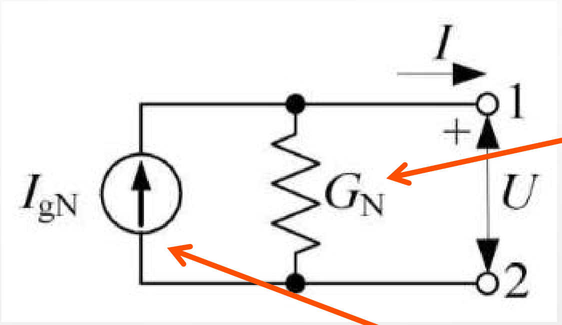
Pazi na referentne smerove!!!

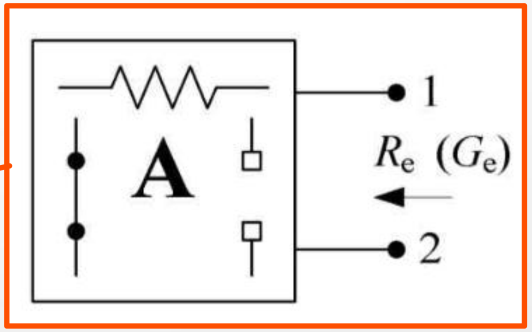
2.9. Nortonova teorema

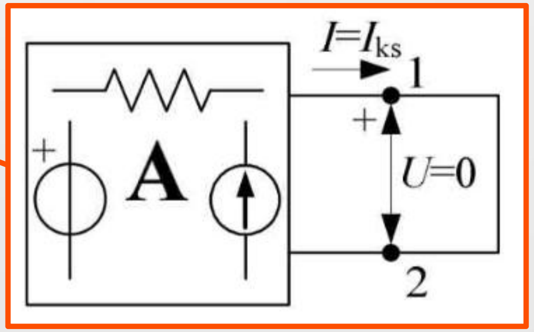
- **Nortonova teorema**: Mreža A sa slike levo (između priključaka 1 i 2) se može zameniti realnim strujnim generatorom sa slike desno, čija je struja jednaka struji kratkog spoja priključaka te mreže ($I_{gN} = I_{KS}$), a unutrašnja provodnost je jednaka ekvivalentnoj provodnosti te mreže između priključaka 1 i 2 ($G_T = G_e$, kada su svi generatori isključeni).
- Nortonova i Tevenenova teorema su **dualne**. Ako se odrede parametri Tevenenovog generaora, onda se taj realni naponski generator može transformisati u realni strujni tj. Nortonov generator ($I_{gN} = E_T/R_T$, $G_N = 1/R_T$). Važi i obrnuto ($E_T = I_{gN}/G_N$, $R_T = 1/G_N$).



⇔



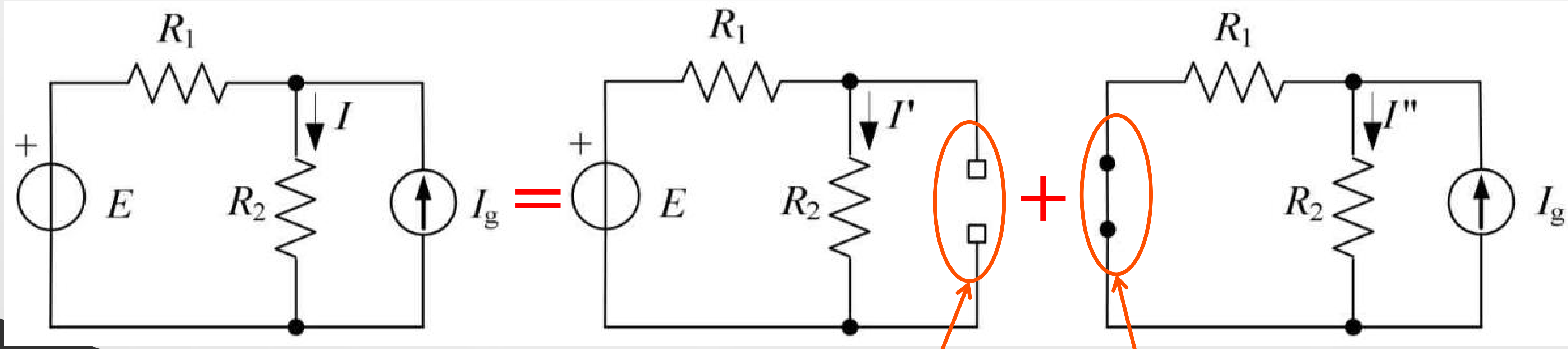




Pazi na referentne smerove!!!

2.10. Teorema superpozicije

- **Teorema superpozicije** se primenjuje na linearno kolo u kome deluje više pobuda (naponskih ili strujnih generatora). Primenjuje se najčešće ako se kola sa jednom pobudom jednostavno rešavaju.
- Bilo koji odziv kola (napon između bilo koja dva čvora ili struja bilo koje grane) se može dobiti kao zbir (superpozicija) odziva na svaku pojedinačnu pobudu.
- Da bi se odredio odziv na samo jednu pobudu, sve ostale pobude se moraju anulirati
  - za idealni naponski generator ***E*=0 => kratak spoj**, ako je generator realni i ima R_u ova otpornost ostaje.
  - za idealni strujni generator **I_g=0 => otvorena veza**, ako je generator realni i ima G_u ova provodnst ostaje.
- Primer: u kolu sa slike odrediti struju I u grani sa otpornikom R_2.



$$I = I' + I'' = \frac{E + I_g R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I' = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Ukidanje strujnog generatora

Ukidanje naponskog generatora

$$I'' = \frac{I_g R_1}{R_1 + R_2}$$

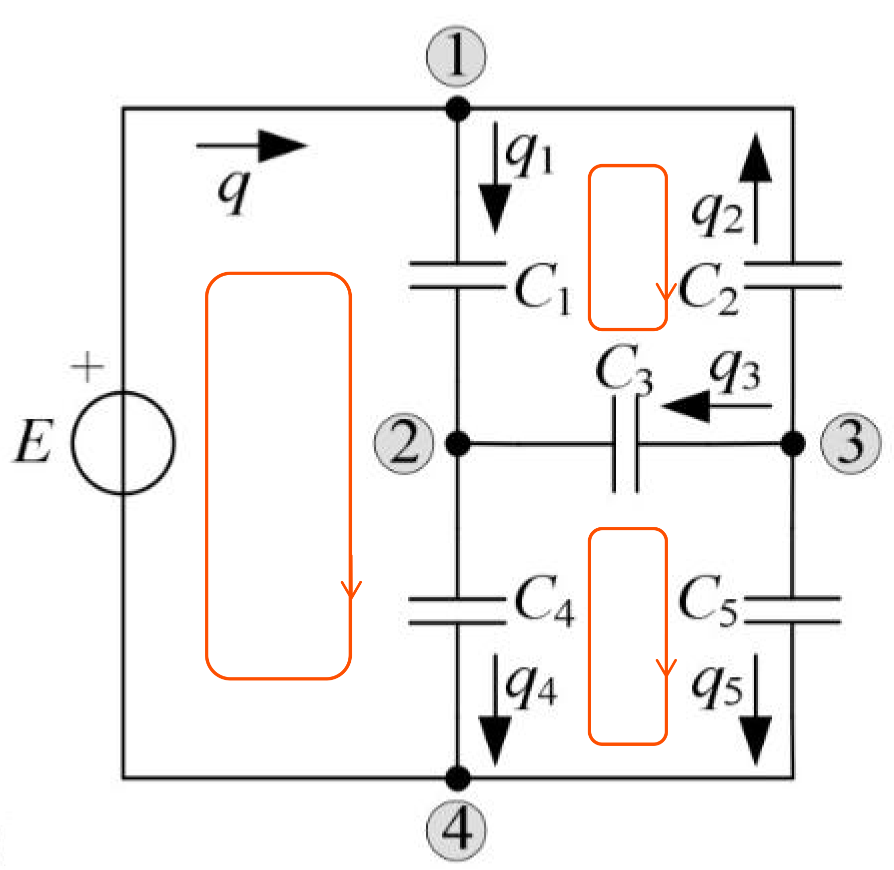
2.11. Električna kola sa kondenzatorima

- Električna kola sa kondenzatorima se mogu podeliti na
  - elektrostatička kola
  - kola jednosmernih struja sa kondenzatorima
- Za ova kola takođe važe Kirhofovi zakoni, ali treba imati u vidu odgovarajuće veze između naeletrisanja na kondenzatoru, kapacitivnosti i napona na kondenzatoru ($Q=CU$).
- Treba imati u vidu da u stacionarnom stanju (kada je proces opterećivanja kondenzatora završen) kroz kondenzatore ne protiče jednosmerna struja (mogu se uprošćeno posmatrati kao otvorena veza, $I_C=0$) a naponi i naelektrisanja su konstantni.
- I KZ važi za “protekla naelektrisanja” kroz pojedine čvorove, pa treba biti oprezan ako su neki od kondenzatora bili prethodno opterećeni početnom količinom naelektrisanja ($Q=q+Q_0$).

2.11.1. Elektrostatička kola

- U procesu opterećivanja kondenzatora kroz kolo kratkotrajno “protekne” određena količina naelektrisanja (protiču odgovarajuće struje) i taj period se naziva **prelazni proces**.
- Kada se prelazni proces završi, protok naelektrisanja prestaje, **kroz kondenzatore ne “protiču” naelektrisanja tj. nama struje**, a oni su opterećeni konstantnim količinama naelektrisanja i na njima su konstantni naponi.
- I za ovakva kola važe I KZ i II KZ.
- Jednačine po I KZ za protekla naelektrisanja za čvorove 1, 2 i 3 (čvor 4 je uzet kao referentni) su

$$-q+q_1-q_2=0\,,\quad -q_1-q_3+q_4=0\quad,\quad q_2+q_3+q_5=0$$



- Ako su kondenzatori bili neopterećeni na početku prelaznog procesa, jednačine po II KZ su

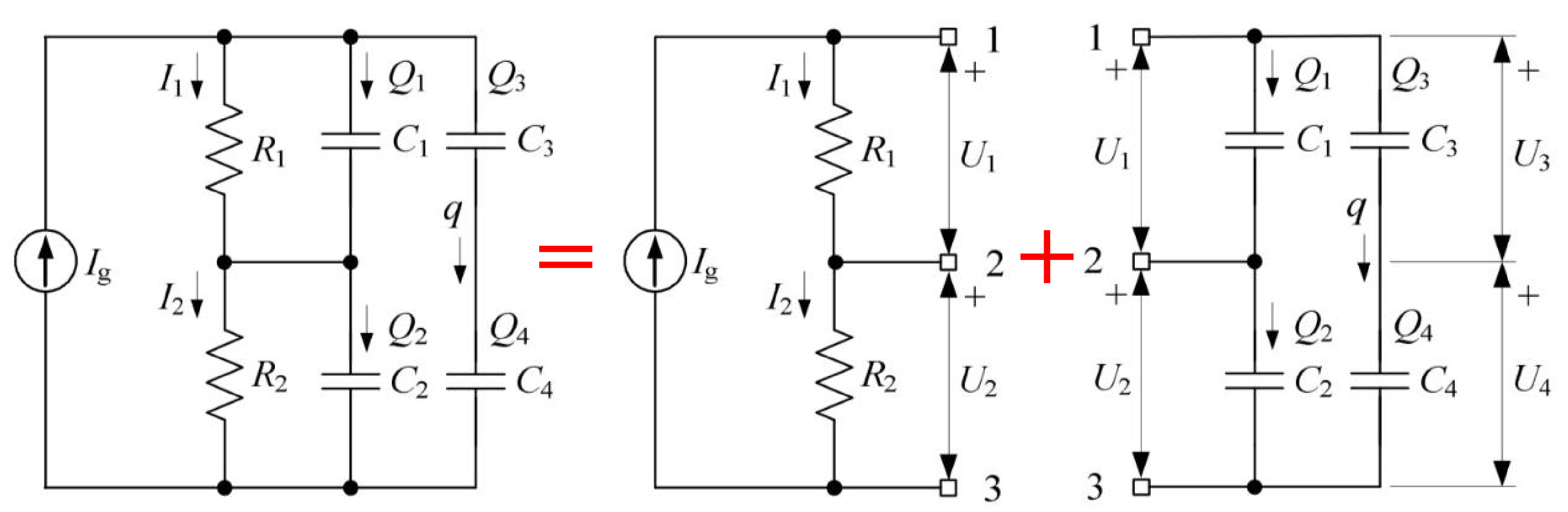
$$E-\frac{q_1}{C_1}-\frac{q_4}{C_4}=0\,,\quad \frac{q_2}{C_2}-\frac{q_3}{C_3}+\frac{q_1}{C_1}=0\quad,\quad \frac{q_3}{C_3}-\frac{q_5}{C_5}+\frac{q_4}{C_4}=0$$

2.11.2. Kola jednosmernih struja sa kondenzatorima

- Na slici je dato složeno kolo koje se sastoji iz dela kola kroz koje protiču jednosmerne struje i elektrostatičkog dela kola.
- Ako se ima u vidu da po završenom procesu opterećivanja kondenzatora (prelaznom procesu) kroz kondenzatore ne protiče jednosmerna struja (JS), ova dva dela kola se mogu razdvojiti.
- Iz dela kola sa JS, važi da je $I_1=I_2=I_g$, pa se naponi mogu odrediti

$$U_1 = R_1 I_g, U_2 = R_2 I_g.$$

- Ostatak kola je elektrostatičko kolo.



2.11.2. Kola jednosmernih struja sa kondenzatorima

- Pošto su poznati naponi U_1 i U_2, iz elektrostatčkog dela kola je lako odrediti naelektrisanja kondenzatora

$$Q_1 = C_1 U_1 = C_1 R_1 I_g,$$
$$Q_2 = C_2 U_2 = C_2 R_2 I_g.$$

- Zbog postojanja čvora 2, kondenzatori C_1 i C_2 nisu povezani redno, pa ni Q_1 i Q_2 ne moraju biti ista.
- Međutim, kondenzarori C_3 i C_4 su povezani redno i proteklo naelektrisanje q u procesu opterećivanja kondenzatora je jednako za oba kondenzatora, pa je

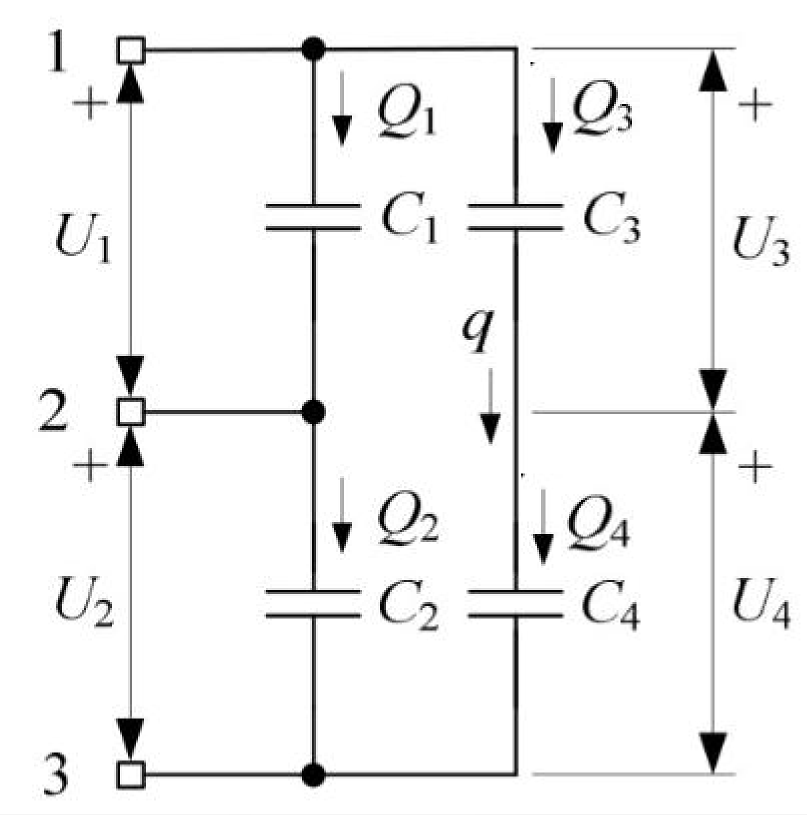
$$Q_3 = Q_{30} + q, Q_4 = Q_{40} + q.$$

- Ako su kondenzatori bili neopterećeni Q_3=Q_4=q, pa je

$$(R_1 + R_2) I_g = U_3 + U_4 = q \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right)$$

$$q = \frac{(R_1 + R_2) I_g}{\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}}$$

$$U_3 = \frac{q}{C_3}, U_4 = \frac{q}{C_4}$$



2.12. Primeri

- **Primer 1**. Nacrtati U-I karakteristiku realnog naponskog i strujnog generatora.
- **Primer 2**. Odrediti snagu koju realni naponski i strujni generator isporučuju otpornom potrošaču.
- **Primer 3**. Nacrtati primer kola sa idealnim strujnim generatorom i rešiti kolo Kirhofovim zakonima - odrediti sve struje, potencijale, snage.
- **Primer 4**. Nacrtati primer kola sa idealnim strujnim generatorom i naponskim generatorom i rešiti kolo koristeći MKS.
- **Primer 5**. Nacrtati primer kola sa idealnim strujnim generatorom i naponskim generatorom i rešiti kolo koristeći MPČ.
- **Primer 6.** Na nekom jednostavnom primeru ilustrivati određivanje ekvivalentnog Tevenenovog i Nortonovog generatora.
- **Primer 7.** Na nekom jednostavnom primeru ilustrivati određivanje struje i napona u nekoj grani kola korišćenjem Tevenenove i Nortonove teoreme.
- **Primer 8.** Na nekom jednostavnom primeru ilustrivati određivanje struje i napona u nekoj grani kola korišćenjem teoreme superpozicije.
- **Primer 9.** Jednostavan primer rešavanja kola sa jednosmernim strujama i kondenzatorima.
- *Konkretni primeri sa rešenjima su u dodatnom PDF dokumentu.*
- *Potražite na sajtu predmeta još primera...*