



Elektrotehnika

5. Naizmenične struje

5. Naizmenične struje

5.1. Parametri sinusoide

5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

5.3. R, L, C u kolima naizmenične

5.3.1. Otpornik

5.3.2. Kalem

5.3.3. Kondenzator

5.4. Veze impedansi i admitansi

5.5. Snage u kolima naizmenične struje

5.6. Rešavanje kola NS

5.7. Redno RL i RC kolo

5.8. Redno RLC kolo i rezonancija

5.9. Popravka faktora snage

5.10. Trofazni sistemi

5.11. Primeri

5.1. Parametri sinusoide

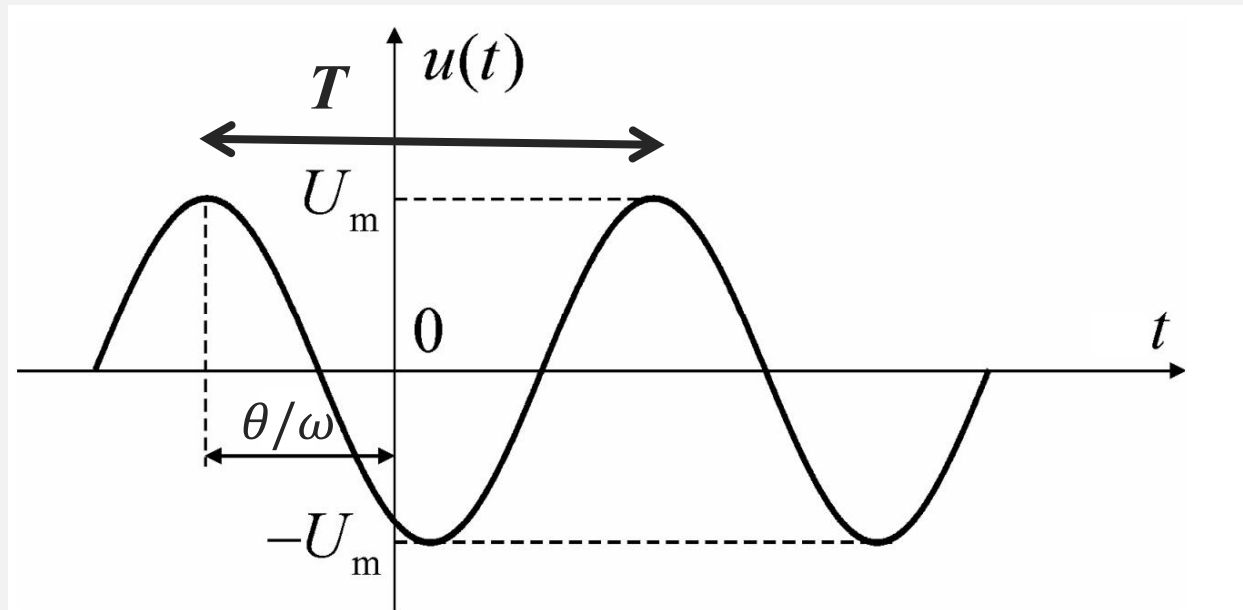
- U kolima naizmeničnih struja (NS) naponi i struje su prostoperiodične veličine (sinusne ili kosinusne).
- Parametri prostoperiodične veličine $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$ su:

- Amplituda U_m ili efektivna vrednost $U = U_m/\sqrt{2}$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = U_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \theta) dt} = U_m \sqrt{\frac{1}{2T} \int_0^T (1 + \cos(2\omega t + 2\theta)) dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

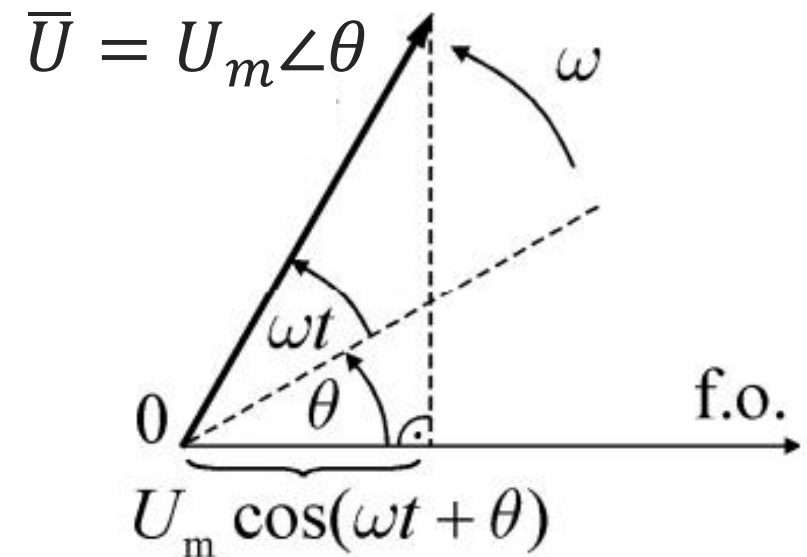
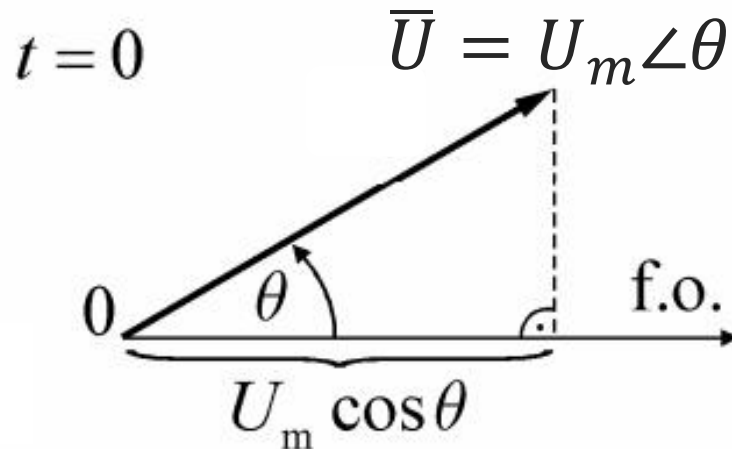
(Note: In the original image, red arrows point from the terms $\cos(2\omega t + 2\theta)$ in the integral to $=T$ and $=0$ respectively, indicating their integration over one full period.)

- Perioda T , učestanost (frekvencija) $f = \frac{1}{T}$ ili kružna učestanost $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
- Početna faza θ .



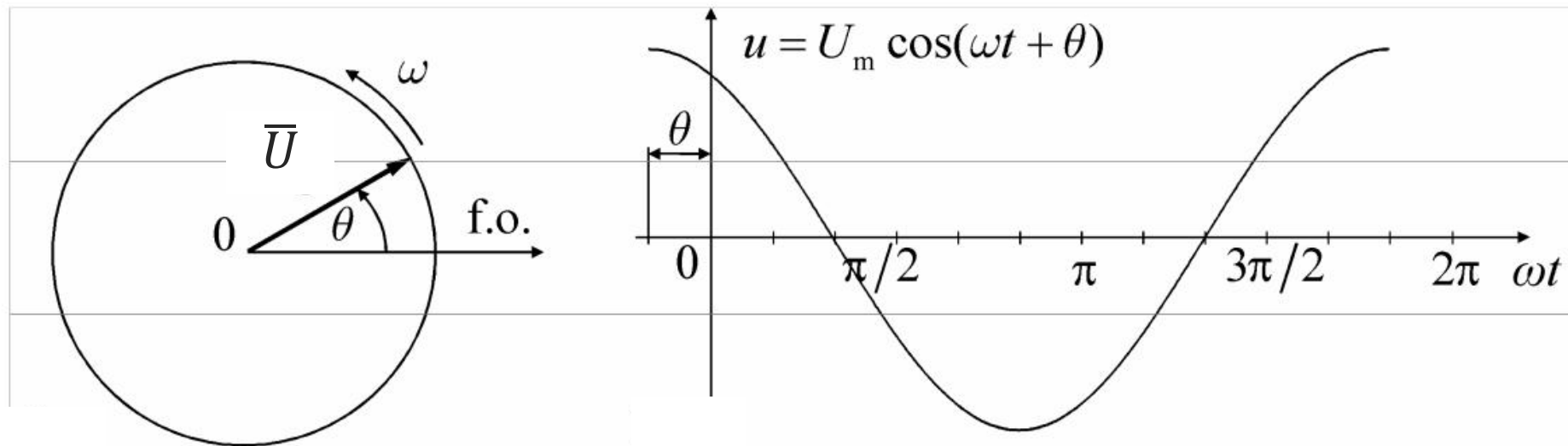
5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

- Prostoperiodična veličina $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$ može se predstaviti kao projekcija na apscisnu osu vektora amplitude U_m i početne faze θ koji rotira ugaonom brzinom ω .
- Ovakvi rotirajući vektori se nazivaju **fazorima**. Fazori se crtaju usvajajući neki fiksni početni trenutak, na primer $t = 0$: $u(0) = U_m \cos(\theta)$ i označavaju sa $\bar{U} = U_m \angle \theta$.
- U predstavljanju naizmeničnih napona i struja najčešće se umesto amplitude U_m koristi efektivna vrednost $U = U_m / \sqrt{2}$, pa fazor postaje $\bar{U} = U \angle \theta$.



5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

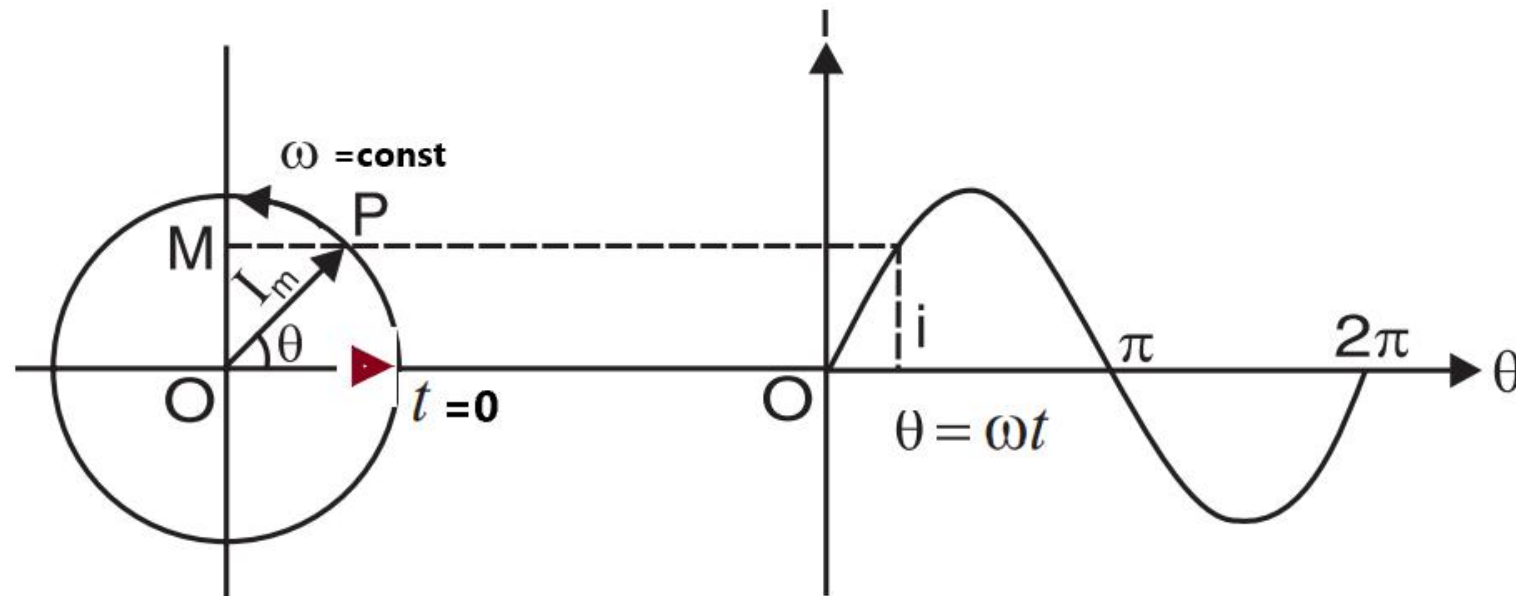
- Projekcija rotirajućeg vektora (fazora) na apscisnu osu (zapravo faznu osu u odnosu na nju se meri početna faza) daje prostoperiodičnu veličinu:
$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta) .$$
- Slično tome, projekcija fazora na oordinatnu osu (upravna na faznu osu) daje prostoperiodičnu veličinu:
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) .$$
- Tako da se fazorima mogu predstavljati bilo **sinusne** ili **kosinusne** funkcije, ali **po unapred usvojenom dogovoru**.



5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

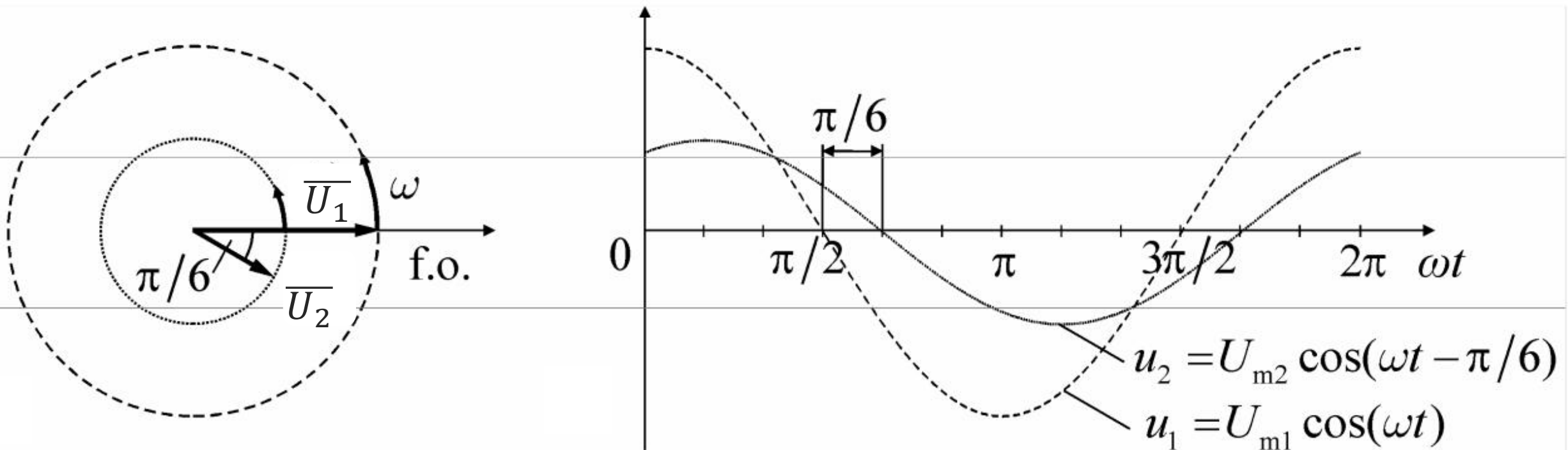
- Primer sinusne predstave struje u vremenskom domenu koja se dobija kao projekcija na osu upravnu na faznu osu $i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta)$.

$$OM = OP \sin \theta = I_m \sin \omega t = i$$



5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

- Pošto svi fazori koji predstavljaju naizmenične napone i struje u jednom kolu rotiraju istom ugaonom brzinom ω , njihov međusobni položaj (fazna razlika) ostaje isti u svakom trenutku vremena.
- Zato se može usvojiti da je $t=0$ i kolo analizirati pomoću fazora koji su “zaustavljeni” u početnom trenutku, bez gubitka opštosti analize.



5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

- Rotirajući vektori mogu se predstaviti i kompleksnim brojevima.

- Za kompleksni broj koji predstavlja naizmenični napon važi:

$$\overline{U_m(j\omega)} = U_m e^{j(\omega t + \theta)} = U_m \cos(\omega t + \theta) + jU_m \sin(\omega t + \theta)$$

- Kompleksni predstavnik $\overline{U_m(j\omega)}$ u kompleksnoj ravni rotira, kao i fazor u faznoj ravni, ugaonom brzinom ω .
- Kompleksni brojevi se u ovom kursu obeležavaju **nadvučenim velikim slovom $\bar{U}$** (za napon), ali se često u literaturi koristi i **podvlačenje $\underline{U}$** kao oznaka kompleksnog broja (*u ovoj prezentaciji će se eventualno na pojedinim slikama i formulama preuzetim iz knjiga sa drugih fakulteta koristiti podvlačenje*).
- Projekcija na realnu osu daje kosinusni napon:

$$u(t) = \text{Re}(\overline{U_m(j\omega)}) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

- Projekcija na imaginarnu osu daje sinusni napon:

$$u(t) = \text{Im}(\overline{U_m(j\omega)}) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$

5.2. Kompleksni predstavnici i fazori

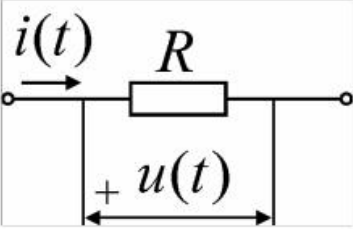
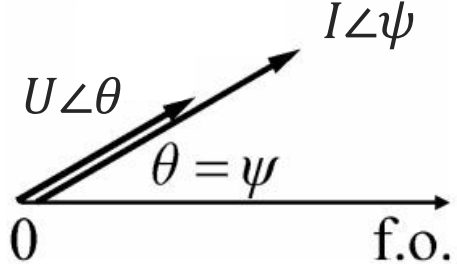
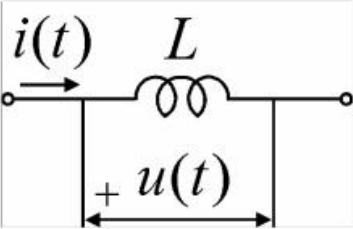
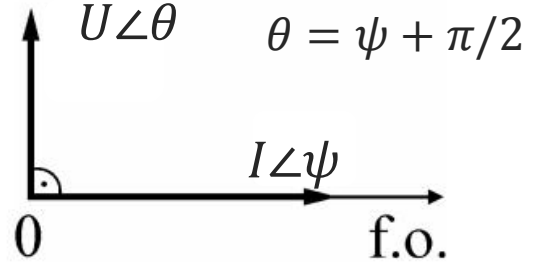
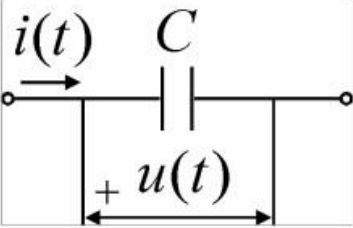
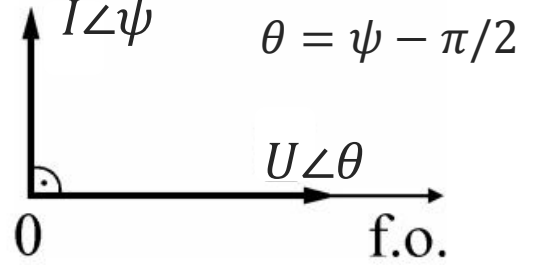
- Ako u kolu postoji samo jedna kružna učestanost ω , tada može da se usvoji da se kompleksni broj “zamrzne” u trenutku $t=0$.
- Ako se još i umesto amplitude koristi efektivna vrednost za predstavljanje napona (ili struja), tada se kao kompleksni predstavnik napona može usvojiti:

$$\bar{U} = Ue^{j\theta} \text{ (komp. oblik)} \Leftrightarrow \text{(vrem. oblik)} u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta) \text{ ili}$$

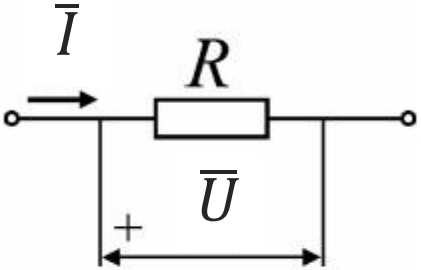
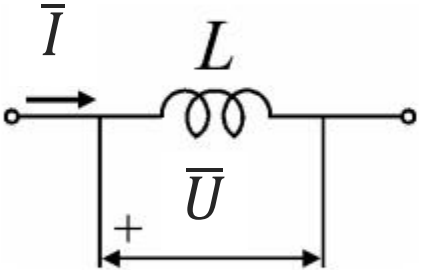
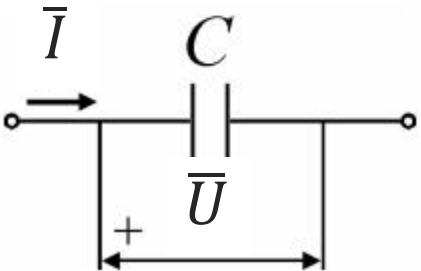
$$\bar{U} = Ue^{j\theta} \text{ (komp. oblik)} \Leftrightarrow \text{(vrem. oblik)} u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

- Preslikavanje iz vremenskog u kompleksni oblik i obrnuto je jednoznačno!
- Potrebno je da se unapred dogovori da li će se koristiti **sin** ili **cos** u reprezentaciji napona i struja u vremenskom obliku. S obzirom da je **$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$** i **$\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$** razlika se svodi na pomeraj u fazi.
- **NAPOMENA:** Na ovom kursu će se od 2024/25 godine koristiti **kosinusna funkcija**, ali u knjizi sa Saobraćajnog fakulta i primerima od prethodnih godina u dodatnim materijalima na predmetu **koristila se sinusna funkcija!**

5.3. R, L, C u kolima NS - fazori napona i struja

Prijemnici	Osnovna relacija	$Z = \frac{U}{I}$	$\varphi = \theta - \psi$	Fazorski dijagram
	$u = Ri$	R	$\varphi = 0$	
	$u = L \frac{di}{dt}$	ωL	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	
	$i = C \frac{du}{dt}$	$\frac{1}{\omega C}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	

5.3. R, L, C u kolima NS - kompleksni predstavnici

Element	Impedansa: $\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$	Z	φ	Admitansa: $\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}}$
	R	R	0	$G = \frac{1}{R}$
	$j\omega L$	ωL	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{j\omega L}$
	$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$	$\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$	$j\omega C$

5.3.1. Otpornik

- Za napon i struju na otporniku važi:

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta) = RI\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

- Važi Omov zakon i za efektivne vrednosti:

$$U = RI$$

- A napon i struja su u fazi:

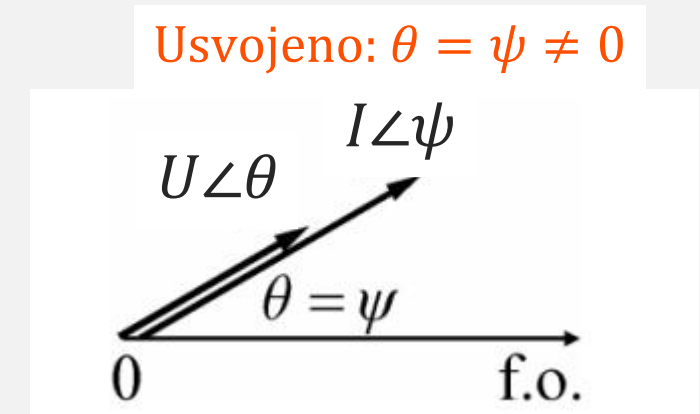
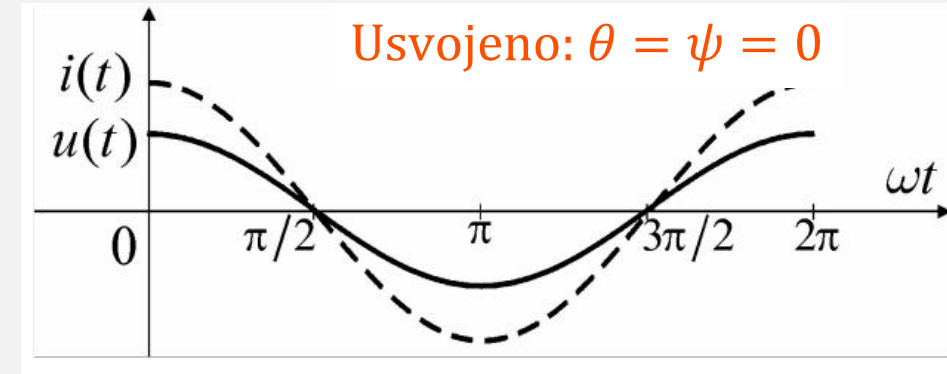
$$\theta = \psi$$

- U kompleksnom domenu je impedansa otpornika:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \frac{RIe^{j\psi}}{Ie^{j\psi}} = R \text{ (} R \text{ je rezistansa)}$$

- Kompleksna admitansa je:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} = G \text{ (} G \text{ je konduktansa)}$$



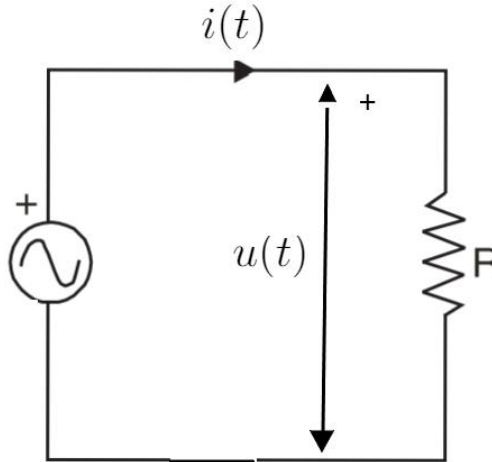
5.3.1. Otpornik

- Za napon i struju na otporniku u **sinusnoj formi** važe analogne relacije i isti zaključci o vezi efektivnih vrednosti i faza napona i struje.

Usvojeno: $\theta = 0$

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$$

$$\bar{U} = U \angle 0$$

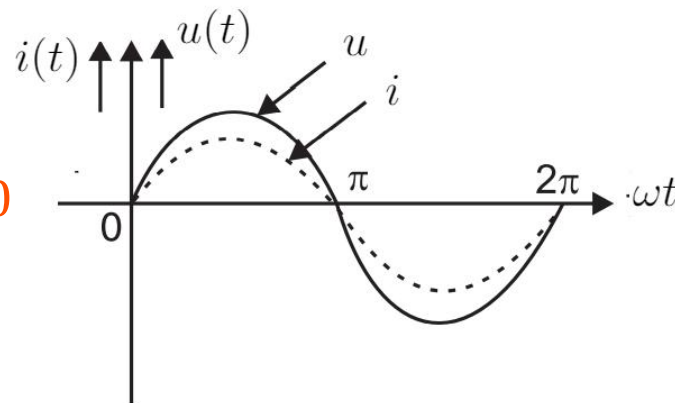


$$i(t) = \frac{1}{R} u(t)$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{R} \sin(\omega t) \quad \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = R$$

$$\bar{I} = \frac{U}{R} \angle 0$$

Usvojeno: $\theta = 0$



$$\bar{I} = \frac{U}{R} \angle 0$$



5.3.2. Kalem

- Za napon i struju kalema važi:

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta) = -\omega LI\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \omega LI\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi + \pi/2)$$

- Za efektivne vrednosti važi:

$$U = \omega LI$$

- A struja kasni za naponom (ili napon prednjači) za $\pi/2$:

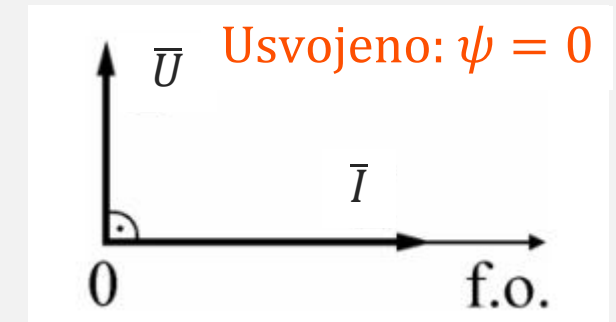
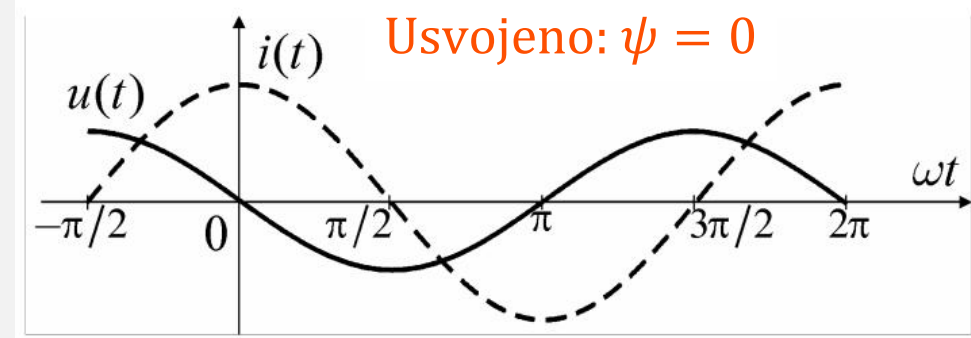
$$\theta = \psi + \pi/2$$

- U kompleksnom domenu je impedansa kalema:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \frac{\omega LIe^{j(\psi+\pi/2)}}{Ie^{j\psi}} = \omega Le^{j\pi/2} = j\omega L = jX, \text{ (reaktansa: } X = \omega L > 0)$$

- Kompleksna admitansa je:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = jB, \text{ (susceptansa: } B = -\frac{1}{\omega L} < 0)$$



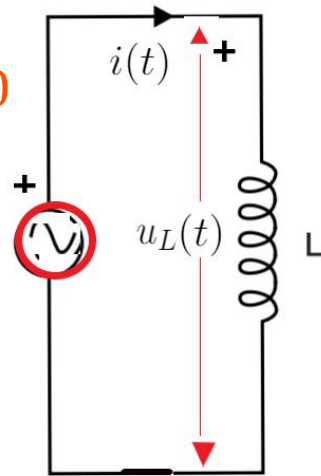
5.3.2. Kalem

- Za napon i struju na kalem u **sinusnoj formi** važe analogne relacije i isti zaključci o vezi efektivnih vrednosti i faza napona i struje.

Usvojeno: $\theta = 0$

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$$

$$\bar{U} = \underline{U} \angle 0$$



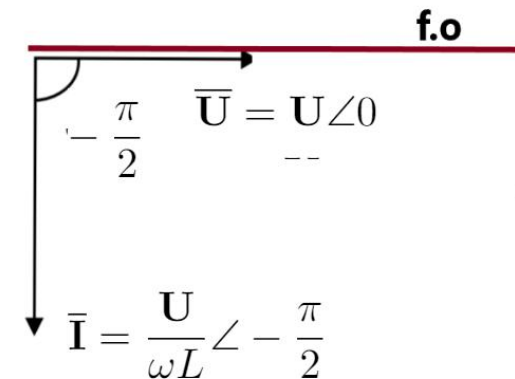
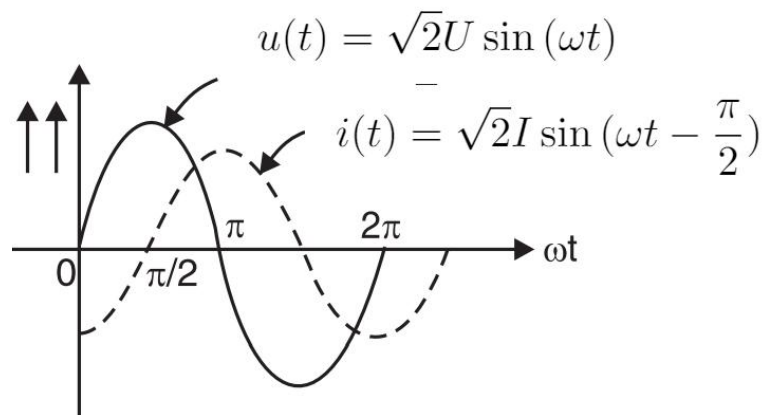
$$u(t) = u_L = L \frac{di}{dt} \quad \frac{di}{dt} = \frac{\sqrt{2}U}{L} \sin \omega t$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{L} \int \sin \omega t dt = \frac{\sqrt{2}U}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + Const$$

$$Const = 0$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \bar{I} = \frac{U}{\omega L} \angle -\frac{\pi}{2}$$

Usvojeno: $\theta = 0$



$$\bar{Z}_L = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \omega L \angle \frac{\pi}{2}$$

5.3.3. Kondenzator

- Za napon i struju kondenzatora važi:

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi) = -\omega C U \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta) = \omega C U \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta + \pi/2)$$

- Za efektivne vrednosti važi:

$$I = \omega C U$$

- A napon kasni za strujom (ili struja prednjači) za $\pi/2$:

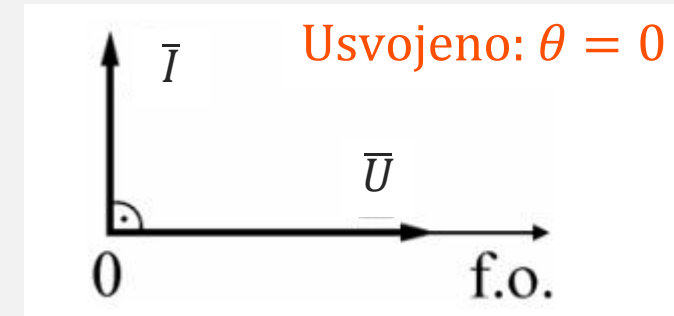
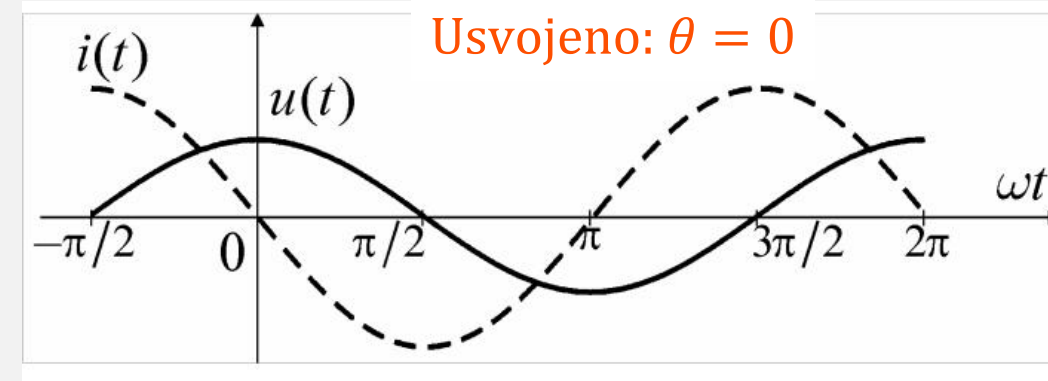
$$\psi = \theta + \pi/2$$

- U kompleksnom domenu je impedansa kondenzatora:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{j\theta}}{I e^{j\psi}} = \frac{U e^{j\theta}}{\omega C U e^{j(\theta + \pi/2)}} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = -j \frac{1}{\omega C} = jX, \quad (\text{reaktansa: } X = -\frac{1}{\omega C} < 0)$$

- Kompleksna admitansa je:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = j\omega C = jB, \quad (\text{susceptansa: } B = \omega C > 0)$$

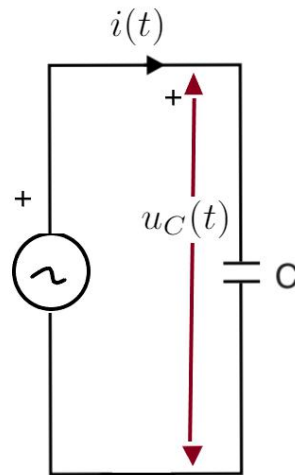


5.3.3. Kondenzator

- Za napon i struju na kondenzatoru u **sinusnoj formi** važe analogne relacije i isti zaključci o vezi efektivnih vrednosti i faza napona i struje.

Usvojeno: $\theta = 0$

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t)$$

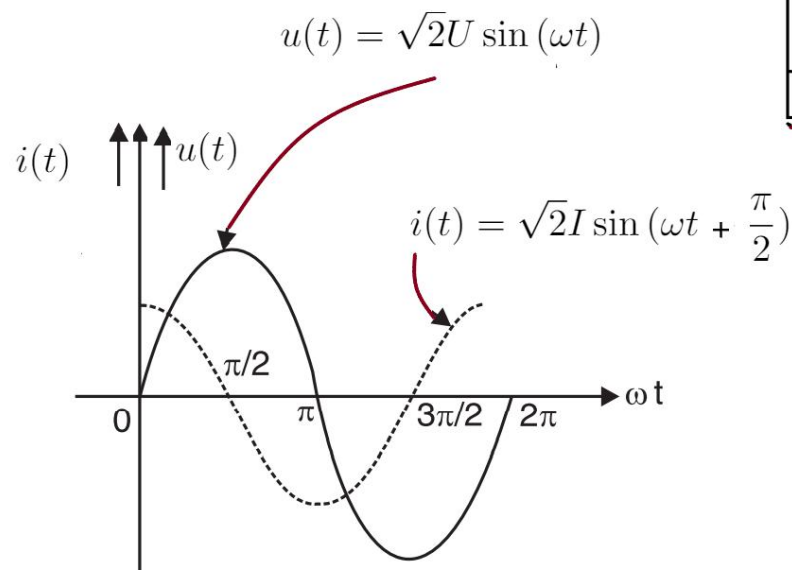
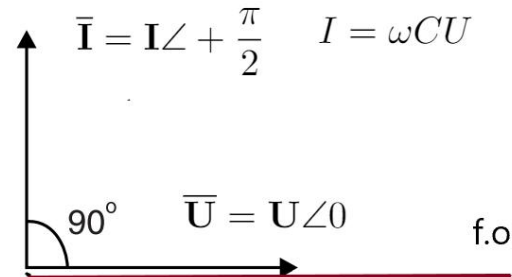


$$u_C(t) = u(t)$$

$$q(t) = Cu(t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

$$i(t) = \omega C \sqrt{2}U \cos(\omega t) = \omega C \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\bar{Z}_C = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2}$$

Usvojeno: $\theta = 0$

5.4. Veze impedansi i admitansi

- **Kompleksna impedansa** prijemnika (potrošača) se u opštem obliku može predstaviti kao:

$$\overline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}$$

- **R - rezistansa, X - reaktansa.**
- Impedansa se može posmatrati kao redna veza otpornika otpornosti R i reaktivnog elementa (kalema ili kondenzatora) reaktivne otpornosti $|X|$, ali pri tome treba voditi računa da je impedansa kompleksan broj i da se “sabiranje otpornosti” ove redne veze mora raditi u kompleksnom domenu (R je realan broj a X imaginaran), tako da je:

$$\overline{Z} = (R + j0) + (0 + jX) = R + jX$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \varphi = \arctg(X/R)$$

- Reaktansa X može biti:
 - pozitivna veličina ako je prijemnik **pretežno induktivan** ($X = \omega L$) ili
 - negativna ako je prijemnik **pretežno kapacitivan** ($X = -1/(\omega C)$).
- Fazna razlika φ je:
 - pozitivna ako je prijemnik **pretežno induktivan** ili
 - negativna ako je prijemnik **pretežno kapacitivna**.

5.4. Veze impedansi i admitansi

- **Kompleksna admitansa** prijemnika (potrošača) se u opštem obliku može predstaviti kao:

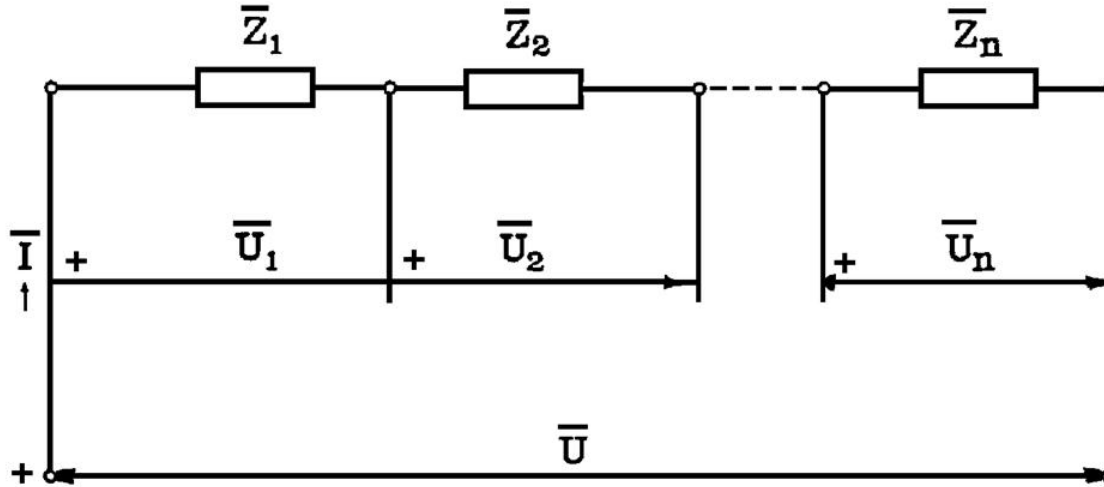
$$\bar{Y} = Y e^{j\alpha} = G + jB = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{Z e^{j\varphi}} = \frac{1}{R + jX}$$

- **G - konduktansa, B - susceptansa.**
- Pri tome važe sledeće relacije koje povezuju impedansu i admitansu:
 - Ugao admitanse je suprotnog znaka od ugla impedanse $\alpha = -\varphi$
 - Moduo admitanse je $Y = 1/Z$
 - Konduktansa je $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$
 - Susceptansa je $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$.
- Susceptansa **B** je (kao i ugao admitanse) uvek suprotnog znaka od reaktanse:
 - pozitivna je veličina ako je prijemnik **pretežno kapacitivan** ili
 - negativna ako je prijemnik **pretežno induktivan**.

5.4. Veze impedansi i admitansi

- Formule za rednu i paralelnu vezu su iste kao i za JS, ali **kod NS se mora isključivo raditi sa kompleksnim impedansama i/ili admitansama.**

Redna veza impedansi

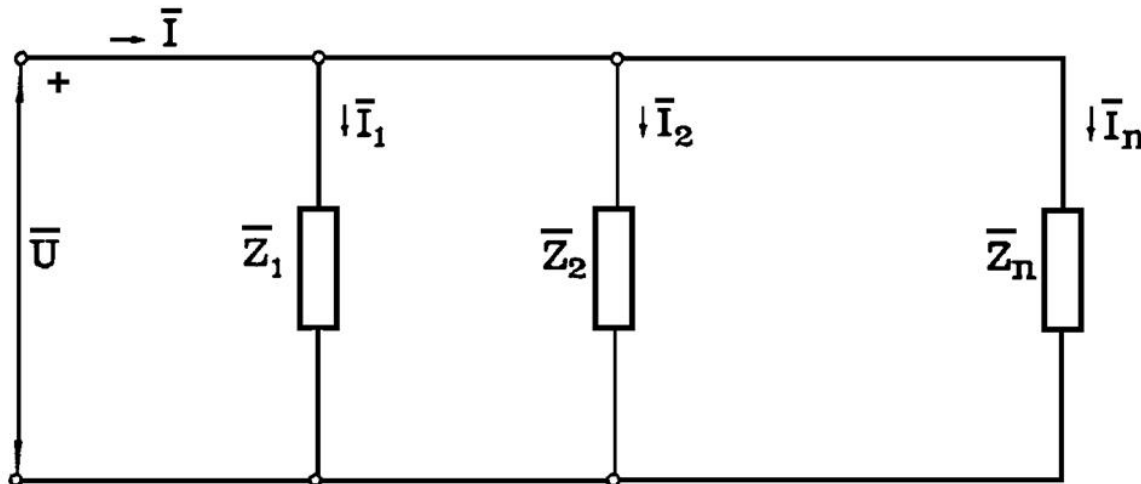


$$\bar{U} = \sum_{k=1}^n \bar{U}_k = \bar{I} \sum_{k=1}^n \bar{Z}_k$$

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \sum_{k=1}^n \bar{Z}_k$$

$$\frac{1}{\bar{Y}_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{Y}_k}$$

Paralelna veza impedansi



$$\bar{I} = \sum_{k=1}^n \bar{I}_k = \bar{U} \sum_{k=1}^n \bar{Y}_k$$

$$\bar{Y}_e = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \sum_{k=1}^n \bar{Y}_k$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_k}$$

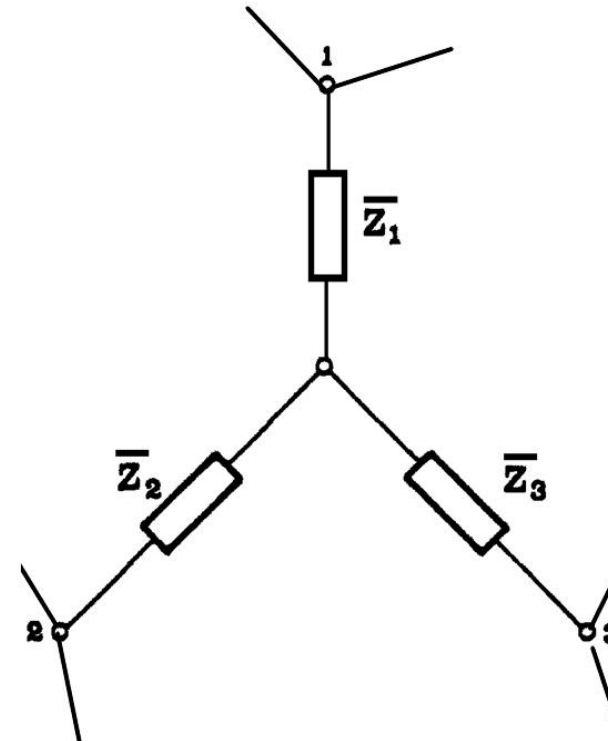
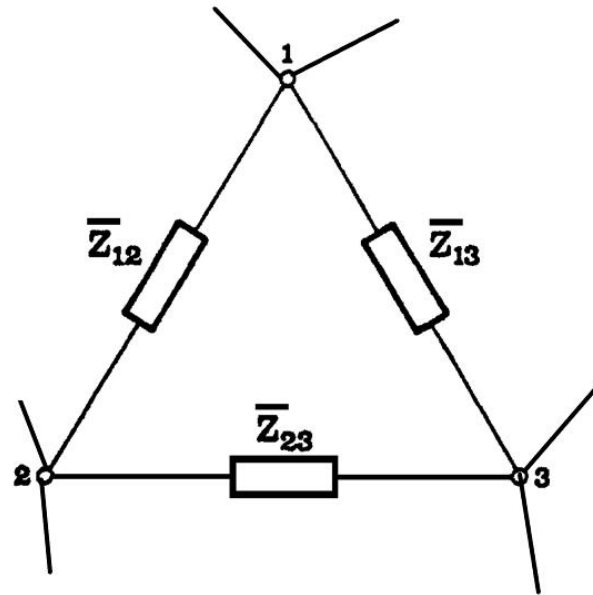
5.4. Veze impedansi i admitansi

- Formule za transformaciju trogla u zvezdu i obrnuto su takođe iste kao i za JS, a isto važi i da se **kod NS mora isključivo raditi sa kompleksnim impedansama i/ili admitansama**.

$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_3}$$

$$\bar{Z}_{13} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2}$$

$$\bar{Z}_{23} = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1}$$



$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{13}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{13} + \bar{Z}_{23}}$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{13} + \bar{Z}_{23}}$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{13} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{13} + \bar{Z}_{23}}$$

5.5. Snage u kolima NS

- U kolima naizmenične struje može se razlikovati nekoliko tipova snage:

- Trenutna (jedinica je vat - W):

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- **Prividna** (volt-amper - VA) - za prijemnike se može posmatrati kao ukupna snaga koja se troši na rezistivnim elementima i razmenjuje u reaktivnim elementima:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = |\bar{S}| = ZI^2 = YU^2$$

- **Aktivna** (vat - W) - srednja vrednost trenutne snage tj. za prijemike je to snaga koja se troši na rezistivnim elementima:

$$P = S \cos(\varphi) = RI^2 = GU^2$$

- **Reaktivna** (volt-amper reaktivni - VAr ili var) - za prijemike je to snaga koja se razmenjuje na reaktivnim elementima (istog je znaka kao i reaktansa):

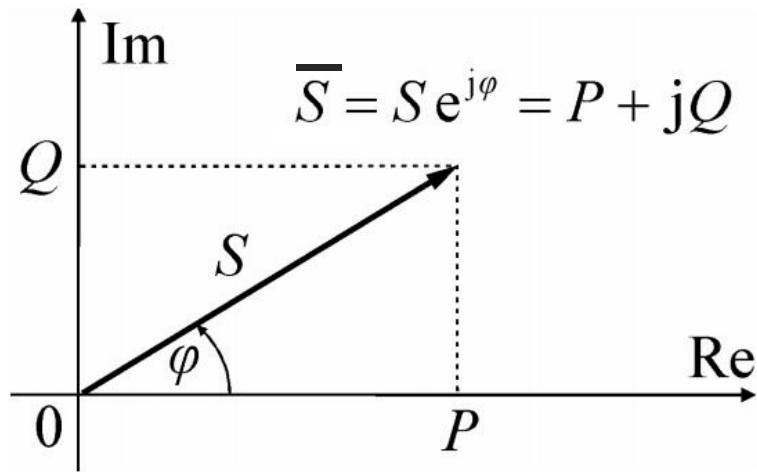
$$Q = S \sin(\varphi) = XI^2 = -BU^2$$

- **Kompleksna prividna** (volt-amper - VA) - ukupna snaga u kompleksnom obliku:

$$\bar{S} = Se^{j\varphi} = UIe^{j(\theta-\psi)} = Ue^{j\theta} \cdot Ie^{-j\psi} = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

$$\bar{S} = P + jQ = \bar{Z}I^2 = (R + jX)I^2 = \bar{Y}^*U^2 = (G - jB)U^2$$

5.5. Snage u kolima NS



snaga	izraz	jedinica
trenutna	$p(t) = u(t)i(t)$	W
srednja (aktivna)	$P = UI \cos \varphi$	W
reaktivna (jalova)	$Q = UI \sin \varphi$	VAr
kompleksna	$\bar{S} = \bar{U} \bar{I}^* = P + jQ$	VA
prividna (nominalna)	$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$	VA

- U kolima NS reaktivna snaga Q je nepoželjna jer predstvalja razmenu snage između generatora i reaktivnih potrošača koja se ne pretvara u aktivni rad.
- Ako provodnici koji povezuju generatore i potrošače imaju gubitke, deo snage se nepotrebno troši na ovu razmenu reaktivne energije. Zbog toga se teži da **faktor snage, $\cos(\varphi)$** , teži ka jedinici:

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} \rightarrow 1$$

5.5. Snage u kolima NS

- **Otpornik** ima samo aktivnu snagu, odnosno važi da je:

$$\bar{Z} = R + j0, \quad \bar{Y} = G + j0$$

$$\bar{S} = P + j0, \quad S = UI = P = RI^2 = GU^2, \quad Q = 0, \quad \cos(\varphi) = 1$$

- **Kalem** ima samo reaktivnu snagu koja je pozitivna, odnosno važi da je:

$$\bar{Z} = 0 + jX = 0 + j\omega L, \quad \bar{Y} = 0 - j\frac{1}{\omega L}$$

$$\bar{S} = 0 + jQ, \quad S = UI = Q, \quad Q = XI^2 = \omega LI^2 = -BU^2 = \frac{U^2}{\omega L}, \quad P = 0, \quad \cos(\varphi) = 0$$

- **Kondenzator** ima samo reaktivnu snagu koja je negativna, odnosno važi da je:

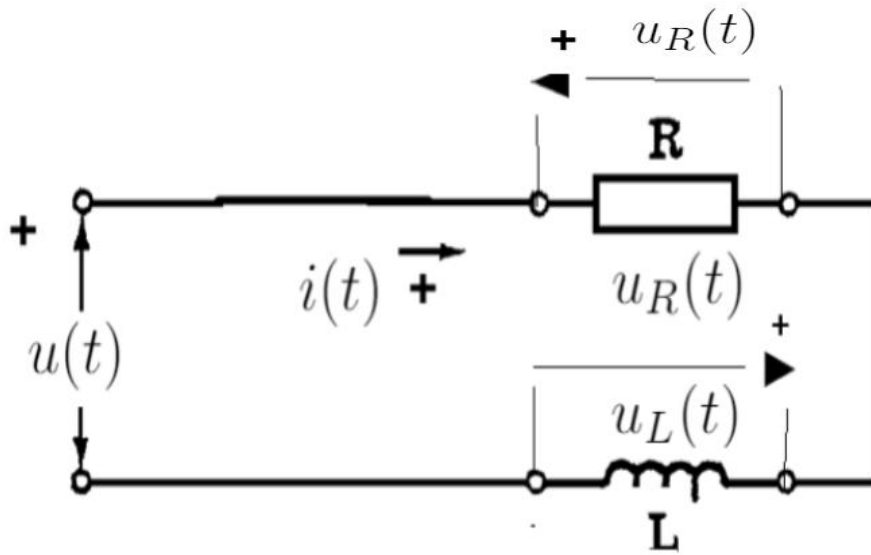
$$\bar{Z} = 0 + jX = 0 - j\frac{1}{\omega C}, \quad \bar{Y} = 0 + j\omega C$$

$$\bar{S} = 0 + jQ, \quad S = UI = |Q|, \quad Q = XI^2 = -\frac{I^2}{\omega C} = -BU^2 = -\omega CU^2, \quad P = 0, \quad \cos(\varphi) = 0$$

5.6. Rešavanje kola NS

- Za kola NS važe isti zakoni (I i II Kirhofov zakon) i teoreme (Tevenenova, Nortonova, superpozicije) kao i kod kola JS, te se ova kola mogu rešavati korišćenjem tri moguća pristupa.
 1. **Rešavanje u vremenskom domenu**, korišćenjem vremenskih izraza za napone i struje, diferencijalnih veza napona i struja na reaktivnim elementima, kao i trigonometrijskih relacija. Ovakav pristup je praktično neprihvatljiv za bilo koja složenija kola jer se dobijaju složeni sistemi diferencijalnih jednačina.
 2. **Rešavanje kola korišćenjem fazorskih dijagrama**. Koriste se relacije između efektivnih vrednosti napona i struja i uglovi koji zaklapaju fazori napona i struja na osnovnim elementima R, L i C. Sabiranje fazora se mora obavljati vektorski (grafički) ili analitički razlaganjem vektora. Ovakvim pristupom mogu se rešavati relativno složena kola, ali on i dalje nije praktičan za veoma složena kola sa puno elemenata.
 3. **Rešavanje kola korišćenjem kompleksnog računa**. Uvođenjem pojmova kompleksne impedanse i admitanse, diferencijalne relacije između napona i struja na reaktivnim elementima postaju analogne Omovom zakonu za otpornike. Dakle, mogu se primenjivati praktično sve metode uključujući Kirhofove zakone, MPC, MKS, Tevenenovu teoremu, teoremu superpozicije i druge teoreme iz JS, ali se pri tome **obavezno moraju koristiti KOMPLEKSNI PREDSTAVNICI napona, potencijala i struja, kao i KOMPLEKSNE impedanse i/ili admitanse svih elemenata !!!**

5.7. Redno RL i RC kolo - fazori

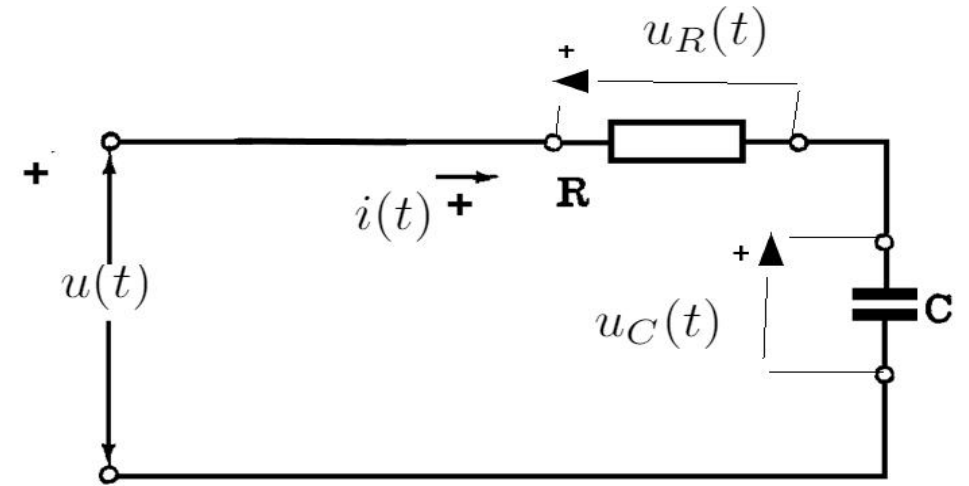


$$u(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L$$

$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_L = \omega L \angle \frac{\pi}{2} \bar{I}$$



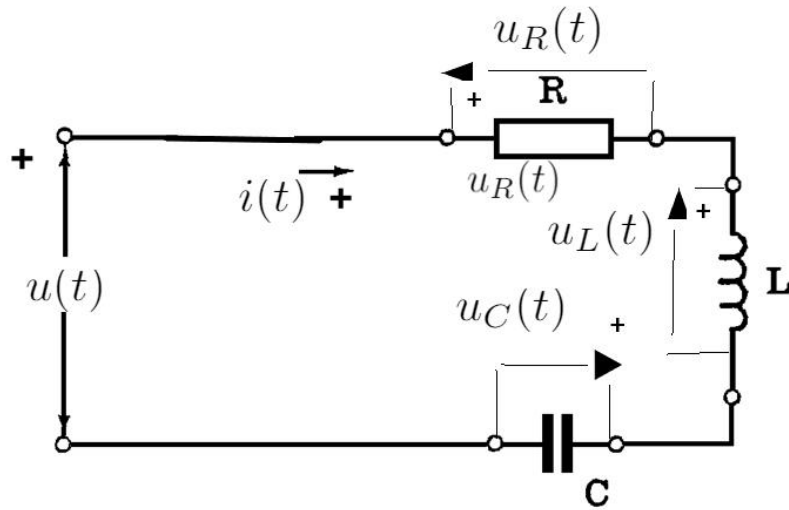
$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_C$$

$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \bar{I}$$

5.8. Redno RLC kolo - fazori



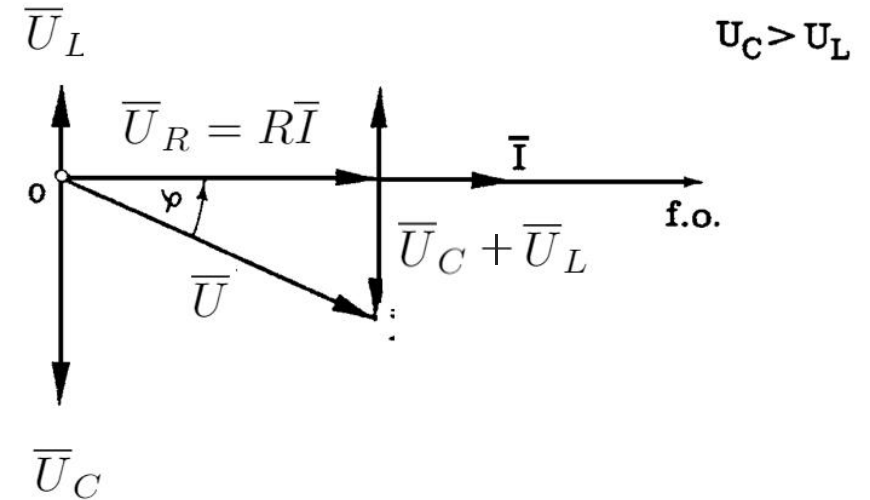
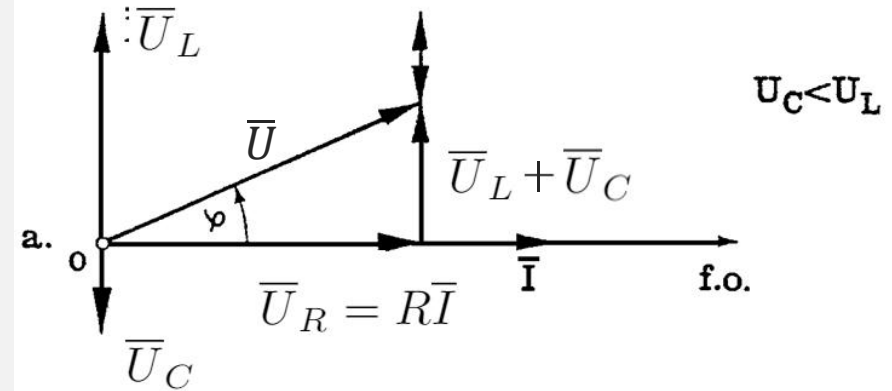
$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$$

$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

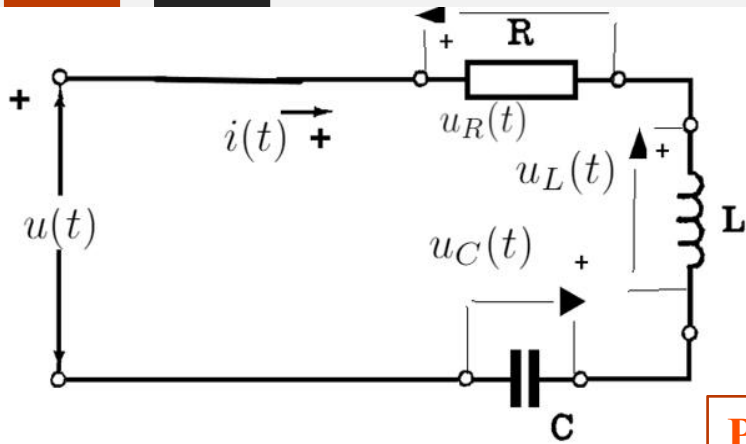
$$\bar{U}_L = \omega L \angle \frac{\pi}{2} \bar{I}$$

$$\bar{U}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \bar{I}$$



FAZORSKI DIJAGRAM NAPONA I STRUJE U KOLU NAIZMENIČNE STRUJE SA R,L,C REDNO VEZANIM ELEMENTIMA

5.8. Redno RLC kolo - kompleksni račun



$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C \quad \bar{U} = \bar{I}R + \bar{I}j\omega L + \bar{I}\frac{1}{j\omega C}$$

$$\bar{U} = Ue^{j0} = U \quad j\omega L = jX_L \quad \frac{1}{j\omega C} = -j|X_C|$$

Pretpostavka
da je faza 0

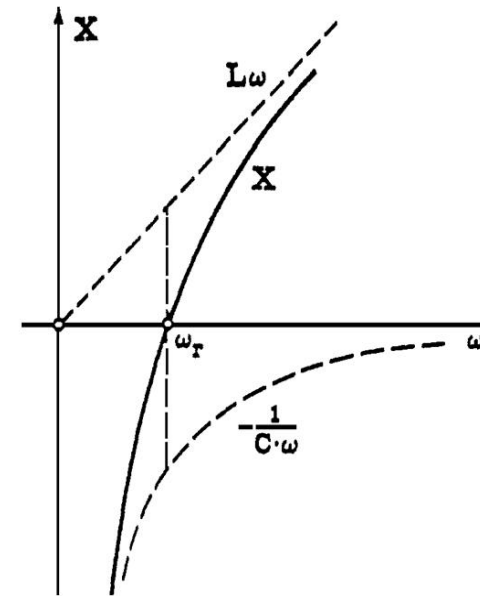
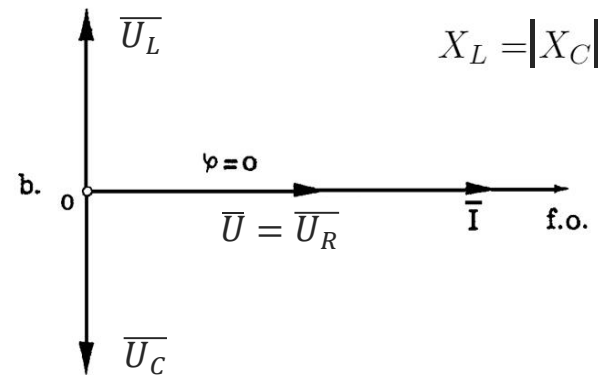
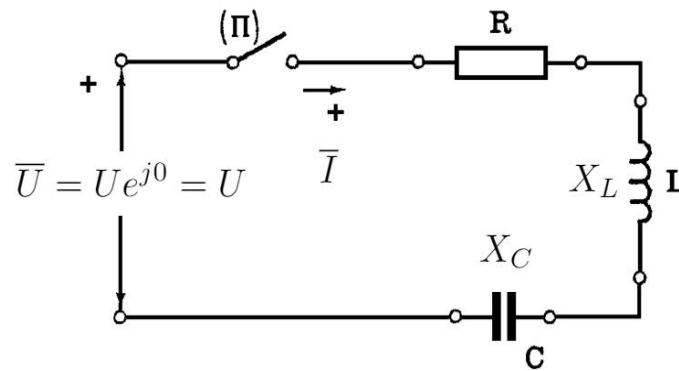
$$\bar{I} = \frac{U}{R + j(X_L - |X_C|)}$$

$$\bar{Z} = R + j(X_L - |X_C|)$$

$$I = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - |X_C|)^2}} \quad |Z| = Z = \sqrt{R^2 + (X_L - |X_C|)^2}$$

5.8. Redno RLC kolo - rezonancija

- Rezonancija u RLC kolu NS nastaje kada je ukupna impedansa minimalna, odnosno struja maksimalna. U tom slučaju se reaktanse kalema i kondenzatora međusobno poništavaju.



$$\bar{I} = \frac{U}{R + j(X_L - |X_C|)}$$

$$X_L = |X_C| \Rightarrow \bar{Z} = Z = R$$

$$\bar{I} = I = \frac{U}{R} = I_{max}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

5.9. Popravka faktora snage

- Popravka faktora snage je problem koji je specifičan za elektrodistributivne sisteme.
- U praksi, prijemnici su retko samo aktivni ili samo reaktivni. Na primer, električni motor je prijemnik koji je aktivan jer se električna energija se pretvara u mehaničku, ali i reaktivan zbog induktivnosti namotaja koji čine motor.
- Za prijemnike velikih snaga teži se da se poveća faktor snage tako da postane blizak jedinici. Da bi se to postiglo, u sistem se dodaju reaktivni elementi.
- Dodavanje reaktivnih elemenata da bi se povećao faktor snage naziva se **popravka faktora snage koji bi u idealnom slučaju trebalo da bude jednak jedinici**.
- Najčešći slučaj je da se neki induktivni element (motor) kompenzuje dodavanjem kondenzatora koji se sa priključcima motora vezuje paralelno i ovaj slučaj je dalje detaljnije analiziran.

5.9. Popravka faktora snage

- Faktor snage induktivnog potrošača sa slike:

$$P = RI_P^2, Q = \omega LI_P^2 = \frac{\omega LU^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

- Nakon kompenzacije:

$$P_{uk} = P, Q_{uk} = Q + Q_C$$

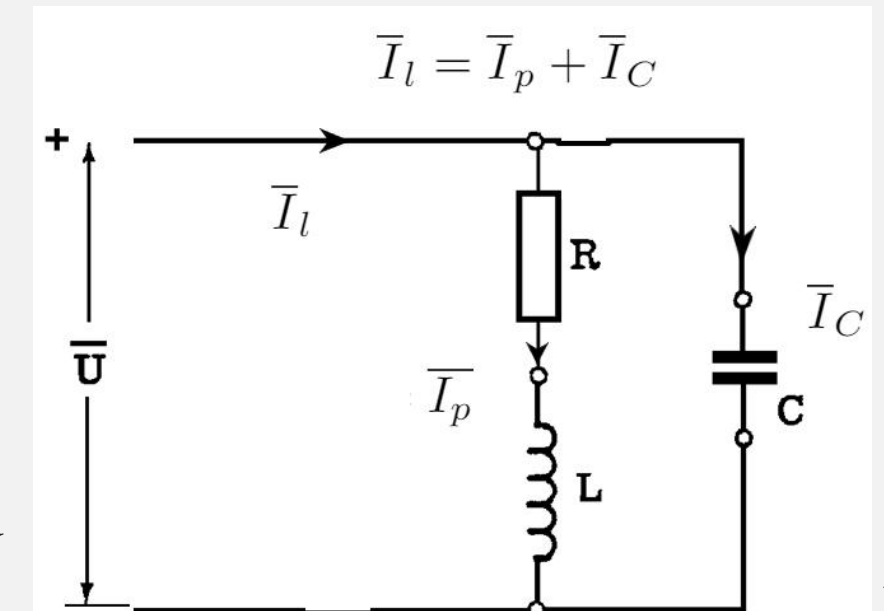
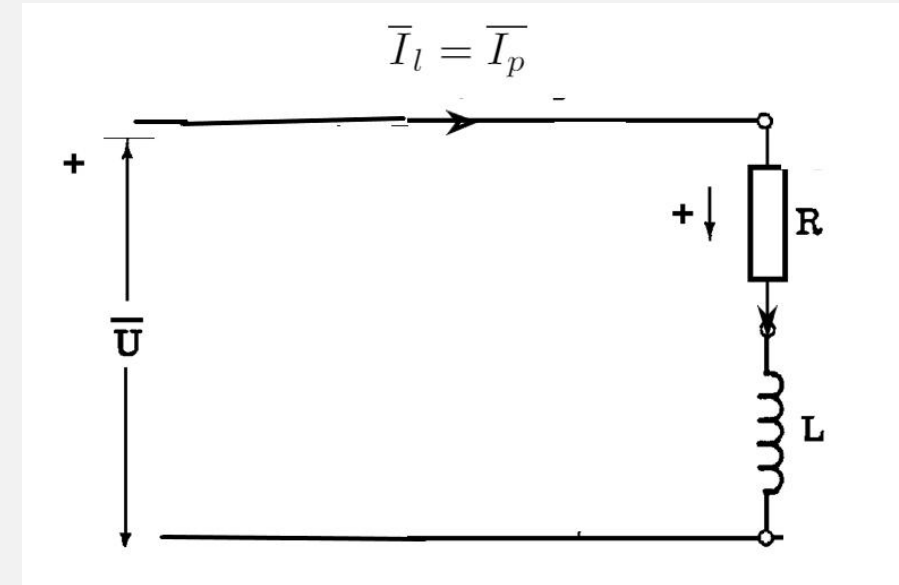
$$\cos(\varphi) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q + Q_C)^2}} = 1 \Rightarrow Q + Q_C = 0$$

$$Q_C = -Q$$

$$-\omega CU^2 = -\frac{\omega LU^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

- Povezivanjem ovog C paralelno potrošaču dobija se ukupni faktor snage jednak 1.



5.10. Trofazni sistemi

- Tri namotaja prostorno su pomerena za $120^\circ = 2\pi/3$ rad i rotiraju u homogenom magnetnom polju. Indukuju se tri fazno pomerena napona:

$$e_1(t) = E_m \cos(\omega t)$$

$$e_2(t) = E_m \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

$$e_3(t) = E_m \cos(\omega t - 4\pi/3)$$

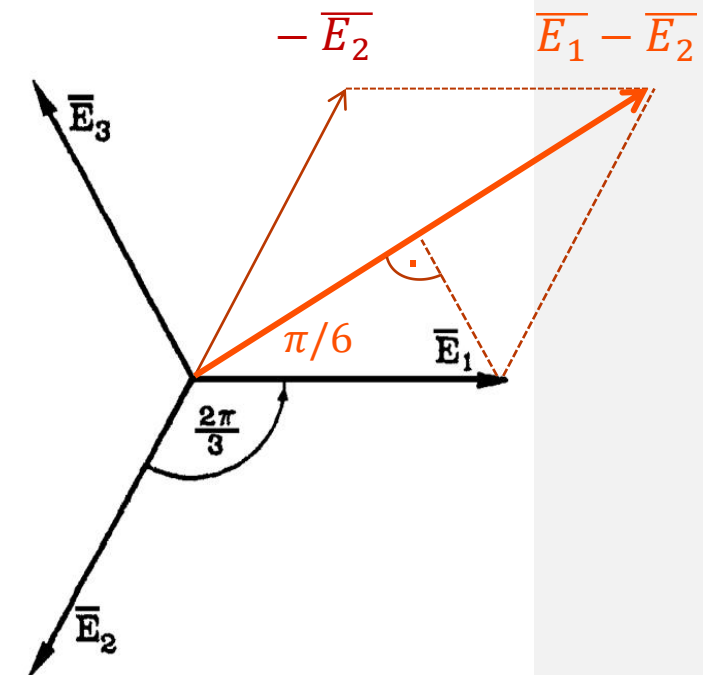
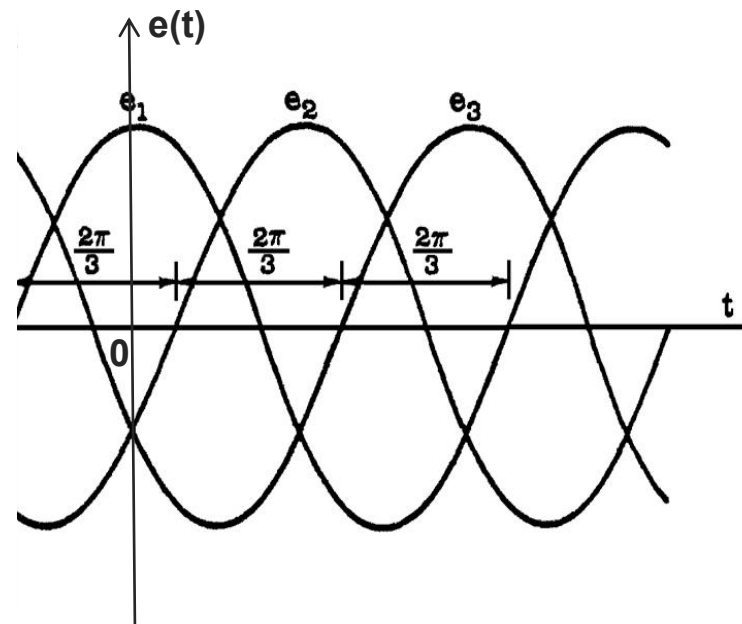
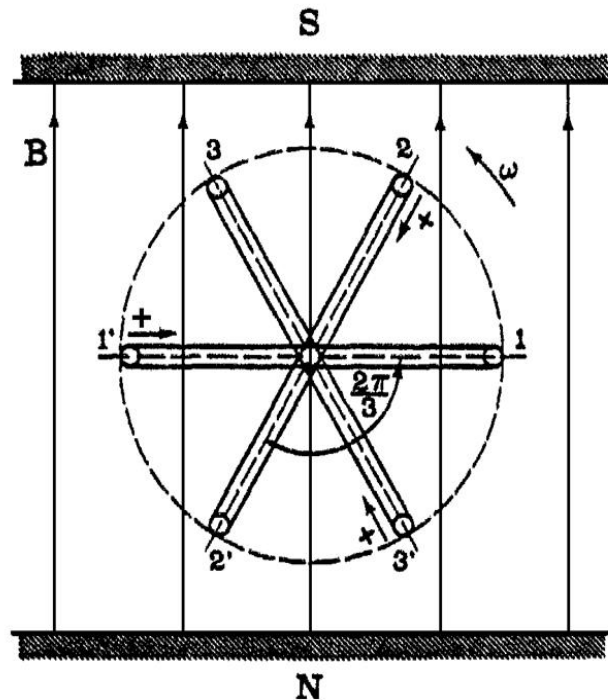
$$\overline{E}_1 = E e^{j0}$$

$$\overline{E}_2 = E e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\overline{E}_3 = E e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

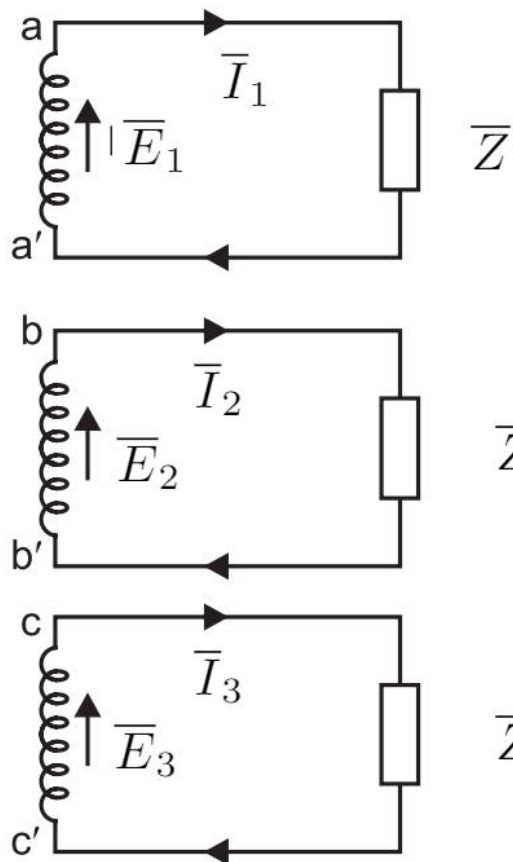
$$\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3 = 0$$

$$\overline{E}_1 - \overline{E}_2 = \sqrt{3} E e^{j\pi/6}$$



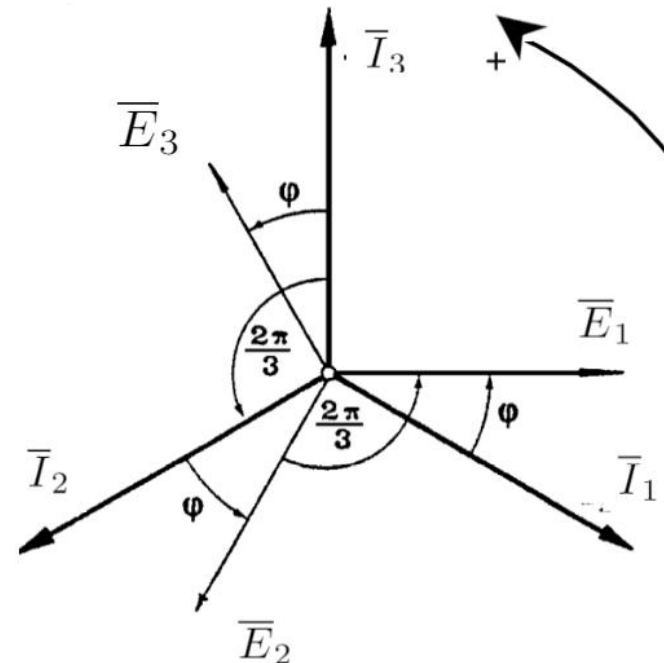
5.10. Trofazni sistemi

- Razmatraćemo samo **simetrični trofazni sistem**, svaka **faza** je opterećena identičnom impedansom $\bar{Z} = Ze^{j\varphi}$. **Fazne struje** su onda takođe međusobno pomerene za $120^\circ = 2\pi/3$, a u odnosu na odgovarajuće **fazne napone** za ugao impedanse φ .



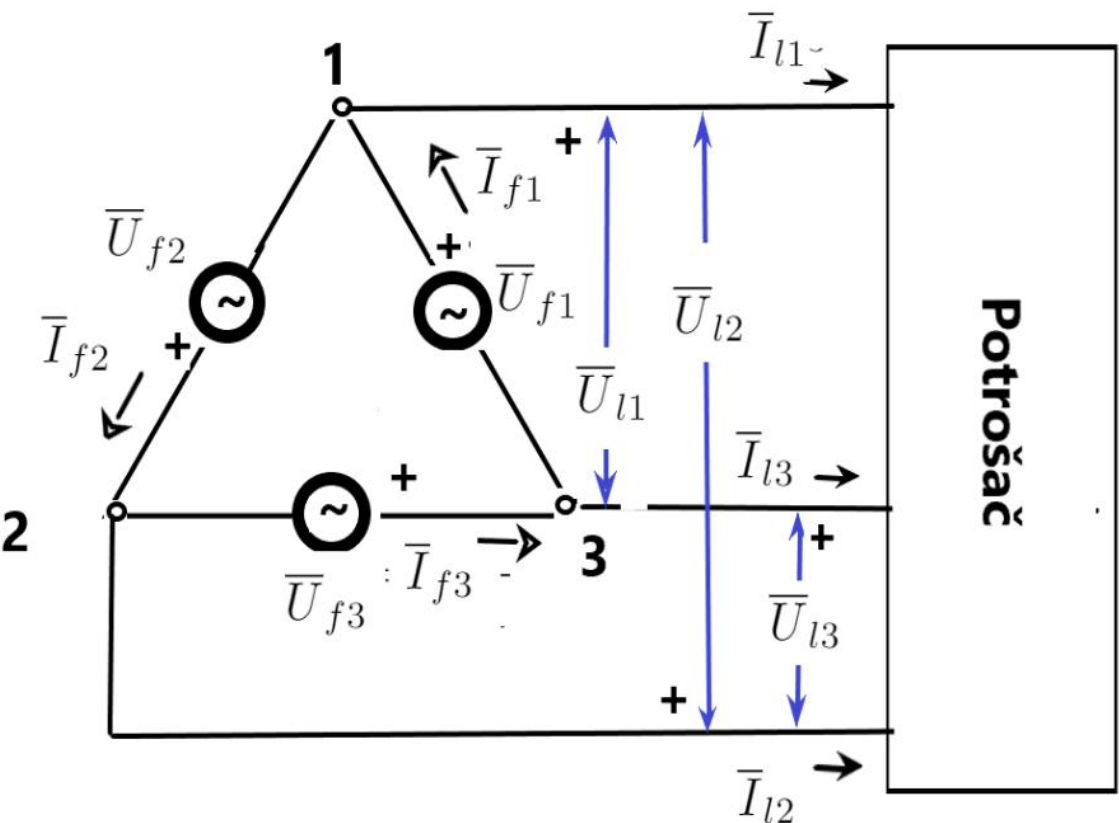
$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= Ee^{j0} & \bar{I}_1 &= Ie^{-j\varphi} \\ \bar{E}_2 &= Ee^{-j\frac{2\pi}{3}} & \bar{I}_2 &= Ie^{-j\frac{2\pi}{3}-j\varphi} \\ \bar{E}_3 &= Ee^{j\frac{2\pi}{3}} & \bar{I}_3 &= Ie^{j\frac{2\pi}{3}-j\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S} &= 3\bar{Z}I^2 \\ \bar{S} &= 3ZI^2e^{j\varphi} \\ S &= 3ZI^2 \\ P &= 3ZI^2\cos(\varphi) \\ Q &= 3ZI^2\sin(\varphi)\end{aligned}$$



5.10. Trofazni sistemi

- Razmatraćemo **simetrični trofazni sistem** gde su generatori povezani u **trougao**.
- Za prenos energije prema potrošaču koriste se tri voda, na njima su takozvani **linijski** naponi i struje ($U_{l1}, U_{l2}, U_{l3}, I_{l1}, I_{l2}, I_{l3}$).
- Naponi i struje generatora nazivaju se **faznim** ($U_{f1}, U_{f2}, U_{f3}, I_{f1}, I_{f2}, I_{f3}$).



$$\bar{I}_{f1} = I e^{-j\varphi}$$

$$\bar{I}_{f2} = I e^{-j\varphi - j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{I}_{f3} = I e^{-j\varphi + j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{U}_{l1} = \bar{U}_{f1} = U e^{j0}$$

$$\bar{U}_{l2} = \bar{U}_{f2} = U e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{U}_{l3} = \bar{U}_{f3} = U e^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

$$U_{l1} = U_{l2} = U_{l3} = U_l$$

$$U_{f1} = U_{f2} = U_{f3} = U_f$$

$$\bar{I}_{l1} = \bar{I}_{f1} - \bar{I}_{f2} = \sqrt{3} I e^{-j\varphi + \pi/6}$$

$$\bar{I}_{l2} = \bar{I}_{f2} - \bar{I}_{f3} = \sqrt{3} I e^{-j\varphi - \pi/2}$$

$$\bar{I}_{l3} = \bar{I}_{f3} - \bar{I}_{f1} = \sqrt{3} I e^{-j\varphi + 5\pi/6}$$

$$I_{l1} = I_{l2} = I_{l3} = I_l$$

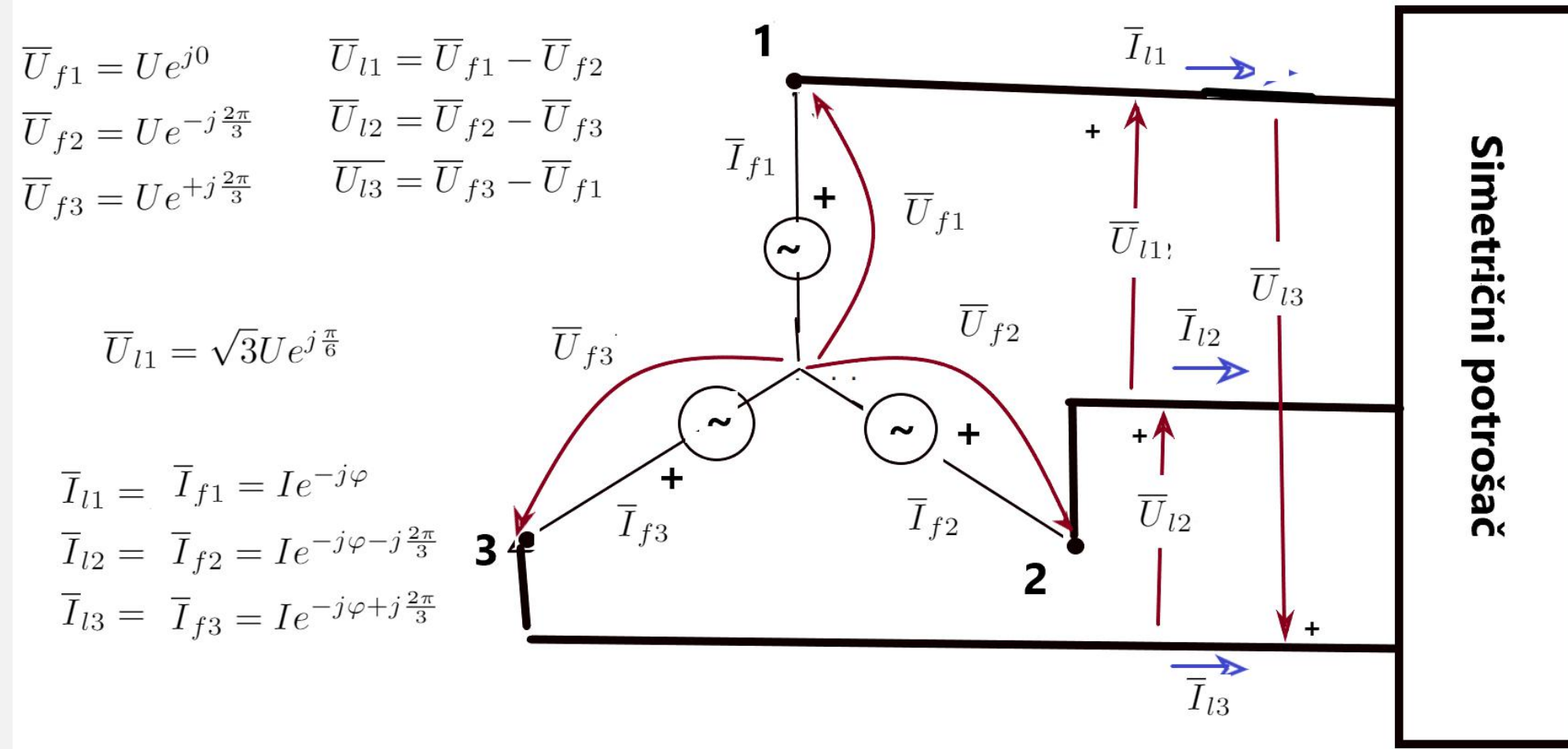
$$I_{f1} = I_{f2} = I_{f3} = I_f$$

$$I_l = \sqrt{3} I_f$$

$$U_l = U_f$$

5.10. Trofazni sistemi

- Razmatraćemo **simetrični trofazni sistem** gde su generatori povezani u **zvezdu**.
- Ka potrošaču idu tri voda sa **linijskim** naponima i strujama ($U_{l1}, U_{l2}, U_{l3}, I_{l1}, I_{l2}, I_{l3}$). Naponi i struje generatora nazivaju se **faznim** ($U_{f1}, U_{f2}, U_{f3}, I_{f1}, I_{f2}, I_{f3}$).



$$I_l = I_f$$

$$U_l = \sqrt{3}U_f$$

5.10. Trofazni sistemi

- Za **simetrični trofazni sistem** gde su **potrošači** povezani u **trougao** ili **zvezdu** relacije između linijskih i faznih napona i struja su iste.

- Za **potrošač vezan u trougao** važi:

$$U_l = U_f, I_l = \sqrt{3}I_f$$

- Za **potrošač vezan u zvezdu** važi:

$$U_l = \sqrt{3}U_f, I_l = I_f$$

- Za snage na simetričnom trofaznom potrošaču $\bar{Z} = Ze^{j\varphi}$ (bez obzira da li je povezan u trougao ili zvezdu) važi sledeće:

$$\bar{S} = 3ZI_f^2e^{j\varphi} = 3U_fI_fe^{j\varphi} = \sqrt{3}U_lI_le^{j\varphi}$$

$$S = 3ZI_f^2 = 3U_fI_f = \sqrt{3}U_lI_l$$

$$P = 3ZI_f^2\cos(\varphi) = 3U_fI_f\cos(\varphi) = \sqrt{3}U_lI_l\cos(\varphi)$$

$$Q = 3ZI_f^2\sin(\varphi) = 3U_fI_f\sin(\varphi) = \sqrt{3}U_lI_l\sin(\varphi)$$

5.11. Primeri

- **Primer 1.** Odrediti kompleksni predstavnik za napon $u(t) = 10\cos(341t + \pi/4)$ V.
- **Primer 2.** Odrediti talasni (vremenski) oblik napona čiji je kompleksni predstavnik $\bar{U} = -5\sqrt{2} - j5\sqrt{2}$ V, $f=100$ Hz, ako se za predstavljanje vremenskog oblika prostoperiodične veličine koristi kosinusna funkcija.
- **Primer 3.** Odrediti talasni (vremenski) oblik struje čiji je kompleksni predstavnik $\bar{I} = -10\sqrt{3} + j10$ V, $\omega=314$ rad/s, ako se za predstavljanje vremenskog oblika prostoperiodične veličine koristi kosinusna funkcija.
- **Primer 4.** Odrediti kompleksnu impedansu $\bar{Z}$, ako je poznato da je vremenski oblik napona na impedansi $u(t) = 30\cos(314t + 15^\circ)$ V i $i(t) = 15\cos(314t + \pi/12)$.
- **Primer 5.** Na red su povezani otpornik otpornosti 20Ω , kapacitivni prijemnik rezistanse 5Ω i reaktivne otpornosti 150Ω i induktivni prijemnik rezistanse 25Ω i reaktivne otpornosti 100Ω . Odrediti impedansu i admitansu, kao i kompleksnu impedansu i admitansu ove redne veze prijemnika. Da li je redna veza prijemnika pretežno induktivna ili kapacitivna?
- **Primer 6.** Ako kroz prijemnik impedanse $\bar{Z} = 20 + j10 \Omega$, postoji kompleksna struja $\bar{I} = 4 + j3$ A, odrediti kompleksni napon na prijemniku, njegovu kompleksnu (prividnu) snagu, aktivnu snagu, reaktivnu snagu i prividnu snagu.
- **Primer 7.** Za kolo sa jednim poznatim naponskim generatorom $\bar{E}$ i dve poznate impedanse $\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$ i $\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2$, odrediti sve napone i struje u kolu, ako su svi elementi kola vezani a) redno, b) paralelno.
- **Primer 8.** Induktivni potrošač $\bar{Z} = 3 + j4 \Omega$ je povezan je na napon efektivne vredonsti $U=10$ V i učestanosti 1 rad/s. Odrediti struju, aktivnu i reaktivnu snagu i faktor snage potrošača. Koliko treba da iznosi kapacitivnost kondenzatora koji se povezuje paralelno potrošaču da bi ukupni faktor snage bio jednak 1 (kompenzovan potrošač).
- **Primer 9.** Na trofazni sistem napona 3×100 V, povezan je simetričan trofazni potrošač čija je jedna impedansa $\bar{Z} = 3 + j4 \Omega$. Odrediti linijske i fazne napone i struje i kompleksnu snagu na trofaznom potrošaču, ako je potrošač povezan u a) trougao, b) zvezdu.
- *Potražite na sajtu predmeta još primera... **NAPOMENA:** voditi računa da se u materijalima iz prethodnih godina za predstavljanje prostoperiodičnih napona i struja koristila sinusna funkcija!*