Elektrotehnika

5. Naizmenične struje

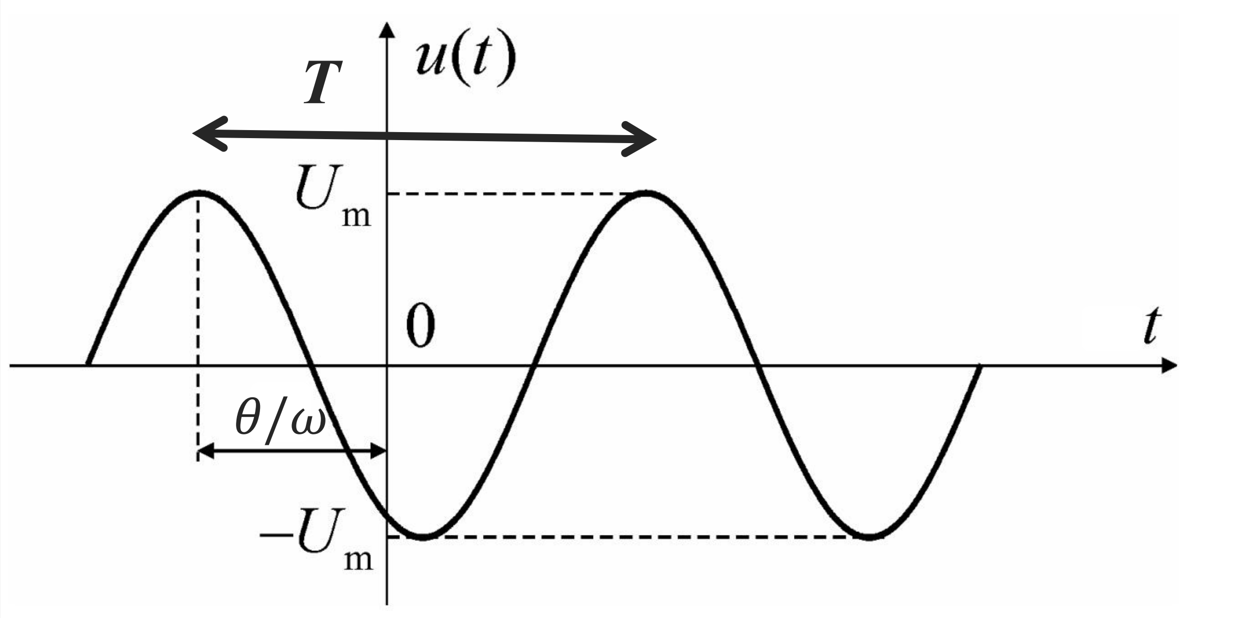
5. Naizmenične struje

5.1. Parametri sinusoide

- U kolima naizmeničnih struja (NS) naponi i struje su prostoperiodične veličine (sinusne ili kosinusne).
- Parametri prostoperiodične veličine $\boldsymbol{u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)}$ su:
  - Amplituda $\boldsymbol{U_m}$ ili efektivna vrednost $\boldsymbol{U = U_m/\sqrt{2}}$

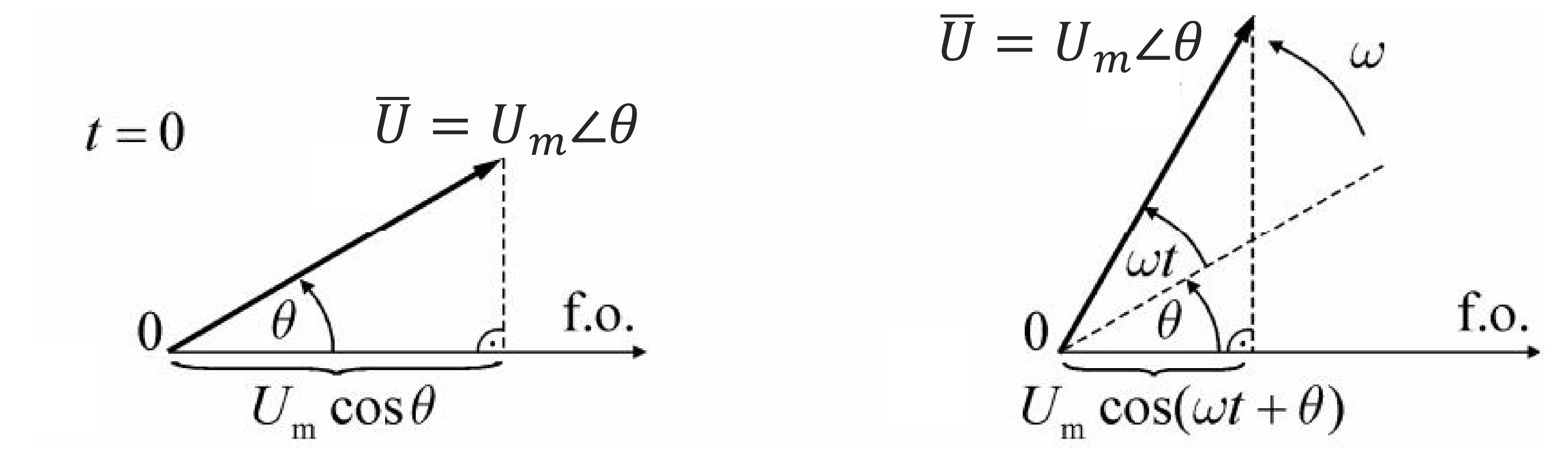
$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = U_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\theta)dt} = U_m\sqrt{\frac{1}{2T}\int_0^T (\cancelto{T}{1} + \cancelto{0}{\cos(2\omega t + 2\theta)})dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

  - Perioda $\boldsymbol{T}$, učestanost (frekvencija) $\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$ ili kružna učestanost $\boldsymbol{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$
  - Početna faza $\boldsymbol{\theta}$.



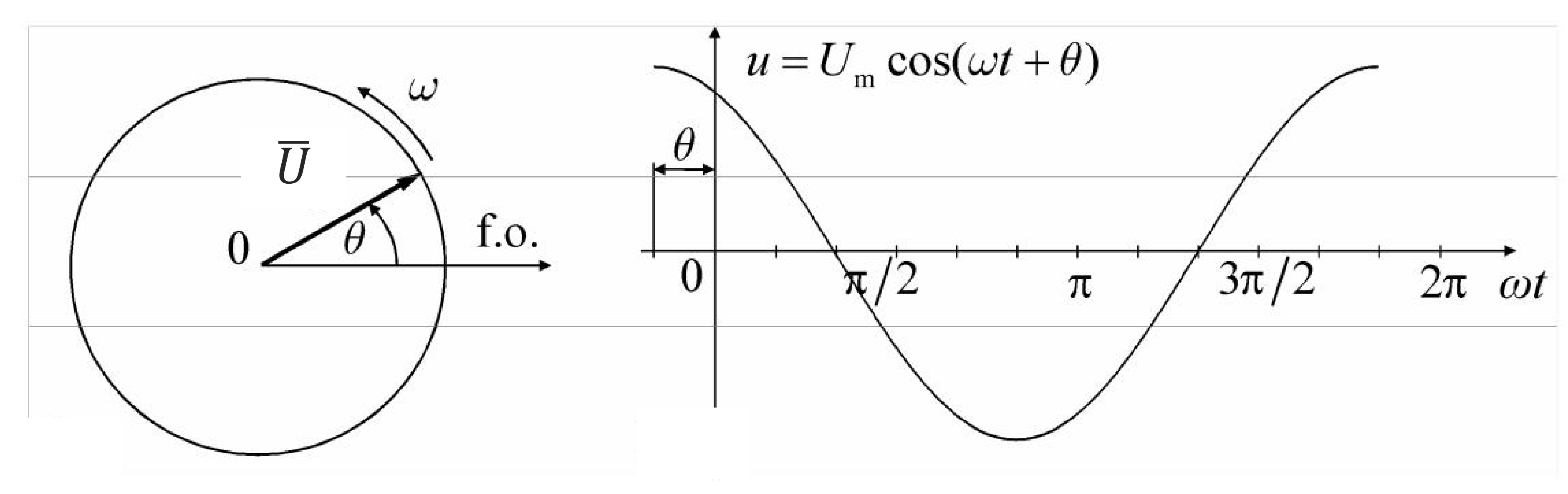
5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

- Prostoperiodična veličina $\boldsymbol{u(t) = U_m\cos(\omega t + \theta)}$ može se predstaviti kao projekcija na apscisnu osu vektora amplitude $\boldsymbol{U_m}$ i početne faze $\boldsymbol{\theta}$ koji rotira ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$.
- Ovakvi rotirajući vektori se nazivaju **fazorima**. Fazori se crtaju usvajajući neki fiksni početni trenutak, na primer $\boldsymbol{t = 0}$: $u(0) = U_m\cos(\theta)$ i označavaju sa $\boldsymbol{\overline{U} = U_m\angle\theta}$.
- U predstavljanju naizmeničnih napona i struja najčešće se umesto amplitude $\boldsymbol{U_m}$ koristi efektivna vrednost $\boldsymbol{U = U_m/\sqrt{2}}$, pa fazor postaje $\boldsymbol{\overline{U} = U\angle\theta}$.



5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

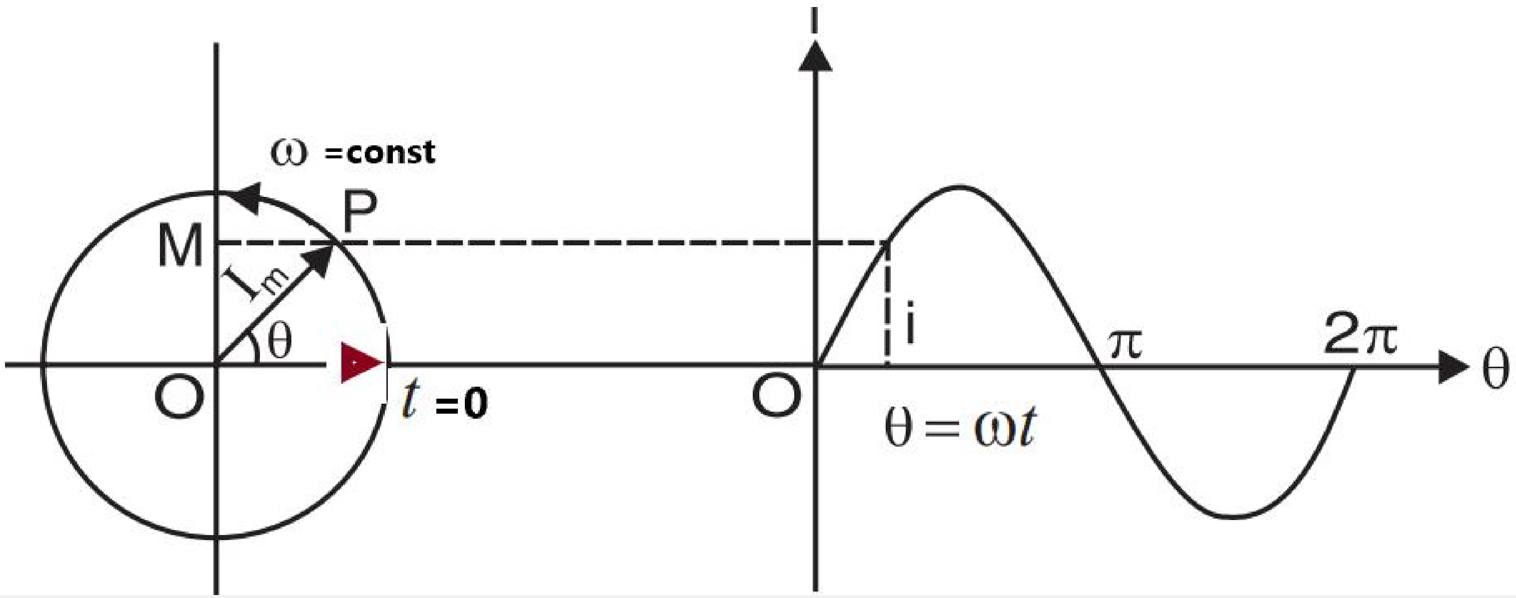
- Projekcija rotirajućeg vektora (fazora) na apscisnu osu (zapravo faznu osu u odnosu na nju se meri početna faza) daje prostoperiodičnu veličinu:
  $\boldsymbol{u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)}$.
- Slično tome, projekcija fazora na oordinatnu osu (upravna na faznu osu) daje prostoperiodičnu veličinu:
  $\boldsymbol{u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)}$.
- Tako da se fazorima mogu predstavljati bilo **sinusne** ili **kosinusne** funkcije, ali **po unapred usvojenom dogovoru**.



5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

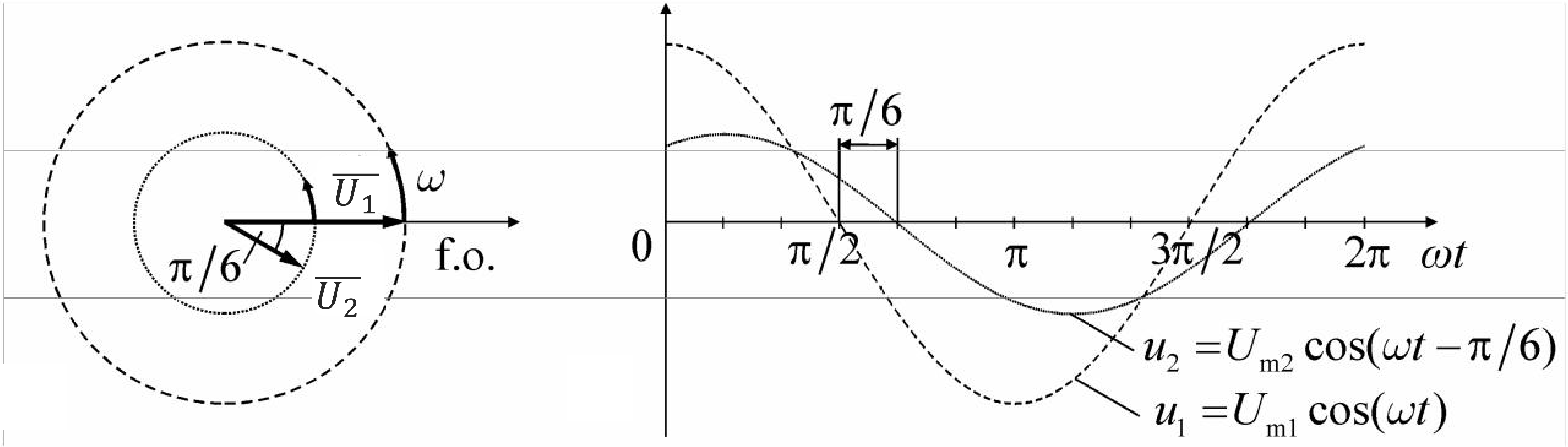
- Primer sinusne predstave struje u vremenskom domenu koja se dobija kao projekcija na osu upravnu na faznu osu $\boldsymbol{i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)}$.

$$OM = OP \sin\theta = I_m \sin \omega t = i$$



5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

- Pošto svi fazori koji predstavljaju naizmenične napone i struje u jednom kolu rotiraju istom ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$, njihov međusobni položaj (fazna razlika) ostaje isti u svakom trenutku vremena.
- Zato se može usvojiti da je t=0 i kolo analizirati pomoću fazora koji su “zaustavljeni” u početnom trenutku, bez gubitka opštosti analize.



5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

- Rotirajući vektori mogu se predstaviti i kompleksnim brojevima.
- Za kompleksni broj koji predstavlja naizmenični napon važi:

$$\overline{U_m(j\omega)} = U_m e^{j(\omega t+\theta)} = U_m \cos(\omega t + \theta) + jU_m \sin(\omega t + \theta)$$

- Kompleksni predstavnik $\overline{U_m(j\omega)}$ u kompleksnoj ravni rotira, kao i fazor u faznoj ravni, ugaonom brzinom ω.
- Kompleksni brojevi se u ovom kursu obeležavaju **nadvučenim velikim slovom $\overline{U}$** (za napon), ali se često u literaturi koristi i **podvlačenje $\underline{U}$** kao oznaka kompleksnog broja (*u ovoj prezentavciji će se eventualno na pojedinim slikama i formulama preuzetim iz knjiga sa drugih fakulteta koristiti podvlačenje*).
- Projekcija na realnu osu daje kosinusni napon:

$$u(t) = \mathrm{Re}(\overline{U_m(j\omega)}) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

- Projekcija na imaginarnu osu daje sinusni napon:

$$u(t) = \mathrm{Im}(\overline{U_m(j\omega)}) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

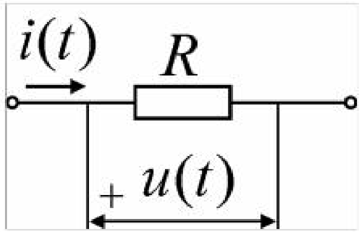
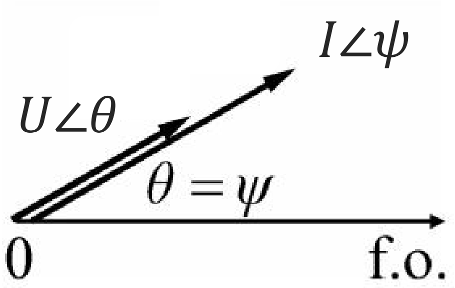
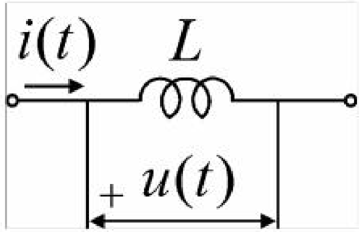
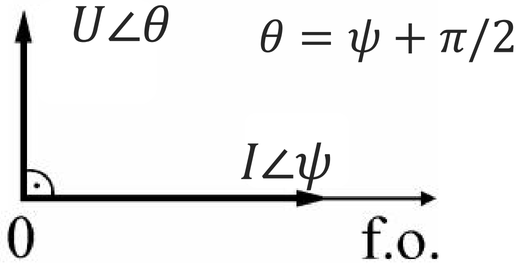
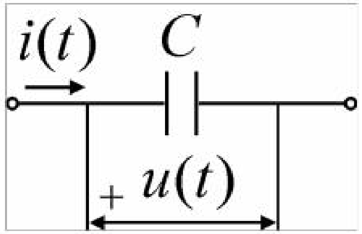
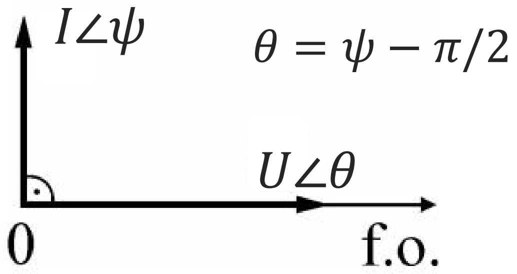
- Ako u kolu postoji samo jedna kružna učestanost ω, tada može da se usvoji da se kompleksni broj "zamrzne" u trenutku t=0.
- Ako se još i umesto amplitude koristi efektivna vrednost za predstavljanje napona (ili struja), tada se kao kompleksni predstavnik napona može usvojiti:

$$\bar{U} = Ue^{j\theta} \text{ (komp. oblik)} \Leftrightarrow \text{(vrem. oblik) } u(t) = U\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \theta) \text{ ili}$$

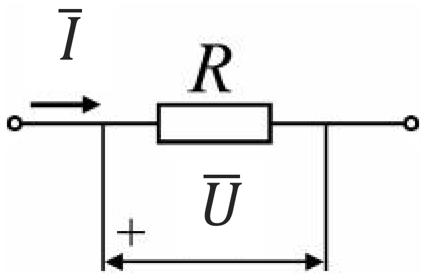
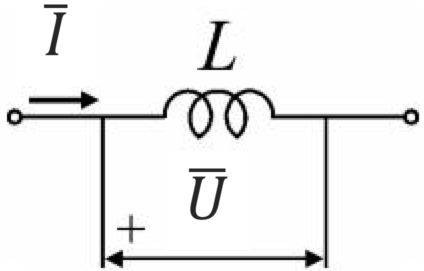
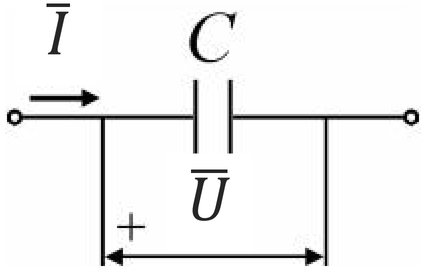
$$\bar{U} = Ue^{j\theta} \text{ (komp. oblik)} \Leftrightarrow \text{(vrem. oblik) } u(t) = U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t + \theta)$$

- Preslikavanje iz vremenskog u kompleksni oblik i obrnuto je jednoznačno!
- Potrebno je da se unapred dogovori da li će se koristiti **sin** ili **cos** u reprezentaciji napona i struja u vremenskom obliku. S obzirom da je $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ i $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$ razlika se svodi na pomeraj u fazi.
- *NAPOMENA: Na ovom kursu će se od 2024/25 godine koristiti* ***kosinusna funkcija****, ali u knjizi sa Saobraćajnog fakulta i primerima od prethodnih godina u dodatnim materijalima na predmetu* ***koristila se sinusna funkcija****!*

5.3. R, L, C u kolima NS - fazori napona i struja

Prijemnici	Osnovna relacija	$Z = \dfrac{U}{I}$	$\varphi = \theta - \psi$	Fazorski dijagram
	$u = Ri$	R	$\varphi = 0$	
	$u = L\dfrac{di}{dt}$	ωL	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$	
	$i = C\dfrac{du}{dt}$	$\dfrac{1}{\omega C}$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$	

5.3. R, L, C u kolima NS - kompleksni predstavnici

Element	Impedansa: $\overline{Z} = \dfrac{\overline{U}}{\overline{I}}$	Z	φ	Admitansa: $\overline{Y} = \dfrac{\overline{I}}{\overline{U}}$
	R	R	0	$G = \dfrac{1}{R}$
	$j\omega L$	ωL	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{1}{j\omega L}$
	$\dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{-j}{\omega C}$	$\dfrac{1}{\omega C}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$j\omega C$

5.3.1. Otpornik

- Za napon i struju na otporniku važi:

$$u(t) = U\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \psi)$$

$$u(t) = R\cdot i(t)$$

$$u(t) = U\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \theta) = RI\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t + \psi)$$

- Važi Omov zakon i za efektivne vrednosti:

$$U = RI$$

- A napon i struja su u fazi:

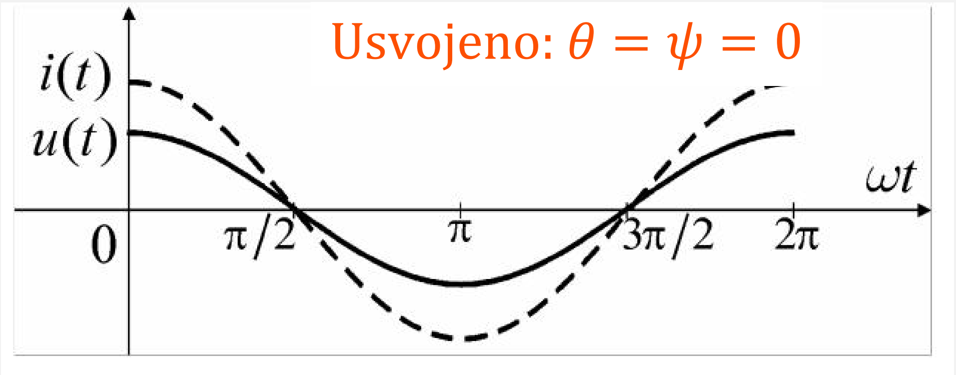
$$\theta = \psi$$

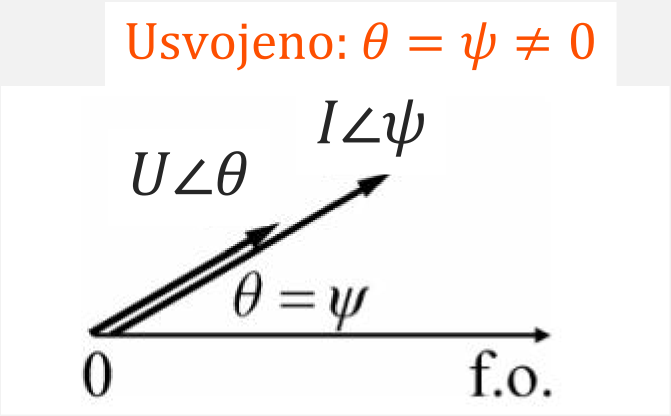
- U kompleksnom domenu je impedansa otpornika:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \frac{RIe^{j\psi}}{Ie^{j\psi}} = R\ (R\ je\ rezistansa)$$

- Kompleksna admitansa je:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R} = G\quad (G\ je\ konduktansa)$$





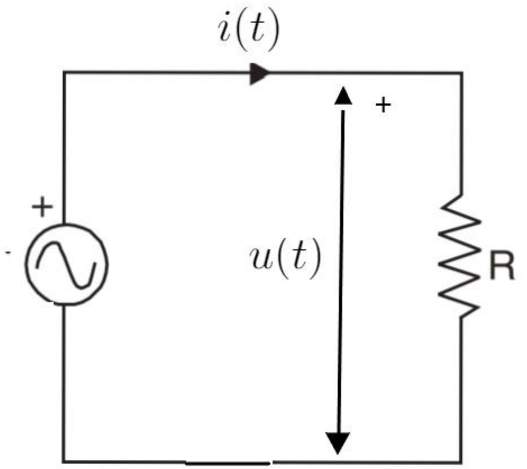
5.3.1. Otpornik

- Za napon i struju na otporniku u **sinusnoj formi** važe analogne relacije i isti zaključci o vezi efektivnih vrednosti i faza napona i struje.

Usvojeno: $\theta = 0$

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$$

$$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}\angle 0$$

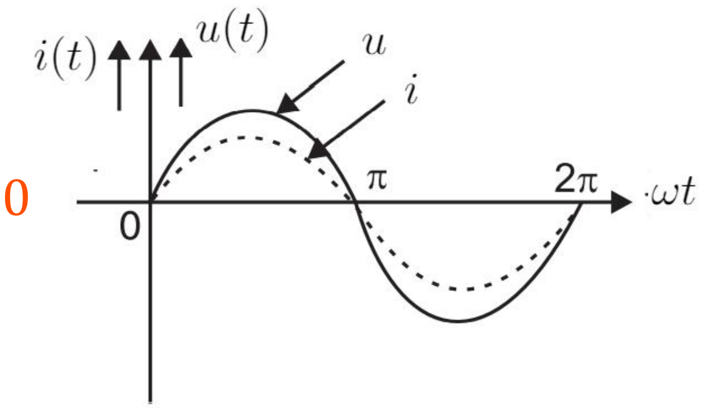


$$i(t) = \frac{1}{R}u(t)$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{R}\sin(\omega t) \qquad \frac{\overline{\mathbf{U}}}{\overline{\mathbf{I}}} = R$$

$$\overline{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{U}}{R}\angle 0$$

Usvojeno: $\theta = 0$

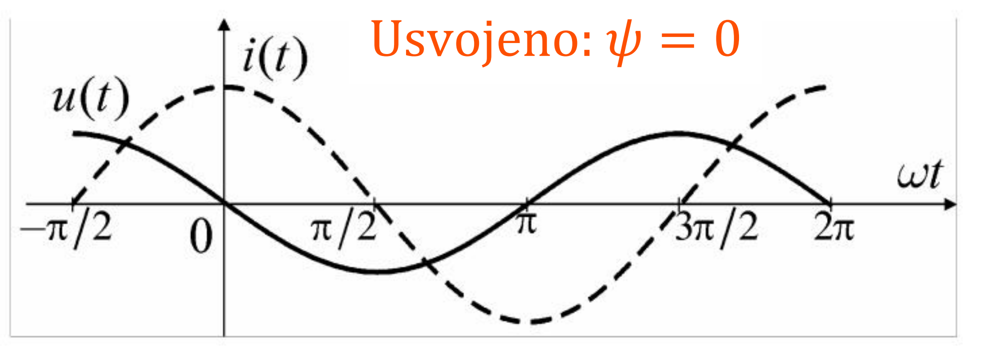


$$\overline{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{U}}{R}\angle 0$$

$$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}\angle 0$$

5.3.2. Kalem

- Za napon i struju kalema važi:



$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

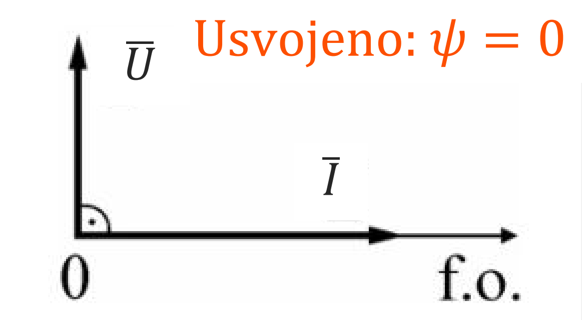
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta) =- \omega L I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \omega L I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi + \pi/2)$$

- Za efektivne vrednosti važi:

$U = \omega L I$



- A struja kasni za naponom (ili napon prednjači) za $\pi/2$:

$\theta = \psi + \pi/2$

- U kompleksnom domenu je impedansa kalema:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \frac{\omega L I e^{j(\psi+\pi/2)}}{Ie^{j\psi}} = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L = jX,\ (reaktansa\colon X = \omega L > 0)$$

- Kompleksna admitansa je:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{j\omega L} =- j\frac{1}{\omega L} = jB,\ (susceptansa\colon B =- \frac{1}{\omega L} < 0)$$

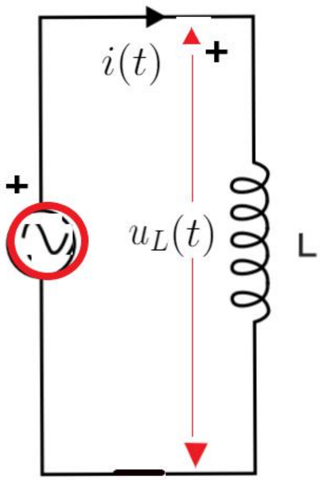
5.3.2. Kalem

- Za napon i struju na kalemu u **sinusnoj formi** važe analogne relacije i isti zaključci o vezi efektivnih vrednosti i faza napona i struje.

Usvojeno: $\theta = 0$

$$u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t)$$

$$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}\angle 0$$



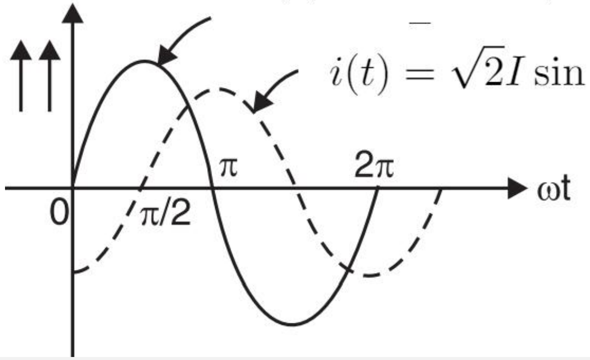
$$u(t) = u_L = L\frac{di}{dt} \qquad \frac{di}{dt} = \frac{\sqrt{2}U}{L}\sin\omega t$$

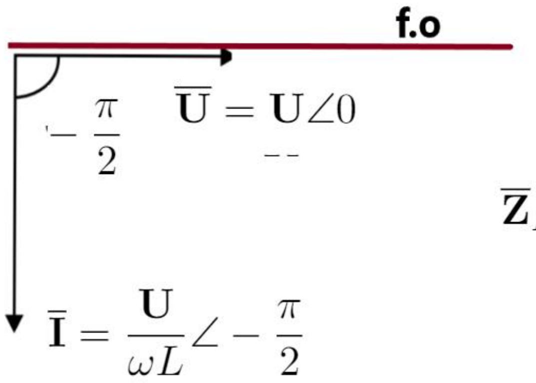
$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{L}\int \sin\omega t dt = \frac{\sqrt{2}U}{\omega L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + Const$$

$$Const = 0$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\omega L}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \qquad \overline{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{U}}{\omega L}\angle - \frac{\pi}{2}$$

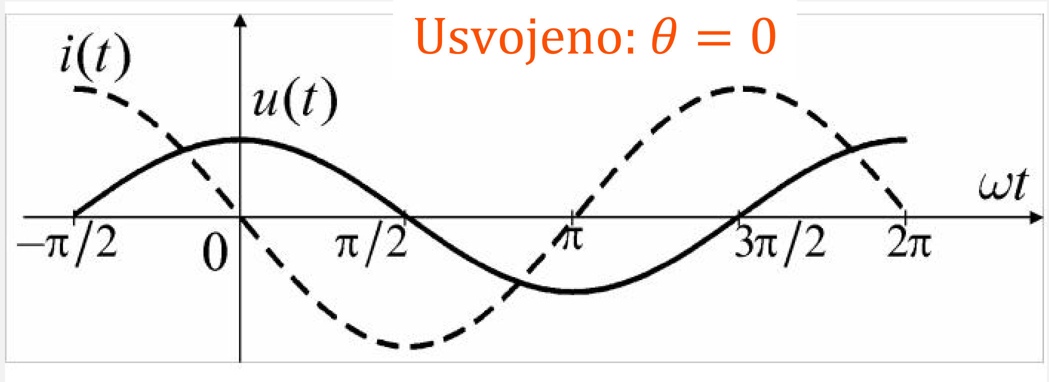
Usvojeno: $\theta = 0$





$$\overline{\mathbf{Z}}_L = \frac{\overline{\mathbf{U}}}{\overline{\mathbf{I}}} = \omega L\angle\frac{\pi}{2}$$

5.3.3. Kondenzator



- Za napon i struju kondenzatora važi:

$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$

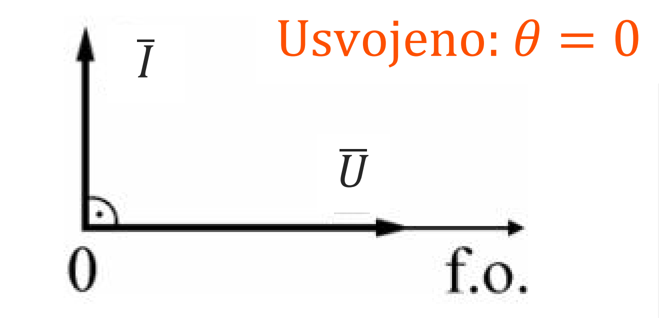
$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$

$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$

$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi) = -\omega C U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta) = \omega C U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta + \pi/2)$

- Za efektivne vrednosti važi:

$I = \omega C U$



- A napon kasni za strujom (ili struja prednjači) za $\pi/2$:

$\psi = \theta + \pi/2$

- U kompleksnom domenu je impedansa kondenzatora:

$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \frac{Ue^{j\theta}}{\omega C U e^{j(\theta+\pi/2)}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = -j\frac{1}{\omega C} = jX, \ \left(reaktansa\colon X = -\frac{1}{\omega C} < 0\right)$

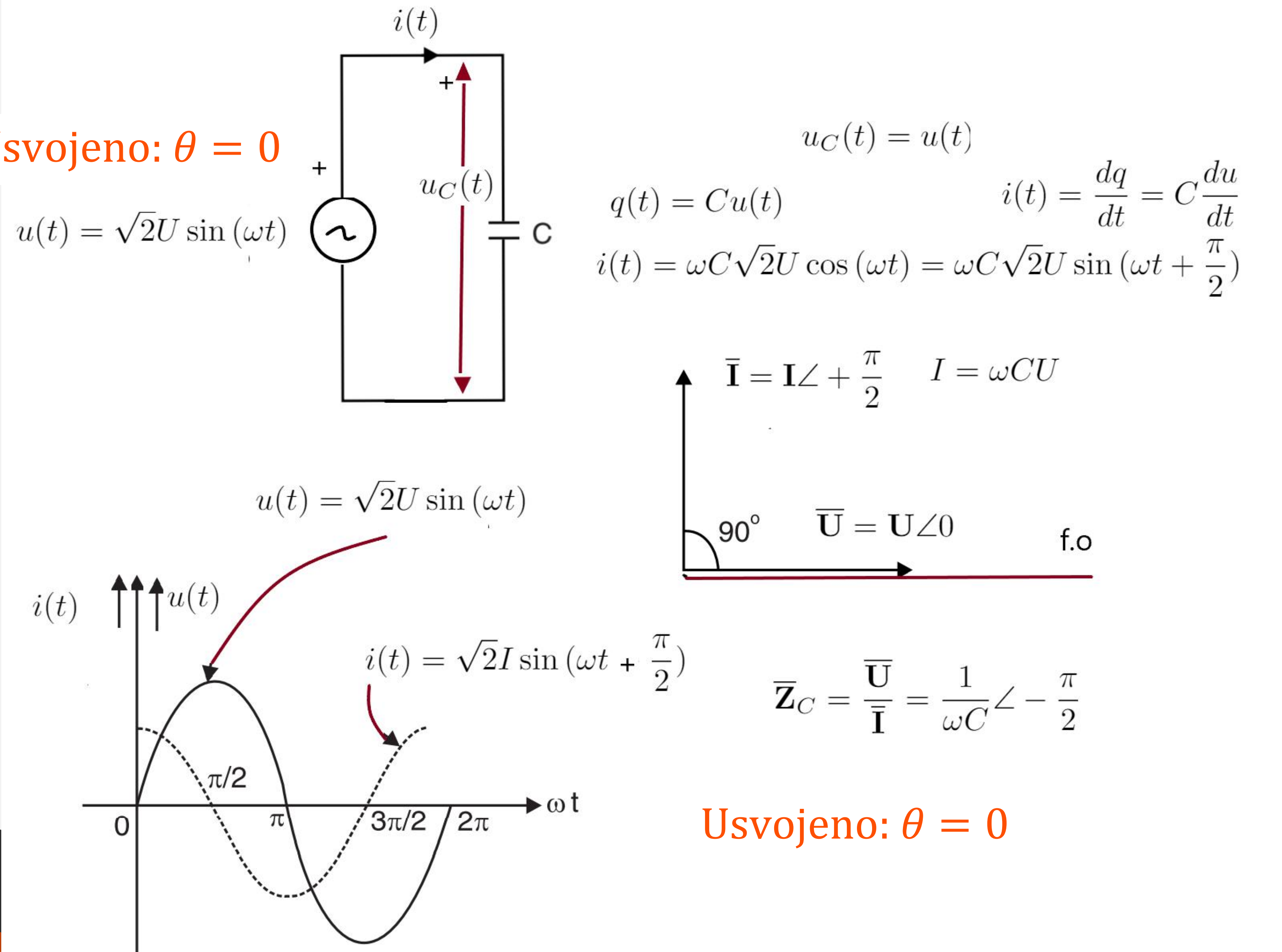
- Kompleksna admitansa je:

$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = j\omega C = jB, \ (susceptansa\colon B = \omega C > 0)$

5.3.3. Kondenzator

- Za napon i struju na kondenzatoru u **sinusnoj formi** važe analogne relacije i isti zaključci o vezi efektivnih vrednosti i faza napona i struje.

Usvojeno: $\theta = 0$



Usvojeno: $\theta = 0$

5.4. Veze impedansi i admitansi

- Kompleksna impedansa prijemnika (potrošača) se u opštem obliku može predstaviti kao:

$$\overline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}$$

- ***R*** - rezistansa, ***X*** - reaktansa.
- Impedansa se može posmatrati kao redna veza otpornika otpornosti R i reaktivnog elementa (kalema ili kondenzatora) reaktivne otpornosti $|X|$, ali pri tome treba voditi računa da je impedansa kompleksan broj i da se “sabiranje otpornosti” ove redne veze mora raditi u kompleksnom domenu (R je realan broj a X imaginaran), tako da je:

$$\overline{Z} = (R + j0) + (0 + jX) = R + jX$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2},\ \varphi = \mathrm{arctg}(X/R)$$

- Reaktansa ***X*** može biti:
  - pozitivna veličina ako je prijemnik pretežno induktivan ($X = \omega L$) ili
  - negativna ako je prijemnik pretežno kapacitivan ($X = -1/(\omega C)$).
- Fazna razlika φ je:
  - pozitivna ako je prijemnik pretežno induktivan ili
  - negativna ako je prijemnik pretežno kapacitivna.

5.4. Veze impedansi i admitansi

- Kompleksna admitansa prijemnika (potrošača) se u opštem obliku može predstaviti kao:

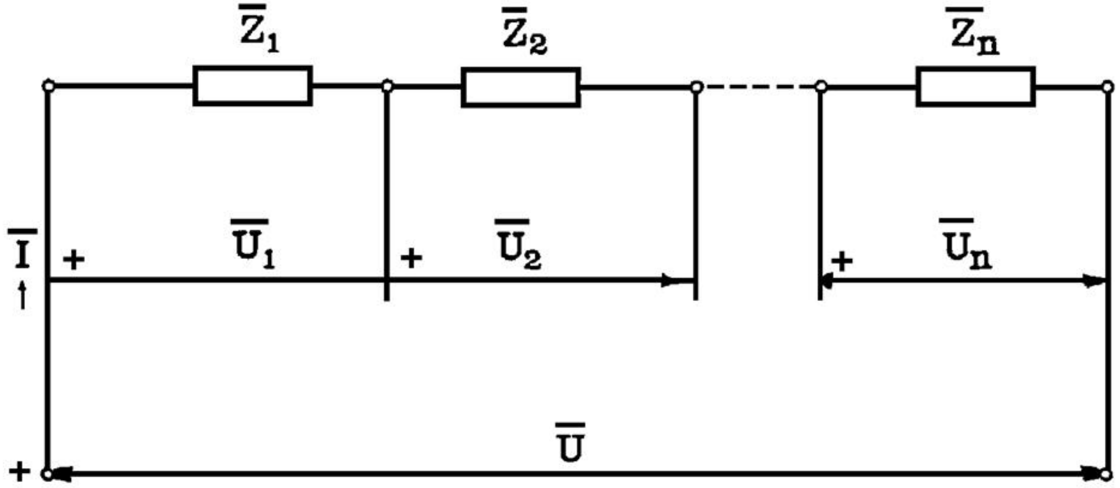
$$\overline{Y} = Ye^{j\alpha} = G + jB = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = \frac{1}{R + jX}$$

- ***G*** - konduktansa, ***B*** - susceptansa.
- Pri tome važe sledeće relacije koje povezuju impedansu i admitansu:
  - Ugao admitanse je suprotnog znaka od ugla impedanse $\alpha = -\varphi$
  - Moduo admitanse je $Y = 1/Z$
  - Konduktansa je $G = \frac{R}{R^2+X^2}$
  - Susceptansa je $B = -\frac{X}{R^2+X^2}$.
- Susceptansa ***B*** je (kao i ugao admitanse) uvek suprotnog znaka od reaktanse:
  - pozitivna je veličina ako je prijemnik pretežno kapacitivan ili
  - negativna ako je prijemnik pretežno induktivan.

5.4. Veze impedansi i admitansi

- Formule za rednu i paralelnu vezu su iste kao i za JS, ali **kod NS se mora isključivo raditi sa kompleksnim impedansama i/ili admitansama**.

Redna veza impedansi

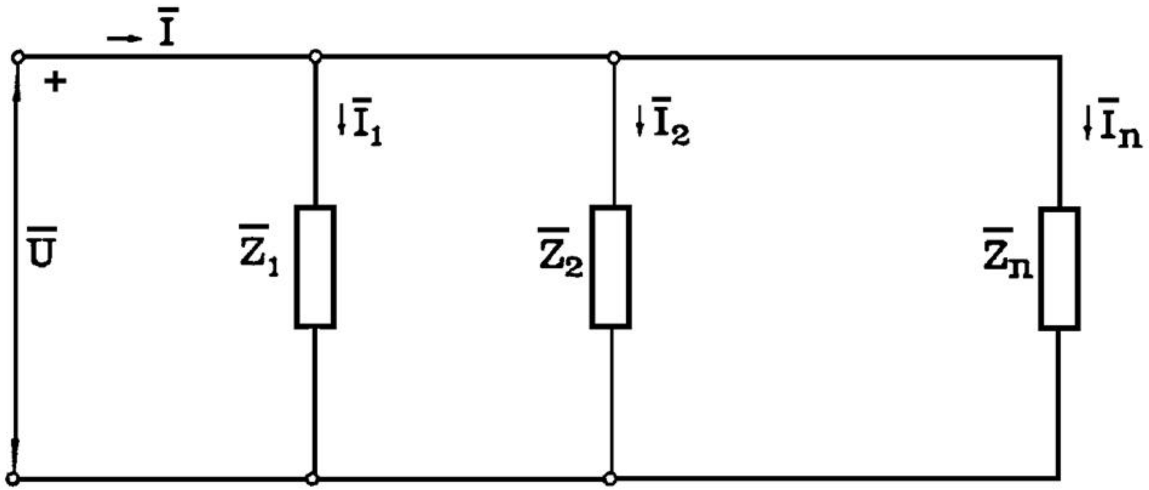


$$\overline{U} = \sum_{k=1}^{n} \overline{U}_k = \overline{I} \sum_{k=1}^{n} \overline{Z}_k$$

$$\overline{Z}_e = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Z}_k$$

$$\frac{1}{\overline{Y}_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{Y}_k}$$

Paralelna veza impedansi



$$\overline{I} = \sum_{k=1}^{n} \overline{I}_k = \overline{U} \sum_{k=1}^{n} \overline{Y}_k$$

$$\overline{Y}_e = \frac{\overline{I}}{\overline{U}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Y}_k$$

$$\frac{1}{\overline{Z}_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_k}$$

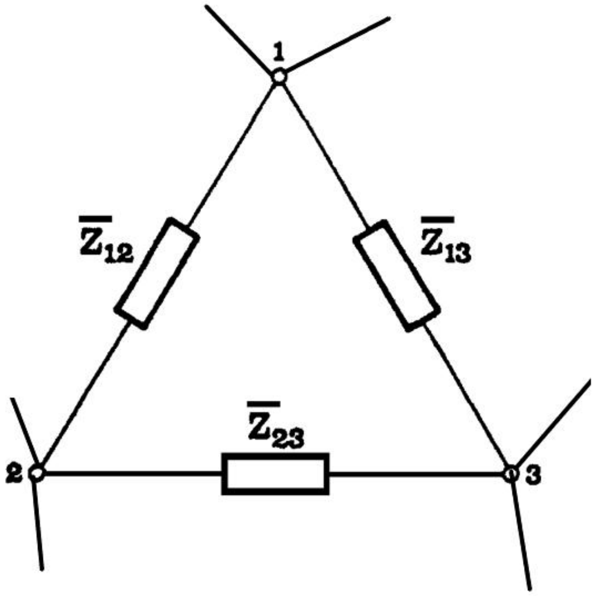
5.4. Veze impedansi i admitansi

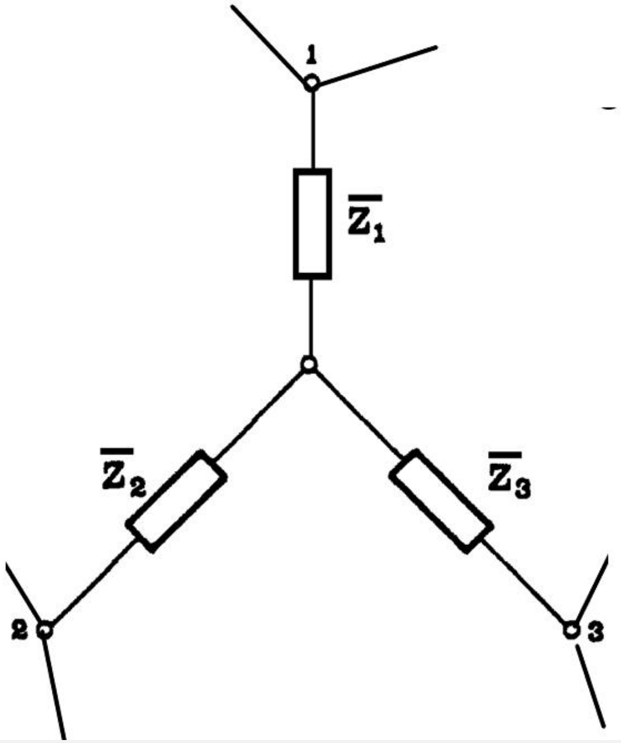
- Formule za transformaciju trogla u zvezdu i obrnuto su takođe iste kao i za JS, a isto važi i da se **kod NS mora isključivo raditi sa kompleksnim impedansama i/ili admitansama**.

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}$$





$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{13}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{13} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23}}$$

5.5. Snage u kolima NS

- U kolima naizmenične struje može se razlikovati nekoliko tipova snage:
  - Trenutna (jedinica je vat - W):

    $$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

  - **Prividna** (volt-amper - VA) - za prijemnike se može posmatrati kao ukupna snaga koja se troši na rezistivnim elementima i razmenjuje u reaktivnim elementima:

    $$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = |\bar{S}| = ZI^2 = YU^2$$

  - **Aktivna** (vat - W) - srednja vrednost trenutne snage tj. za prijemike je to snaga koja se troši na rezistivnim elementima:

    $$P = S\cos(\varphi) = RI^2 = GU^2$$

  - **Reaktivna** (volt-amper reaktivni - VAr ili var) - za prijemike je to snaga koja se razmenjuje na reaktivnim elementima (istog je znaka kao i reaktansa):

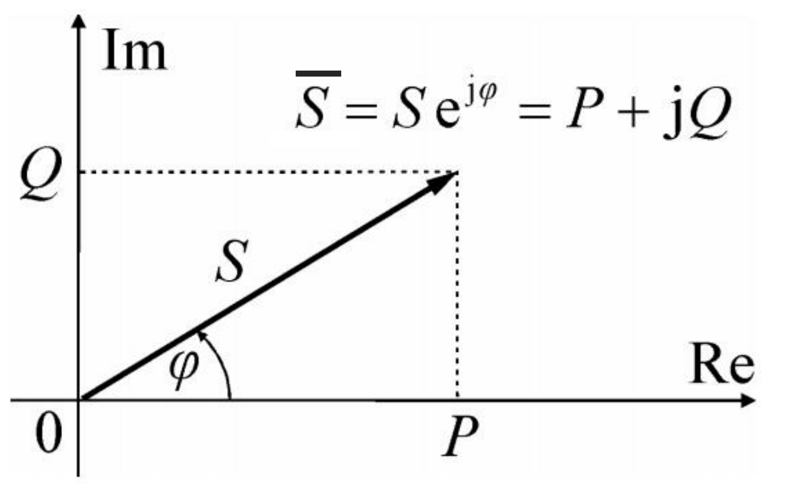
    $$Q = S\sin(\varphi) = XI^2 =- BU^2$$

  - **Kompleksna prividna** (volt-amper - VA) - ukupna snaga u kompleksnom obliku:

    $$\bar{S} = Se^{j\varphi} = UIe^{j(\theta-\psi)} = Ue^{j\theta} \cdot Ie^{-j\psi} = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

    $$\bar{S} = P + jQ = \bar{Z}I^2 = (R + jX)I^2 = \bar{Y}^*U^2 = (G - jB)U^2$$

5.5. Snage u kolima NS



snaga	izraz	jedinica
trenutna	$p(t) = u(t)i(t)$	W
srednja (aktivna)	$P = UI\cos\varphi$	W
reaktivna (jalova)	$Q = UI\sin\varphi$	VAr
kompleksna	$\bar{S} = \bar{U}\,\bar{I}^* = P + jQ$	VA
prividna (nominalna)	$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$	VA

- U kolima NS reaktivna snaga Q je nepoželjna jer predstvalja razmenu snage između generatora i reaktivnih potrošača koja se ne pretvara u aktivni rad.
- Ako provodnici koji povezuju generatore i potrošače imaju gubitke, deo snage se nepotrebno troši na ovu razmenu reaktivne energije. Zbog toga se teži da **faktor snage**, **$\cos(\varphi)$**, teži ka jedinici:

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} \rightarrow 1$$

5.5. Snage u kolima NS

- **Otpornik** ima samo aktvnu snagu, odnosno važi da je:

$$\overline{Z} = R + j0,\ \ \overline{Y} = G + j0$$

$$\overline{S} = P + j0,\ \ S = UI = P = RI^2 = GU^2,\ \ Q = 0,\ \ \cos(\varphi) = 1$$

- **Kalem** ima samo reaktivnu snagu koja je pozitivna, odnosno važi da je:

$$\overline{Z} = 0 + jX = 0 + j\omega L,\ \ \overline{Y} = 0 - j\frac{1}{\omega L}$$

$$\overline{S} = 0 + jQ,\ \ S = UI = Q,\ \ Q = XI^2 = \omega LI^2 =- BU^2 = \frac{U^2}{\omega L},\ \ P = 0,\ \ \cos(\varphi) = 0$$

- **Kondenzator** ima samo reaktivnu snagu koja je negativna, odnosno važi da je:

$$\overline{Z} = 0 + jX = 0 - j\frac{1}{\omega C},\ \ \overline{Y} = 0 + j\omega C$$

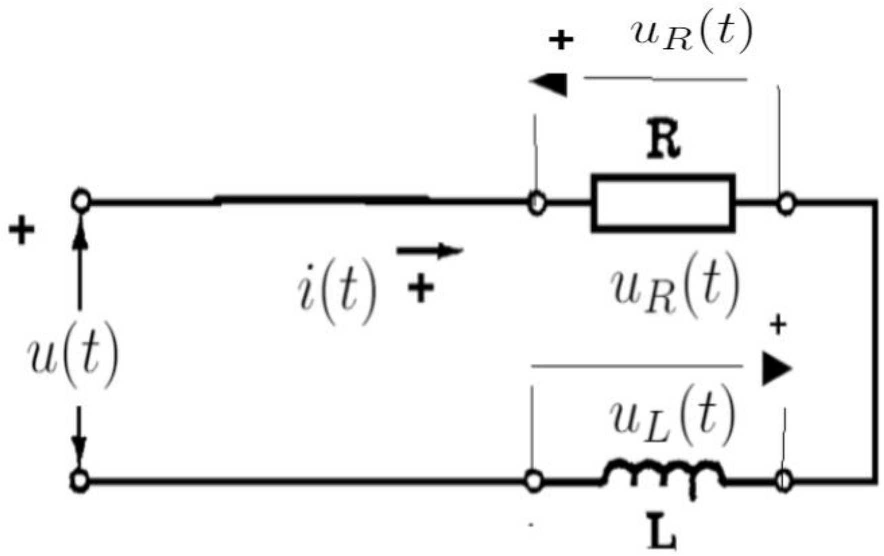
$$\overline{S} = 0 + jQ,\ S = UI = |Q|, Q = XI^2 =- \frac{I^2}{\omega C} =- BU^2 =- \omega CU^2,\ P = 0,\ \cos(\varphi) = 0$$

5.6. Rešavanje kola NS

- Za kola NS važe isti zakoni (I i II Kirhofov zakon) i teoreme (Tevenenova, Nortonova, superpozicije) kao i kod kola JS, te se ova kola mogu rešavati korišćenjem tri moguća pristupa.

  1. Rešavanje u vremenskom domenu, korišćenjem vremenskih izraza za napone i struje, diferencijalnih veza napona i struja na reaktivnim elementima, kao i trigonometrijskih relacija. Ovakav pristup je praktično neprihvatljiv za bilo koja složenija kola jer se dobijaju složeni sistemi diferencijalnih jednačina.
  2. Rešavanje kola korišćenjem fazorskih dijagrama. Koriste se relacije između efektivnih vrednosti napona i struja i uglovi koji zaklapaju fazori napona i struja na osnovnim elementima R, L i C. Sabiranje fazora se mora obavljati vektorski (grafički) ili analitički razlaganjem vektora. Ovakvim pristupom mogu se rešavati relativno složena kola, ali on i dalje nije praktičan za veoma složena kola sa puno elemenata.
  3. Rešavanje kola korišćenjem kompleksnog računa. Uvođenjem pojmova kompleksne impedanse i admitanse, diferencijalne relacije između napona i struja na reaktivnim elementima postaju analogne Omovom zakonu za otpornike. Dakle, mogu se primenjivati praktično sve metode uključujući Kirhofove zakone, MPČ, MKS, Tevenenovu teoremu, teoremu superpozicije i druge teoreme iz JS, ali se pri tome **obavezno moraju koristiti KOMPLEKSNI PREDSTAVNICI napona, potencijala i struja, kao i KOMPLEKSNE impedanse i/ili admitanse svih elemenata** !!!

5.7. Redno RL i RC kolo - fazori

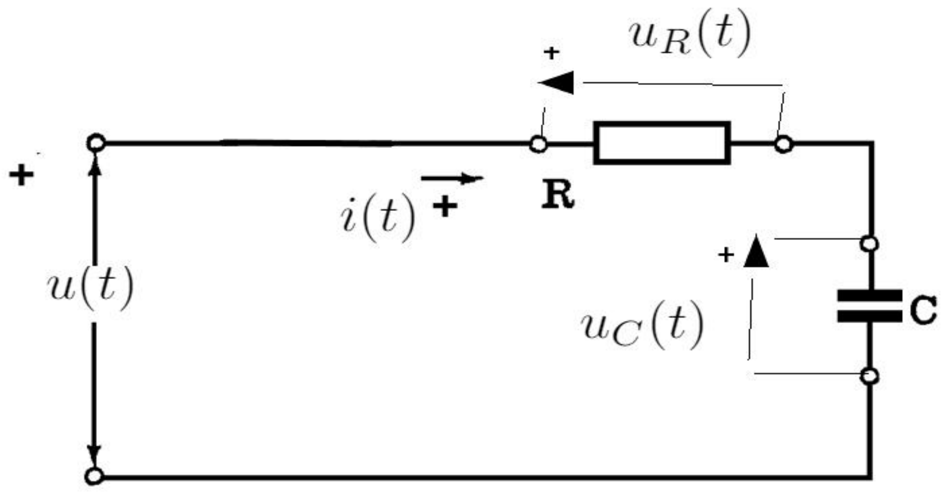


$$u(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L$$

$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$

$$\overline{U}_L = \omega L \angle \frac{\pi}{2} \overline{I}$$



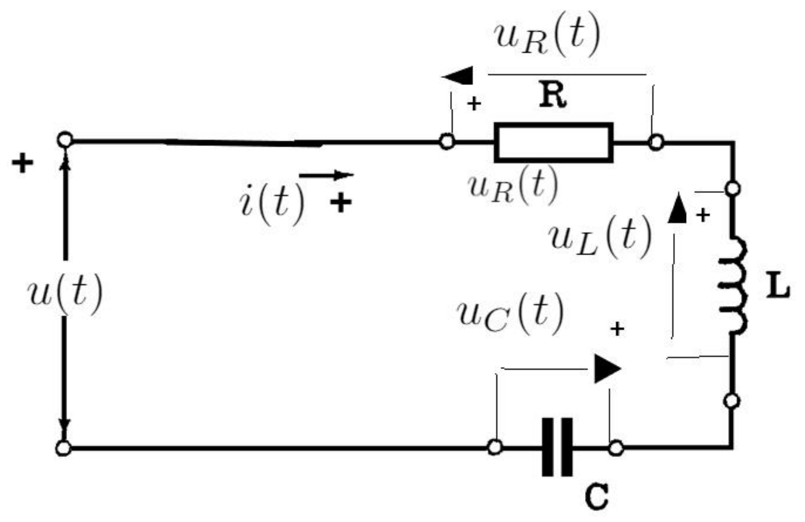
$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_C$$

$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$

$$\overline{U}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \overline{I}$$

5.8. Redno RLC kolo - fazori



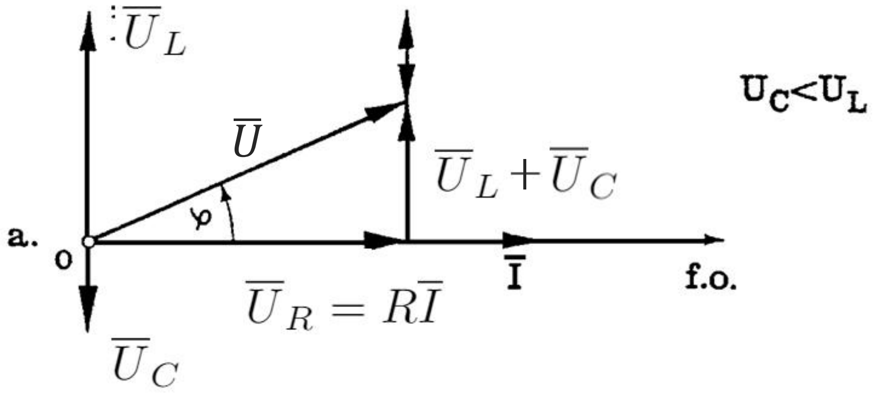
$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

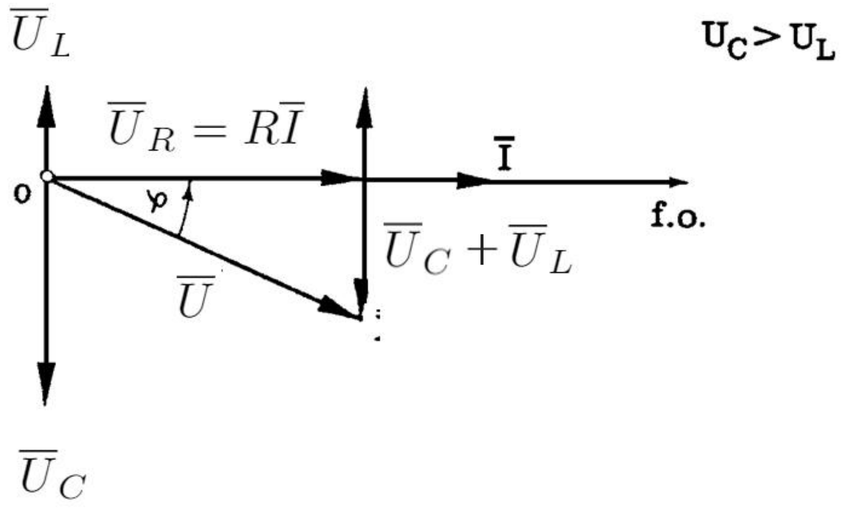
$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C$$

$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$

$$\overline{U}_L = \omega L \angle \frac{\pi}{2} \overline{I}$$

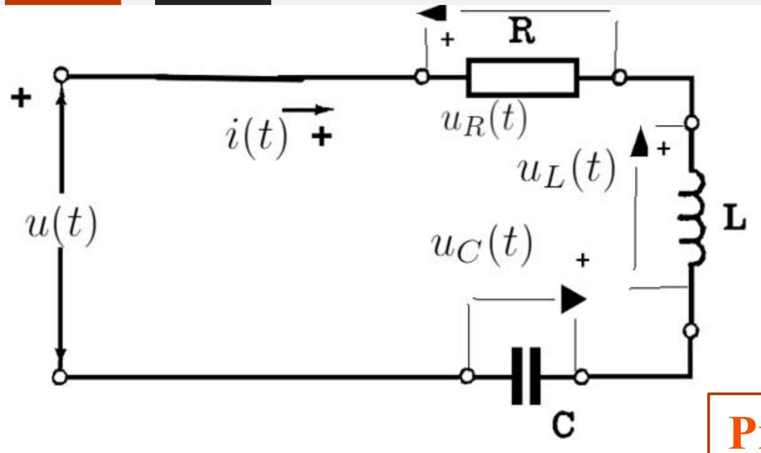
$$\overline{U}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \overline{I}$$

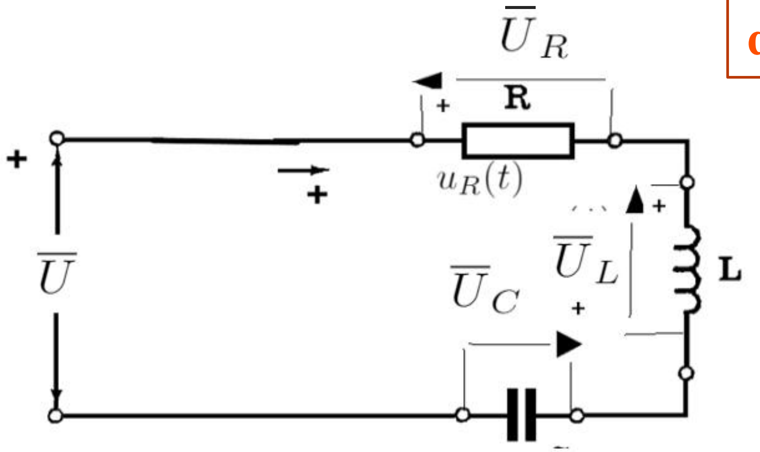




FAZORSKI DIJAGRAM NAPONA I STRUJE U KOLU NAIZMENIĆNE STRUJE SA R,L,C REDNO VEZANIM ELEMENTIMA

5.8. Redno RLC kolo - kompleksni račun





$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C \qquad \overline{U} = \overline{I}R + \overline{I}j\omega L + \overline{I}\frac{1}{j\omega C}$$

$$\overline{U} = Ue^{j0} = U \quad j\omega L = jX_L \quad \frac{1}{j\omega C} = -j|X_C|$$

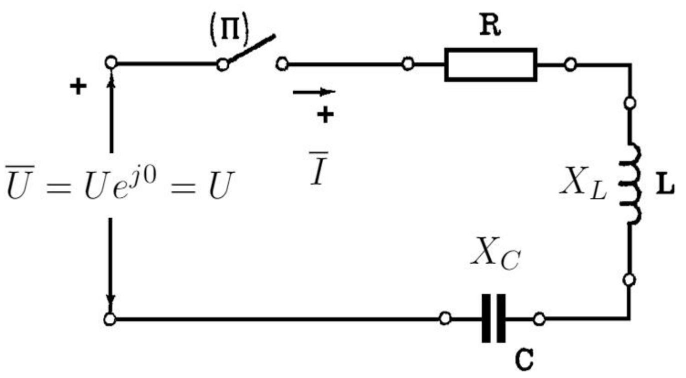
Pretpostavka da je faza 0

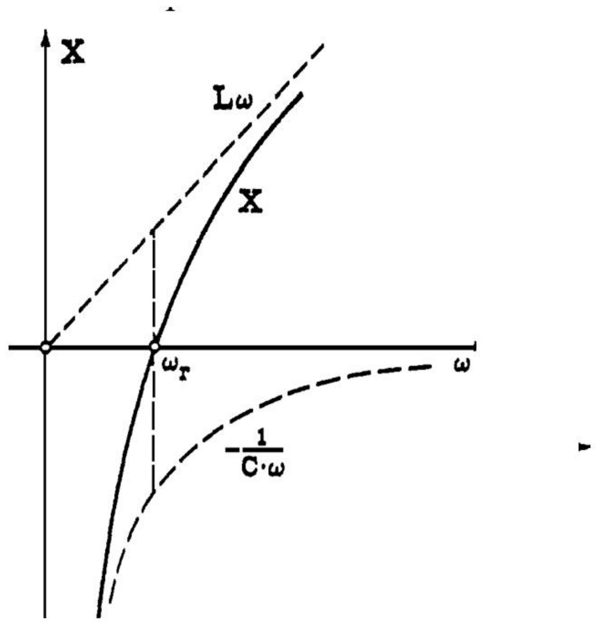
$$\overline{I} = \frac{U}{R + j(X_L - |X_C|)} \qquad \overline{Z} = R + j(X_L - |X_C|)$$

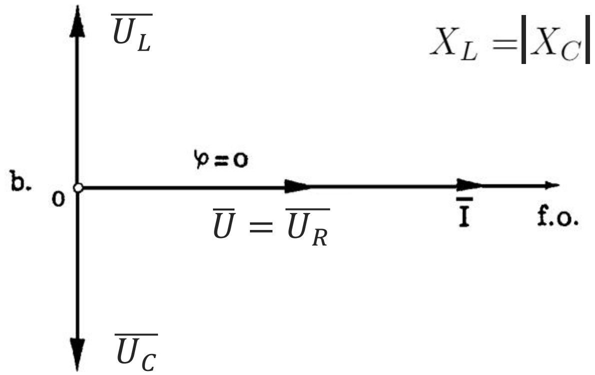
$$I = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - |X_C|)^2}} \qquad |Z| = Z = \sqrt{R^2 + (X_L - |X_C|)^2}$$

5.8. Redno RLC kolo - rezonancija

- Rezonancija u RLC kolu NS nastaje kada je ukupna impedansa minimalna, odnosno struja maksimalna. U tom slučaju se reaktanse kalema i kondenzatora međusobno poništavaju.







$$X_L = |X_C|$$

$$\overline{I} = \frac{U}{R + j(X_L - |X_C|)}$$

$$X_L = |X_C| \Rightarrow \overline{Z} = Z = R$$

$$\overline{I} = I = \frac{U}{R} = I_{max}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

5.9. Popravka faktora snage

- Popravka faktora snage je problem koji je specifičan za elektrodistributivne sisteme.
- U praksi, prijemnici su retko samo aktivni ili samo reaktivni. Na primer, električni motor je prijemnik koji je aktivan jer se električna energija se pretvara u mehaničku, ali i reaktivan zbog induktivnosti namotaja koji čine motor.
- Za prijemnike velikih snaga teži se da se poveća faktor snage tako da postane blizak jedinici. Da bi se to postiglo, u sistem se dodaju reaktivni elementi.
- Dodavanje reaktivnih elemenata da bi se povećao faktor snage naziva se **popravka faktora snage koji bi u idealnom slučaju trebalo da bude jednak jedinici**.
- Najčešći slučaj je da se neki induktivni element (motor) kompenzuje dodavanjem kondenzatora koji se sa priključcima motora vezuje paralelno i ovaj slučaj je dalje detaljnije analiziran.

5.9. Popravka faktora snage

- Faktor snage induktivnog potrošača sa slike:

$$P = RI_P^2,\ Q = \omega L I_P^2 = \frac{\omega L U^2}{R^2+(\omega L)^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

- Nakon kompenzacije:

$$P_{uk} = P,\ Q_{uk} = Q + Q_C$$

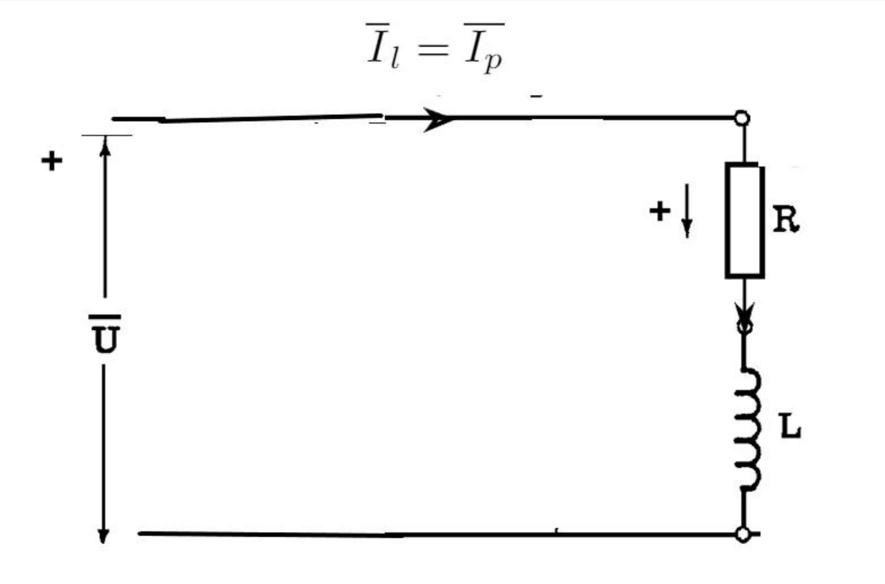
$$\cos(\varphi) = \frac{P}{\sqrt{P^2+(Q+Q_C)^2}} = 1 \Rightarrow Q + Q_C = 0$$

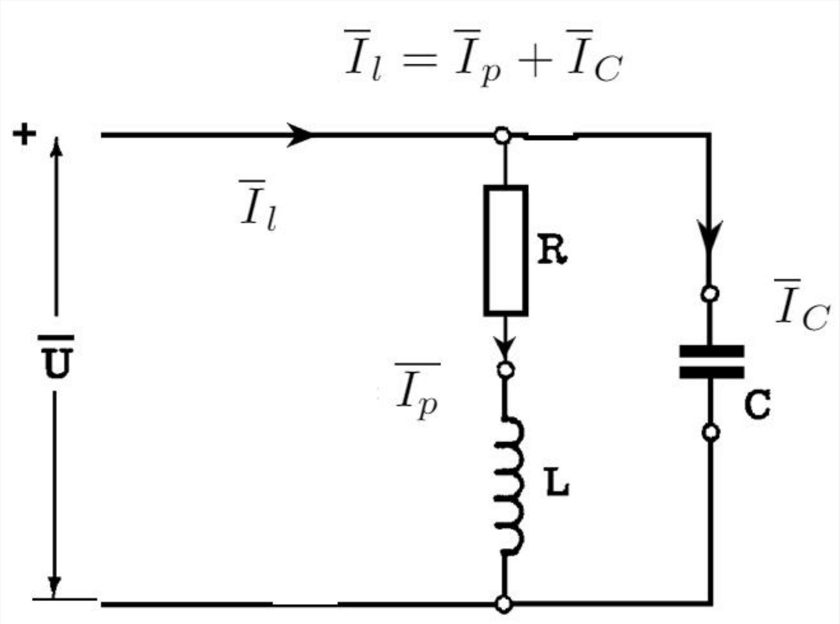
$$Q_C = -Q$$

$$-\omega C U^2 = -\frac{\omega L U^2}{R^2+(\omega L)^2}$$

$$C = \frac{L}{R^2+(\omega L)^2}$$

- Povezivanjem ovog C paralelno potrošaču dobija se ukupni faktor snage jednak 1.





5.10. Trofazni sistemi

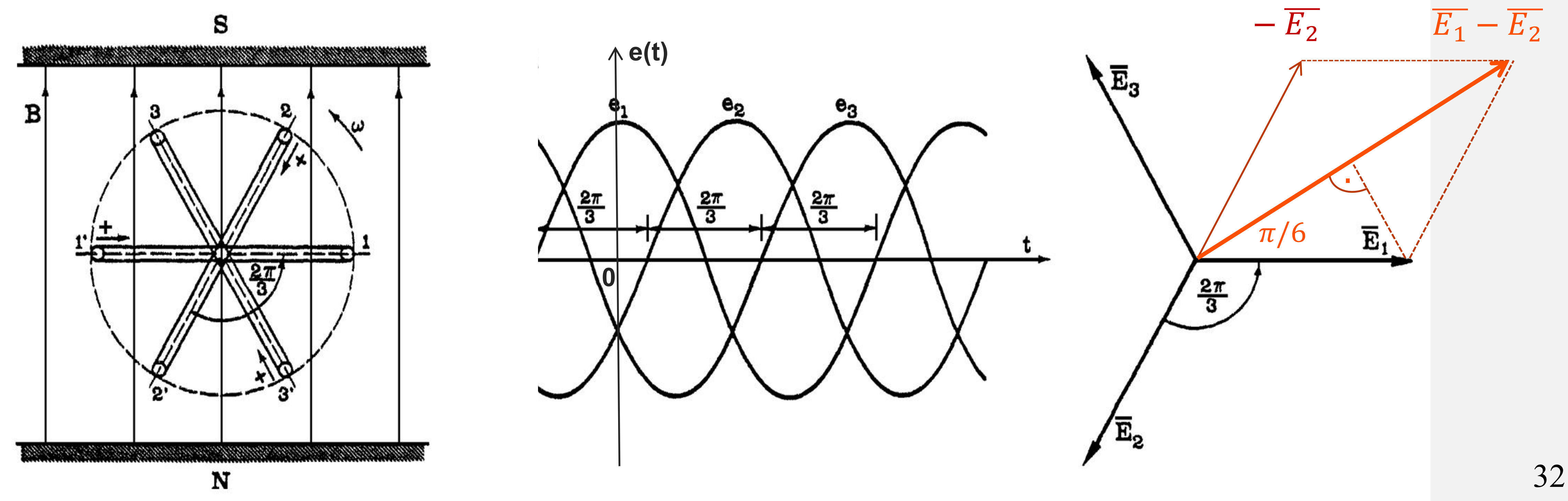
- Tri namotaja prostorno su pomerena za $120° = 2\pi/3$ rad i rotiraju u homogenom magnetnom polju. Indukuju se tri fazno pomerena napona:

$$e_1(t) = E_m\cos(\omega t)$$
$$e_2(t) = E_m\cos(\omega t - 2\pi/3)$$
$$e_3(t) = E_m\cos(\omega t - 4\pi/3)$$

$$\overline{E}_1 = Ee^{j0}$$
$$\overline{E}_2 = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}}$$
$$\overline{E}_3 = Ee^{j\frac{2\pi}{3}}$$

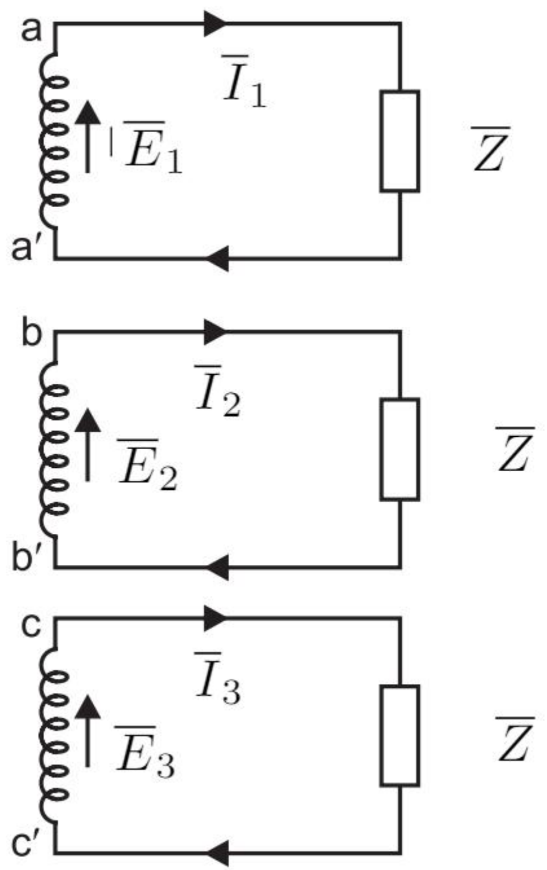
$$\overline{E_1} + \overline{E_2} + \overline{E_3} = 0$$

$$\overline{E_1} - \overline{E_2} = \sqrt{3}Ee^{j\pi/6}$$



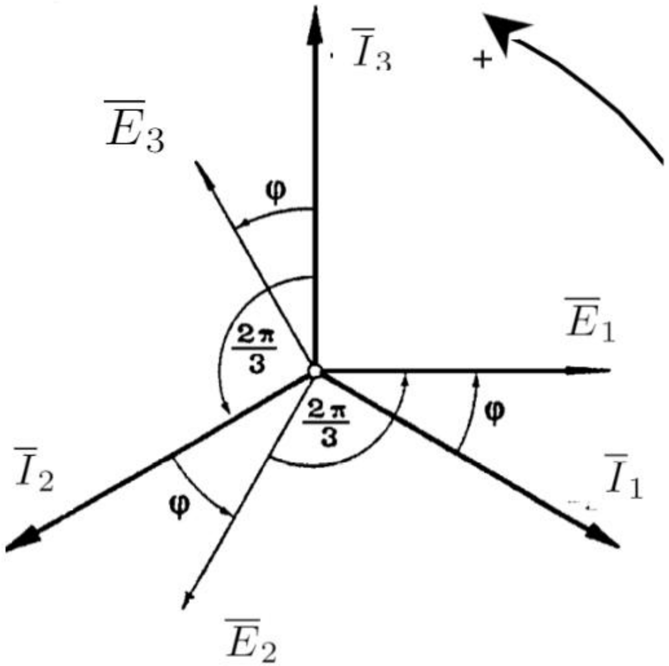
5.10. Trofazni sistemi

- Razmatraćemo samo **simetrični trofazni sistem**, svaka **faza** je opterećena identičnom impedansom $\overline{Z} = Ze^{j\varphi}$. **Fazne struje** su onda takođe međusobno pomerene za $120° = 2\pi/3$, a u odnosu na odgovarajuće **fazne napone** za ugao impedanse φ.



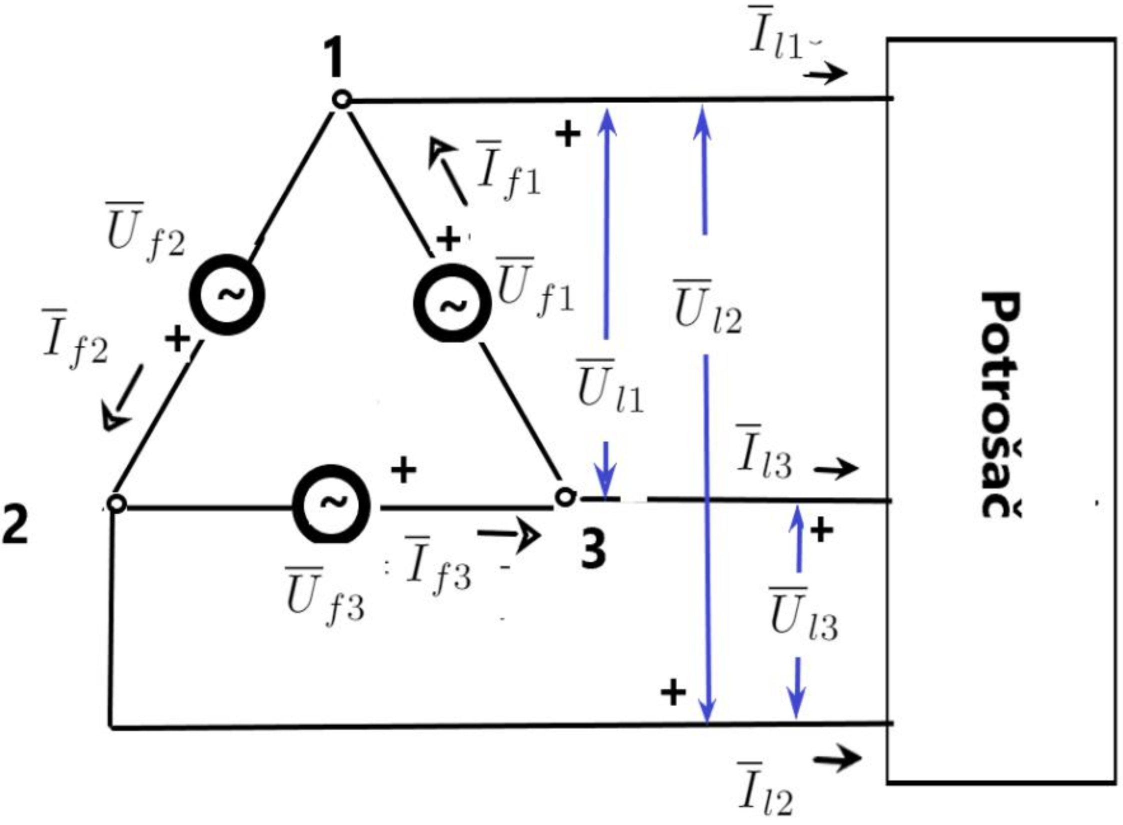
$$\overline{E}_1 = Ee^{j0} \qquad \overline{I}_1 = Ie^{-j\varphi}$$
$$\overline{E}_2 = Ee^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad \overline{I}_2 = Ie^{-j\frac{2\pi}{3}-j\varphi}$$
$$\overline{E}_3 = Ee^{j\frac{2\pi}{3}} \qquad \overline{I}_3 = Ie^{j\frac{2\pi}{3}-j\varphi}$$

$$\bar{S} = 3\overline{Z}I^2$$
$$\bar{S} = 3ZI^2e^{j\varphi}$$
$$S = 3ZI^2$$
$$P = 3ZI^2\cos(\varphi)$$
$$Q = 3ZI^2\sin(\varphi)$$



5.10. Trofazni sistemi

- Razmatraćemo **simetrični trofazni sistem** gde su generatori povezani u **trougao**.
- Za prenos energije prema potrošaču koriste se tri voda, na njima su takozvani **linijski** naponi i struje ($U_{l1}, U_{l2}, U_{l3}, I_{l1}, I_{l2}, I_{l3}$).
- Naponi i struje generatora nazivaju se **faznim** ($U_{f1}, U_{f2}, U_{f3}, I_{f1}, I_{f2}, I_{f3}$).



$$\overline{I}_{f1} = Ie^{-j\varphi}$$
$$\overline{I}_{f2} = Ie^{-j\varphi - j\frac{2\pi}{3}}$$
$$\overline{I}_{f3} = Ie^{-j\varphi + j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\overline{U}_{l1} = \overline{U}_{f1} = Ue^{j0}$$
$$\overline{U}_{l2} = \overline{U}_{f2} = Ue^{-j\frac{2\pi}{3}}$$
$$\overline{U}_{l3} = \overline{U}_{f3} = Ue^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

$$U_{l1} = U_{l2} = U_{l3} = U_l$$
$$U_{f1} = U_{f2} = U_{f3} = U_f$$

$$\overline{I_{l1}} = \overline{I_{f1}} - \overline{I_{f2}} = \sqrt{3}Ie^{-j\varphi+\pi/6}$$
$$\overline{I_{l2}} = \overline{I_{f2}} - \overline{I_{f3}} = \sqrt{3}Ie^{-j\varphi-\pi/2}$$
$$\overline{I_{l3}} = \overline{I_{f3}} - \overline{I_{f1}} = \sqrt{3}Ie^{-j\varphi+5\pi/6}$$

$$I_{l1} = I_{l2} = I_{l3} = I_l$$
$$I_{f1} = I_{f2} = I_{f3} = I_f$$

$$\boxed{\boldsymbol{I_l = \sqrt{3}I_f}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{U_l = U_f}}$$

5.10. Trofazni sistemi

- Razmatraćemo **simetrični trofazni sistem** gde su generatori povezani u **zvezdu**.
- Ka potrošaču idu tri voda sa **linijskim** naponima i strujama ($U_{l1}, U_{l2}, U_{l3}, I_{l1}, I_{l2}, I_{l3}$). Naponi i struje generatora nazivaju se **faznim** ($U_{f1}, U_{f2}, U_{f3}, I_{f1}, I_{f2}, I_{f3}$).

$$\overline{U}_{f1} = Ue^{j0} \qquad \overline{U}_{l1} = \overline{U}_{f1} - \overline{U}_{f2}$$

$$\overline{U}_{f2} = Ue^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad \overline{U}_{l2} = \overline{U}_{f2} - \overline{U}_{f3}$$

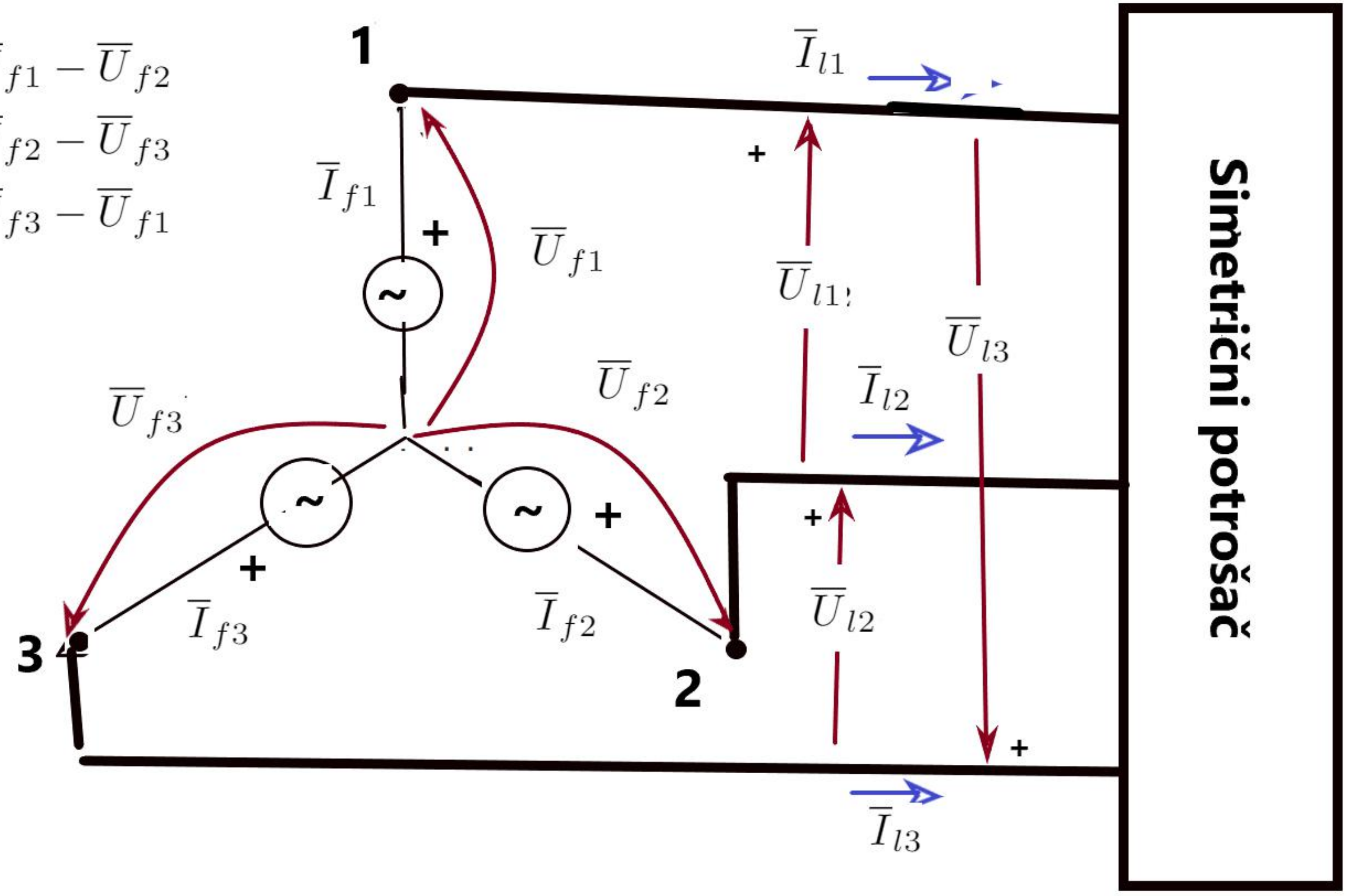
$$\overline{U}_{f3} = Ue^{+j\frac{2\pi}{3}} \qquad \overline{U}_{l3} = \overline{U}_{f3} - \overline{U}_{f1}$$

$$\overline{U}_{l1} = \sqrt{3}Ue^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\overline{I}_{l1} = \overline{I}_{f1} = Ie^{-j\varphi}$$

$$\overline{I}_{l2} = \overline{I}_{f2} = Ie^{-j\varphi - j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\overline{I}_{l3} = \overline{I}_{f3} = Ie^{-j\varphi + j\frac{2\pi}{3}}$$



$$\boxed{I_l = I_f}$$

$$\boxed{U_l = \sqrt{3}U_f}$$

5.10. Trofazni sistemi

- Za **simetrični trofazni sistem** gde su **potrošači** povezani u **trougao** ili **zvezdu** relacije između linijskih i faznih napona i struja su iste.
- Za potrošač vezan u trougao važi:

$$\boldsymbol{U_l = U_f,\, I_l = \sqrt{3}I_f}$$

- Za potrošač vezan u zvezdu važi:

$$\boldsymbol{U_l = \sqrt{3}U_f,\, I_l = I_f}$$

- Za snage na simetričnom trofaznom potrošaču $\bar{Z} = Ze^{j\varphi}$ (bez obzira da li je povezan u trougao ili zvezdu) važi sledeće:

$$\bar{S} = 3ZI_f^2e^{j\varphi} = 3U_fI_fe^{j\varphi} = \sqrt{3}U_lI_le^{j\varphi}$$
$$S = 3ZI_f^2 = 3U_fI_f = \sqrt{3}U_lI_l$$
$$P = 3ZI_f^2\cos(\varphi) = 3U_fI_f\cos(\varphi) = \sqrt{3}U_lI_l\cos(\varphi)$$
$$Q = 3ZI_f^2\sin(\varphi) = 3U_fI_f\sin(\varphi) = \sqrt{3}U_lI_l\sin(\varphi)$$

5.11. Primeri

- **<u>Primer 1</u>**. Odrediti kompleksni predstavnik za napon $u(t) = 10\cos(341t + \pi/4)$ V.
- **<u>Primer 2</u>**. Odrediti talasni (vremenski) oblik napona čiji je kompleksni predstavnik $\overline{U} =- 5\sqrt{2} - j5\sqrt{2}$ V, *f*=100 Hz, ako se za predstavljanje vremenskog oblika prostoperiodične veličine koristi kosinusna funkcija.
- **<u>Primer 3</u>**. Odrediti talasni (vremenski) oblik struje čiji je kompleksni predstavnik $\overline{I} =- 10\sqrt{3} + j10$ A, *ω*=314 rad/s, ako se za predstavljanje vremenskog oblika prostoperiodične veličine koristi kosinusna funkcija.
- **<u>Primer 4</u>**. Odrediti kompleksnu impedansu $\overline{Z}$, ako je poznato da je vremenski oblik napona na impedansi $u(t) = 30\cos(314t - 15°)$ V i $i(t) = 15\cos(314t + \pi/12)$ A .
- **<u>Primer 5</u>**. Na red su povezani otpornik otpornosti 20Ω, kapacitivni prijemnik rezistanse 5Ω i reaktivne otpornosti 150Ω i induktivni prijemnik rezistanse 25Ω i reaktivne otpornosti 100Ω. Odrediti impedansu i admitansu, kao i kompleksnu impedansu i admitansu ove redne veze prijemnika. Da li je redna veza prijemnika pretežno induktivna ili kapacitivna?
- **<u>Primer 6</u>**. Ako kroz prijemnik impedanse $\overline{Z} = 20 + j10\ \Omega$, postoji kompleksna struja $\overline{I} = 4 + j3$ A, odrediti kompleksni napon na prijemniku, njegovu kompleksnu (prividnu) snagu, aktivnu snagu, reaktivnu snagu i prividnu snagu.
- **<u>Primer 7</u>**. Za kolo sa jednim poznatim naponskim generatorom $\overline{E}$ i dve poznate impedanse $\overline{Z_1} = R_1 + jX_1$ i $\overline{Z_2} = R_2 + jX_2$, odrediti sve napone i struje u kolu, ako su svi elementi kola vezani a) redno, b) paralelno.
- **<u>Primer 8</u>**. Induktivni potrošač $\overline{Z} = 3 + j4\ \Omega$ je povezan je na napon efektivne vredonsti U=10 V i učestanosti 1 rad/s. Odrediti struju, aktivnu i reaktivnu snagu i faktor snage potrošača. Koliko treba da iznosi kapacitivnost kondenzatora koji se povezuje paralelno potrošaču da bi ukupni faktor snage bio jednak 1 (kompenzovan potrošač)?
- **<u>Primer 9</u>**. Na trofazni sistem napona 3×100 V, povezan je simetričan trofazni potrošač čija je jedna impedansa $\overline{Z} = 3 + j4\ \Omega$. Odrediti linijske i fazne napone i struje i kompleksnu snagu na trofaznom potrošaču, ako je potrošač povezan u a) trougao, b) zvezdu.
- *Potražite na sajtu predmeta još primera...* ***NAPOMENA: voditi računa da se u materijalima iz prethodnih godina za predstavaljanje prostoperiodičnih napona i struja koristila <u>sinusna funkcija</u>!***