Osnovi ekonomije – vežbe 5

Tema 22. Proizvodna funkcija:

- ✓ Proizvodna funkcija pokazuje maksimalnu količinu proizvodnje koja se može proizvesti iz određenog skupa proizvodnih faktora, pri određenom nivou tehnološkog znanja.
    - o Najčešće se predstavlja u obliku jednačine, a može biti predstavljena i tabelarno ili geometrijski.
- ✓ Proizvodna funkcija se najčešće predstavlja kao $Q = f(L, K)$:
    - o Q predstavlja ukupan proizvod, autput, odnosno obim proizvodnje.
    - o L i K su inputi, odnosno proizvodni faktori i to: L – rad i K – kapital.
    - o Ukupan proizvod je funkcija angažovanih proizvodnih faktora.
- ✓ Razlikujemo proizvodnju u kratkom i dugom roku:
    - o Za povećanje obima proizvodnje (Q), potrebno je povećano angažovanje proizvodnih faktora (L i K).
    - o Ukoliko povećanje nekog proizvodnog faktora nije moguće, kažemo da je taj proizvodni faktor fiksan.
    - o Ukoliko je povećanje nekog proizvodnog faktora moguće, kažemo da je taj proizvodni faktor varijabilan.
    - o Kratak rok odnosi se na vremenski period u kome je barem jedan proizvodni faktor fiksan.
    - o Dugi rok odnosi se na vremenski period u kome su svi proizvodni faktori varijabilni.

Tema 23. Ukupan, prosečan i graničan proizvod:

- ✓ Ukupan proizvod je predstavljen proizvodnom funkcijom. Odnosi se na ukupnu količinu proizvodnje koja se postiže pomoću angažovanih proizvodnih faktora.
- ✓ Prosečan proizvod je ukupan proizvod po jedinici angažovanog inputa:
    - o Prosečan proizvod rada izračunavamo kao ukupan proizvod po radniku:

$$PP_L = \frac{Q}{L}$$

    - o Prosečan proizvod kapitala izračunavamo kao ukupan proizvod po jedinici kapitala:

$$PP_K = \frac{Q}{K}$$

- ✓ Graničan proizvod je promena ukupnog proizvoda koja nastaje pri povećanju angažovanja inputa za jednu jedinicu:
  - Graničan proizvod rada izračunavamo kao promenu ukupnog proizvoda pri promeni broja angažovanih radnika. Predstavlja promenu količine proizvodnje koja nastaje zapošljavanjem dodatnog radnika, pri fiksnom kapitalu:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \qquad GP_L = f_L'(L,K) = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

  - Graničan proizvod kapitala izračunavamo kao promenu ukupnog proizvoda pri promeni količine angažovanog kapitala. Predstavlja promenu količine proizvodnje koja nastaje angažovanjem dodatne jedinice kapitala, pri fiksnom broju radnika:

$$GP_K = \frac{\Delta Q}{\Delta K} \qquad GP_K = f_K'(L,K) = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

Tema 24. Proizvodnja sa rastućim, opadajućim i konstantnim prinosima:

- ✓ Povećanje angažovanja proizvodnih faktora (inputa) vodi povećanom obimu proizvodnje (autputu).
- ✓ Ako pretpostavimo proizvodnu funkciju $Q = f(L,K)$ i

  ako uvećamo količinu inputa λ puta, tako da nova funkcija glasi

  $Q_1 = f(\lambda L, \lambda K)$,

  ukupan proiozvod ne mora da se poveća isto λ puta, već će se povećati λ^α puta:

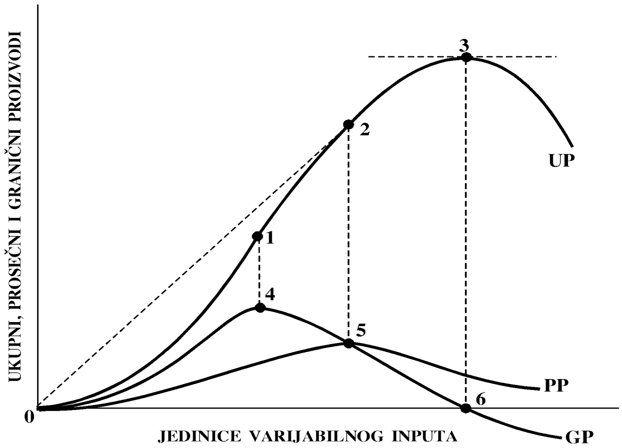
  $Q_1 = f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^\alpha f(L,K)$ odnosno $Q_1 = \lambda^\alpha Q$,

  pri čemu koeficijent α može uzeti vrednosti:
  - α=1 ako se radi o proizvodnji sa konstantnim prinosima,
  - α>1 ako se radi o proizvodnji sa rastućim prinosima,
  - 0<α<1 ako se radi o proizvodnji sa opadajućim prinosima.
- ✓ Na primer, ako se količina angažovanog rada i kapitala udvostruči tako da λ=2, ukupan proizvod će se povećati 2^α puta:
  - Ako se ukupan proizvod takođe udvostruči (α=1; $2^\alpha = 2^1 = 2$), radi se o proizvodnji sa konstantnim prinosima → procentualno uvećanje autputa je identično procentualnom uvećanju inputa.
  - Ako se proizvod uveća za više od dva puta (α>1), na primer četiri puta (α=2, $2^\alpha = 2^2 = 4$) radi se o proizvodnji sa rastućim prinosima → procentualno uvećanje autputa je veće od procentualnog uvećanja inputa.

- Ako se proizvod uveća za manje od dva puta (α<1), na primer 1,41 puta (α=0,5, $2^{\alpha} = 2^{0,5} = 1{,}41$) radi se o proizvodnji sa opadajućim prinosima → procentualno uvećanje autputa je manje od procentualnog uvećanja inputa.

<u>Tema 25.</u> Ukupan, prosečan i graničan proizvod jednog varijabilnog faktora

✓ Grafički prikaz ukupnog, prosečnog i graničnog proizvoda jednog varijabilnog faktora (slika 9.3. na str. 101).



✓ Pretpostavljamo proizvodnu funkciju $Q = f(L, K)$, pri čemu je kapital fiksan (K=const.), a ukupan proizvod se menja promenom jednog varijabilnog faktora, odnosno rada (L).

- Varijabilni faktor, rad, nalazi se na x-osi. Na y-osi se prikazuju vrednosti ukupnog (Q ili UP), prosečnog (PP_L) i graničnog proizvoda rada (GP_L).
- Zapošljavanjem novih radnika ukupan proizvod najpre raste po rastućoj stopi (brže raste ukupan proizvod od rasta broja radnika).
- Razlog tome je što graničan proizvod u ovoj zoni proizvodnje raste. Izvori ovakvih rastućih prinosa su pre svega specijalizacija rada i podela posla. Npr. kada je bio samo jedan radnik, on je morao da obavlja i administrativne poslove u preduzeću i da obavlja poslove nabavke i proizvodnje i prodaje. Kada zaposlimo drugog radnika, već se stvaraju pretpostavke za podelu posla, jedan može da se bavi proizvodnjom, a drugi da obavlja ostale poslove. Stoga, graničan proizvod drugog radnika mora biti veći od graničnog proizvoda prvog radnika, odnosno ukupan proizvod mora da raste po rastućoj stopi.
- Nakon određenog perioda iscrpljuju se mogućnosti specijalizacije rada. S obzirom da je kapital fiksan, zapošljavanjem dodatnih radnika ukupan proizvod raste sve sporije i sporije (po opadajućoj stopi) dok ne dostigne neki maksimum. Dakle, ako je jedan proizvodni faktor fiksan, proizvodnja se ne može beskonačno povećavati povećanim angažovanjem varijabilnih inputa. U ovoj zoni, graničan proizvod rada opada (zakon opadajućih graničnih prinosa), a izvor tih opadajućih

prinosa je pre svega fiksan kapital (sve više radnika po jedinici fiksnog kapitala).

- Nakon dostizanja maksimalnog proizvoda, zapošljavanjem dodatnih radnika, teorijski, ukupan proizvod može i da opadne, jer zapošljavanjem preko maksimuma može opasti produktivnost rada. U toj zoni, kada ukupan proizvod počne da opada, graničan proizvod je negativan.
- Prosečan i graničan proizvod imaju sledeći odnos: kada je graničan proizvod veći od prosečnog, prosečan proizvod raste (ako zaposlimo novog radnika čiji je graničan proizvod veći od postojećeg proseka, novi prosek sa njim će biti veći). Sa druge strane, kada je graničan proizvod rada manji od prosečnog proizvoda, prosečan proizvod opada (ako zaposlimo novog radnika čiji je graničan proizvod manji od postojećeg proseka, novi prosek sa njim mora biti manji).
- Graničan i prosečan proizvod su jednaki u maksimumu prosečnog proizvoda – u toj tački se proizvodi najveća količina autputa po fizičkoj jedinici angažovanih inputa.

Zadatak 15. U tabeli je dat ukupan proizvod (Q) u zavisnosti od angažovanja jednog varijabilnog faktora rada (L). Izračunati prosečan (PP_L) i graničan proizvod (GP_L) rada za svaki obim zaposlenosti. Na kom obimu zaposlenosti počinje da deluje zakon opadajućih graničnih prinosa?

L	Q
0	0
1	20
2	50
3	90
4	160
5	250
6	330
7	280

Rešenje:

Prosečan proizvod rada (PP_L) predstavlja ukupan proizvod podeljen brojem zaposlenih radnika (proizvod po radniku):

$$PP_L = \frac{Q}{L}$$

Kada je L = 1, PP_L iznosi: PP_L = 20/1 = 20.

Kada je L = 2, PP_L iznosi: PP_L = 50/2 = 25.

Kada je $L = 3$, PP_L iznosi: $PP_L = 90/3 = 30$.

Kada je $L = 4$, PP_L iznosi: $PP_L = 160/4 = 40$.

Kada je $L = 5$, PP_L iznosi: $PP_L = 250/5 = 50$.

Kada je $L = 6$, PP_L iznosi: $PP_L = 330/6 = 55$.

Kada je $L = 7$, PP_L iznosi: $PP_L = 280/7 = 40$.

Za $L = 0$ nećemo računati prosečan proizvod, jer nama ekonomske logike da se računa proizvod po radniku, kad nema radnika.

Prosečan proizvod rada za svaki obim zaposlenosti prikazan je u tabeli:

L	Q	PP_L
0	0	-
1	20	20
2	50	25
3	90	30
4	160	40
5	250	50
6	330	55
7	280	40

Graničan proizvod rada (GP_L) predstavlja promenu ukupnog proizvoda do koje je došlo zapošljavanjem dodatnog radnika (proizvod dodatnog radnika):

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{Q_1 - Q_0}{L_1 - L_0}$$

gde Q_1 predstavlja ukupan proizvod nakon zapošljavanja dodatnog radnika (kada je broj radnika L_1), Q_0 ukupan proizvod pre zapošljavanja dodatnog radnika (kada je broj radnika L_0).

Za $L = 0$ ne računamo graničan proizvod jer on ne postoji (još uvek nije došlo do zapošljavanja nijednog radnika).

Kada zaposlimo prvog radnika ($L = 1$), graničan proizvod rada iznosi:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{20 - 0}{1 - 0} = \frac{20}{1} = 20$$

Dakle, kada nismo imali zaposlenoh radnika ($L = 0$), ukupan proizvod je bio 0. Kada zaposlimo jednog radnika, ukupan proizvod je 20. Dakle, graničan proizvod prvog radnika (ono čime on doprinosi proizvodnji) iznosi upravo 20.

Kada zaposlimo drugog radnika (L = 2), graničan proizvod rada iznosi:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{50 - 20}{2 - 1} = \frac{30}{1} = 30$$

Dakle, kada smo imali jednog zaposlenog radnika (L = 1), ukupan proizvod je bio 20. Kada zaposlimo još jednog radnika, ukupan proizvod je 50. Dakle, graničan proizvod drugog zaposlenog radnika (ono čime on doprinosi proizvodnji) iznosi 30.

Kada zaposlimo trećeg radnika (L = 3), graničan proizvod rada iznosi:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{90 - 50}{3 - 2} = \frac{40}{1} = 40$$

Dakle, kada smo imali dva zaposlena radnika (L = 2), ukupan proizvod je bio 50. Kada zaposlimo još jednog radnika, ukupan proizvod je 90. Dakle, graničan proizvod trećeg zaposlenog radnika (ono čime on doprinosi proizvodnji) iznosi 40.

Kada zaposlimo četvrtog radnika (L = 4), graničan proizvod rada iznosi:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{160 - 90}{4 - 3} = \frac{70}{1} = 70$$

Dakle, kada smo imali tri zaposlena radnika (L = 3), ukupan proizvod je bio 90. Kada zaposlimo još jednog radnika, ukupan proizvod je 160. Dakle, graničan proizvod četvrtog zaposlenog radnika (ono čime on doprinosi proizvodnji) iznosi 70.

Kada zaposlimo petog radnika (L = 5), graničan proizvod rada iznosi:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{250 - 160}{5 - 4} = \frac{90}{1} = 90$$

Dakle, kada smo imali četiri zaposlena radnika (L = 4), ukupan proizvod je bio 160. Kada zaposlimo još jednog radnika, ukupan proizvod je 250. Dakle, graničan proizvod petog zaposlenog radnika (ono čime on doprinosi proizvodnji) iznosi 90.

Kada zaposlimo šestog radnika (L = 6), graničan proizvod rada iznosi:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{330 - 250}{6 - 5} = \frac{80}{1} = 80$$

Dakle, kada smo imali pet zaposlenih radnika (L = 5), ukupan proizvod je bio 250. Kada zaposlimo još jednog radnika, ukupan proizvod je 330. Dakle, graničan proizvod šestog zaposlenog radnika (ono čime on doprinosi proizvodnji) iznosi 80.

Kada zaposlimo sedmog radnika (L = 7), graničan proizvod rada iznosi:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{280 - 330}{7 - 6} = \frac{-50}{1} = -50$$

Dakle, kada smo imali šest zaposlenih radnika (L = 6), ukupan proizvod je bio 330. Kada zaposlimo još jednog radnika, ukupan proizvod je 280. Dakle, graničan proizvod sedmog zaposlenog radnika (ono čime on doprinosi proizvodnji) iznosi -50. Graničan proizvod radnika je negativan, dakle, on odmaže proizvodnom procesu. Razlog opadajućeg, pa u određenom trenutku i negativnog, graničnog proizvoda rada je fiksan kapital (jer se radi o proizvodnji sa jednim varijabilnim faktorom). Uvećanje obima proizvodnje zapošljavanjem dodatnih radnika je moguće do određene granice ako je kapital (npr. fabrika, proizvodno postrojenje, broj vozila i sl.) fiksan.

Graničan proizvod rada za svaki obim zaposlenosti prikazan je u tabeli:

L	Q	PP_L	GP_L
0	0	-	-
1	20	20	20
2	50	25	30
3	90	30	40
4	160	40	70
5	250	50	90
6	330	55	80
7	280	40	-50

Zakon opadajućih graničnih prinosa počinje da deluje sa zapošljavanjem šestog radnika (na nivou zaposlenosti L = 6. Kad zaposlimo šestog radnika, njegov graničan proizvo je manji od graničnog proizvoda prethodno zaposlenog (petog) radnika (80<90).

Zadatak 16. Transportna kompanija raspolaže sa dva kamiona. Sa tri zaposlena vozača kompanija preveze mesečno 210 tona robe, dok sa četiri vozača kompanija mesečno preveze 260 tona robe.

a) Koliko iznosi graničan proizvod četvrtog radnika?

Rešenje:

$$GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{260 - 210}{4 - 3} = \frac{50}{1} = 50$$

Graničan proizvod četvrtog radnika iznosi 50 tona.

b) Koliko najviše tona robe kompanija može da preveze sa pet zaposlenih radnika, imajući u vidu da važe opadajući granični prinosi?

Rešenje:

Ako važe opadajući granični prinosi, graničan proizvod petog radnika mora biti manji od graničnog proizvoda četvrtog radnika.

Kako je graničan proizvod četvrtog radnika 50, graničan proizvod petog radnika mora biti manji od 50.

Sa četiri radnika, ukupan proizvod je 260 tona, a sa pet radnika ukupan proizvod može najviše biti 260 + 49 = 309 tona.

Zadatak 17. Proizvođač automobila u dve svoje fabrike sa ukupno 40.000 radnika proizvede godišnje 80.000 automobila. Ukoliko bi udvostručio angažovanje inputa, tako da ima četiri fabrike sa ukupno 80.000 radnika, godišnje bi mogao da proizvede 150.000 automobila. Kakvi prinosi karakterišu ovu proizvodnju i zašto?

Rešenje:

Uvećanje angažovanja inputa od dva puta (za 100%), vodi uvećanju proizvodnje od 1,875 puta (za 87,5%):

$$\frac{150.000}{80.000} = 1{,}875$$

S obzirom da je procentualno uvećanje proizvodnje manje od procentualnog uvećanja angažovanih inputa, radi se o opadajućim prinosima u proizvodnji.

Zadatak 18. Data je proizvodna funkcija $Q = \frac{1}{2}L^2K^{\frac{1}{2}}$.

a) Da li je u pitanju funkcija sa rastućim, opadajućim ili konstantnim prinosima?

Rešenje:

Kada se poveća angažovanje proizvodnih faktora (rada – L i kapitala – K), povećaće se i obim proizvodnje (Q). Ako se i rad i kapital npr. udvostruče, znamo da će se obim proizvodnje Q povećati. Ako se i on udvostruči, u pitanju su konstantni prinosi, ako se više nego udvostruči u pitanju su rastući prinosi, a ako se manje nego udvostruči u pitanju su opadajući prinosi.

Da li naša funkcija ima karakteristike konstantnih, opadajućih ili rastućih prinosa, možemo saznati koristeći neki numerički primer. Npr. pretpostavimo da je L=1 i K=1. Koliko onda iznosi Q?

$$Q = \frac{1}{2}L^2K^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}1^2 1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ako bismo sada udvostručili angažovanje proizvodnih faktora tako da je L=2 i K=2, ukupan proizvod Q bi iznosio:

$$Q = \frac{1}{2}L^2K^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}2^2 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} = 2{,}83$$

Dakle, kao rezultat povećanja L i K od 2 puta, ukupni proizvod se povećao 5,66 puta (sa 0,5 na 2,83). U pitanju su dakle rastući prinosi.

Ili može se pokazati i opštim brojevima. Ako imamo $Q = \frac{1}{2}L^2K^{\frac{1}{2}}$ i ako povećamo angažovanje rada i kapitala λ puta imaćemo ukupan proizvod:

$$\frac{1}{2}(\lambda L)^2(\lambda K)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\lambda^2L^2\lambda^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = \lambda^{2+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}L^2K^{\frac{1}{2}}\right) = \lambda^{\frac{5}{2}}Q$$

Dakle, ako se rad i kapital povećaju λ puta, ukupan proizvod će se povećati $\lambda^{\frac{5}{2}}$ puta (sa Q na $\lambda^{\frac{5}{2}} \times Q$). Kako je $\frac{5}{2} > 1$ u pitanju su rastući prinosi. *Napomena: Da je bilo manje od 1 bili bi opadajući prinosi, a da je bilo jednako jedan bili bi konstantni prinosi.*

b) Koliko iznosi ukupan proizvod, a koliko graničan proizvod rada i graničan proizvod kapitala ako preduzeće u proizvodnji angažuje pet jedinica rada i četiri jedinice kapitala?

Rešenje:

Kada je L=5 i K=4 ukupan proizvod iznosi:

$$Q = \frac{1}{2}L^2K^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}5^2 4^{\frac{1}{2}} = 25$$

Graničan proizvod rada iznosi: $GP_L = \frac{\Delta Q}{\Delta L}$. Međutim, kako je u pitanju neprekidna funkcija i kako L ne uzima samo vrednosti celih brojeva nego svih realnih brojeva, graničan proizvod rada izračunava se kao prvi izvod funkcije ukupnog proizvoda po L, odnosno: $GP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$. Pošto mi imamo funkciju dve promenljive (L i K), graničan proizvod rada pokazuje za koliko se menja ukupan proizvod kada se rad promeni za minimalno (infinitezimalna promena) uz konstantan kapital. Dakle, kada radimo prvi izvod funkcije Q po L, K držimo kao konstantu (parcijalni izvod po L):

$$GP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = Q'_L = (\frac{1}{2}L^2K^{\frac{1}{2}})'_L = \frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}} \times 2L = LK^{\frac{1}{2}}$$

Kada ubacimo vrednosti L=5 i K=4 dobijamo:

$$GP_L = 5 \times 4^{\frac{1}{2}} = 10$$

Graničan proizvod kapitala iznosi: $GP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$. Radi se prvi izvod funkcije Q po K, pri čemu se L posmatra kao konstanta (parcijalni izvod po K).

$$GP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = Q'_K = (\frac{1}{2}L^2K^{\frac{1}{2}})'_K = \frac{1}{2}L^2 \times \frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}L^2 \times \frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{L^2}{K^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} \times \frac{5^2}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{25}{8}$$

$$= 3{,}125$$