



UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

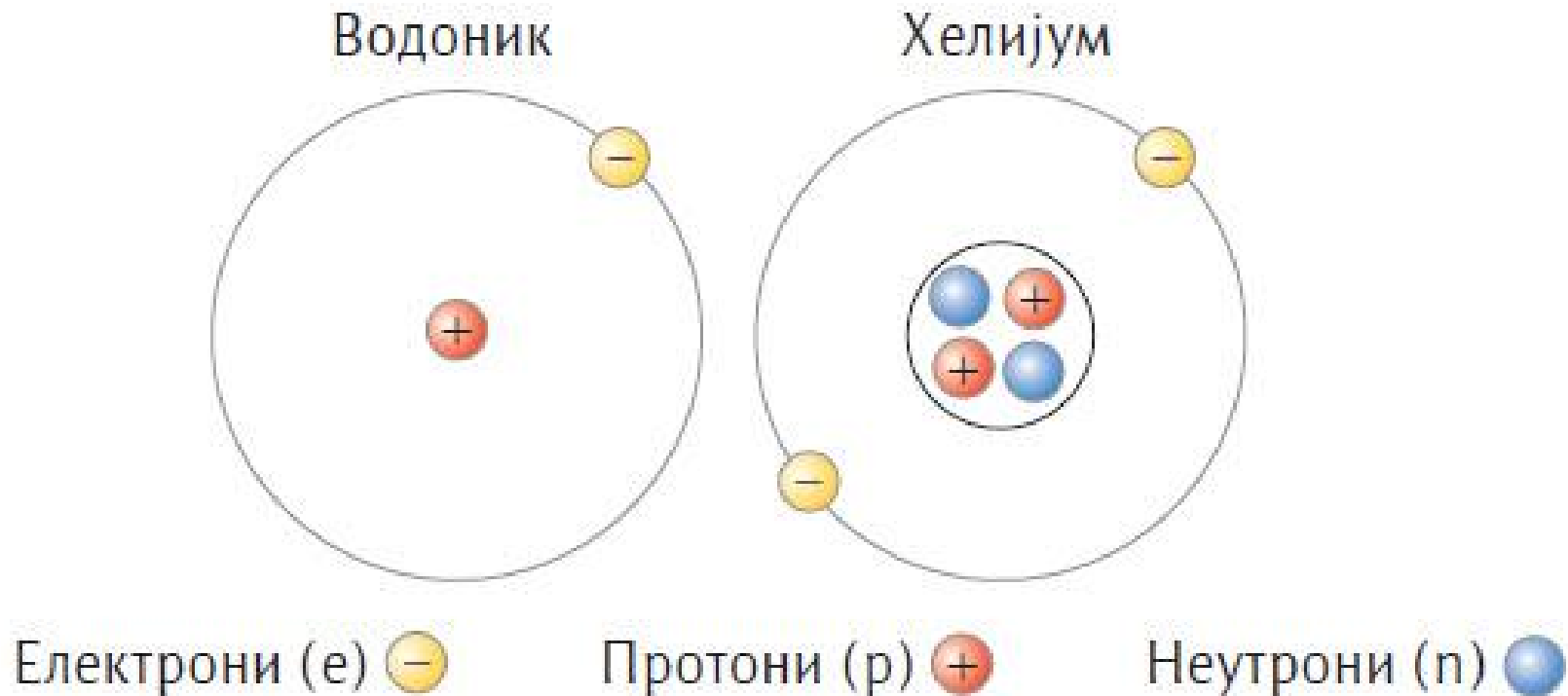
ELEKTROTEHNIKA

- ŠKOLSKA 2026/2027 -

1. ELEKTROSTATIKA

NAELEKTRISANJE

- Naelektrisanje jednog protona je: $q_p = 1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (Kulon).
- Naelektrisanje jednog elektrona je: $q_e = -q_p$.



- Provodnici:
 - Veliki broj “slobodnih” naelektrisanja: elektroni (metali), joni (tečnosti i gasovi)
 - Metali: platina, zlato, srebro, bakar, aluminijum, ...
 - Rastvori: baterije, akumulatori, kondenzatori, ...
 - Gasovi: neonske lampe
- Izolatori:
 - Izuzetno mali broj “slobodnih” naelektrisanja - sva su vezana za atom (jezgro)
 - Materijali: guma, porcelan, keramika, plastika, ...
- Poluprovodnici:
 - Srednnji broj “slobodnih” naelektrisanja koji se tipično mogu kontrolisati/projektovati
 - Materijali: silicijum, getmanijum, ... (okolina IV grupe periodnog sistema elemenata)
 - Primene: čipovi, svetleće diode (LED), laserske diode (LD), fotodiode (PD), ...

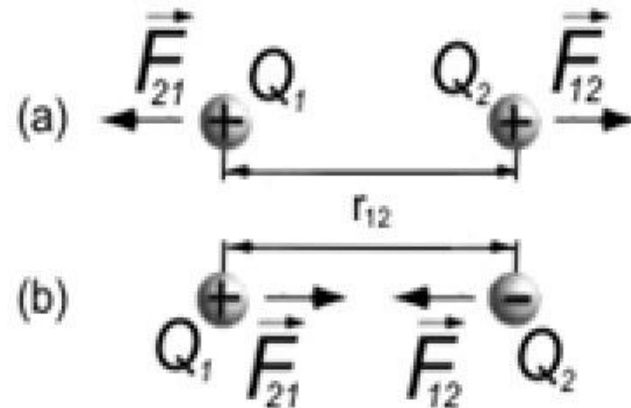
- Tačkasto naelektrisanje - metalna “kuglica” malih dimenzija (tačka)
 - Q - količina naelektrisanja, jedinica je Kulon (C)
- Linijska gustina naelektrisanja - linijsko naelektrisanje
 - $\sigma_L = \frac{Q}{L}$, gde je L - dužina žice na kojoj je akumulirano naelektrisanje (ako je konačna)
- Površinska gustina naelektrisanja - ravansko naelektrisanje
 - $\sigma_S = \frac{Q}{S}$, gde je S - površina ravni na kojoj je akumulirano naelektrisanje (ako je konačna)
- Zapreminska gustina naelektrisanja - prostorno naelektrisanje
 - $\sigma_V = \frac{Q}{V}$, gde je V - zapremina prostora u kome je naelektrisanje (ako je konačna)

KULONOV ZAKON ZA TAČKASTA NAELEKTRISANJA

- Istoimena naelektrisanja se odbijaju, raznoimena se privlače.
- F_{12} je sila kojom naelektrisanje Q_1 deluje na naelektrisanje Q_2 .
- Ort $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ uvek ima smer od naelektrisanja koje deluje silom (za silu F_{12} to je Q_1) ka naelektrisanju na koje se deluje silom (za silu F_{12} to je Q_2).
- $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ [F/m] - dielektrična permitivnost vakuumu

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

$$\vec{r}_o = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}; \quad |\vec{r}_o| = 1$$



ELEKTRIČNO POLJE ZA TAČKASTA NAELEKTRISANJA

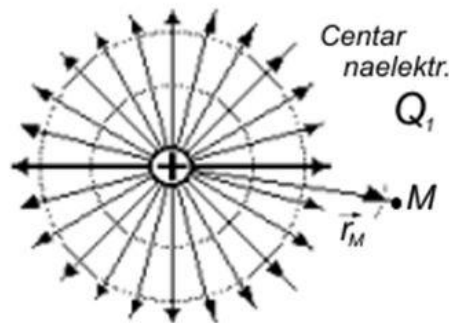
- Električno polje postoji u okolini naelektrisanih tela (Q_1) i definiše se preko sile F_{12} na neko naelektrisanje Q_2 koje se nalazi u okolini Q_1 :

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_{12}}{Q_2}$$

- Jedinica Njutn po Kulonu (N/C) ili Volt po metru (V/m). Ako je naelektrisanje Q_2 bilo u tački M, tada je polje u toj tački:

$$\vec{K}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{r_M^2} \vec{r}_o; \quad |\vec{r}_o| = 1$$

- Ort je uvek usmeren od naelektrisanja Q_1 ka tački M u kojoj se posmatra električno polje.



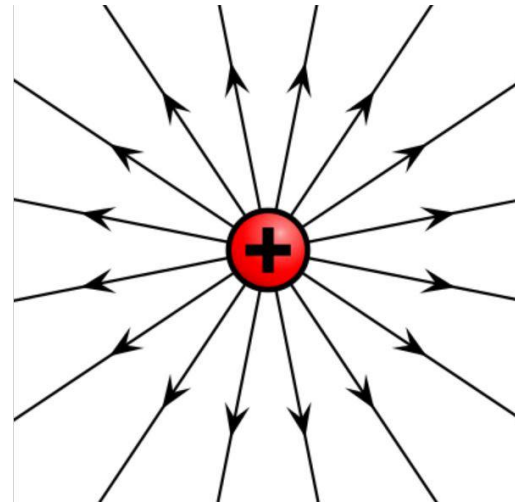
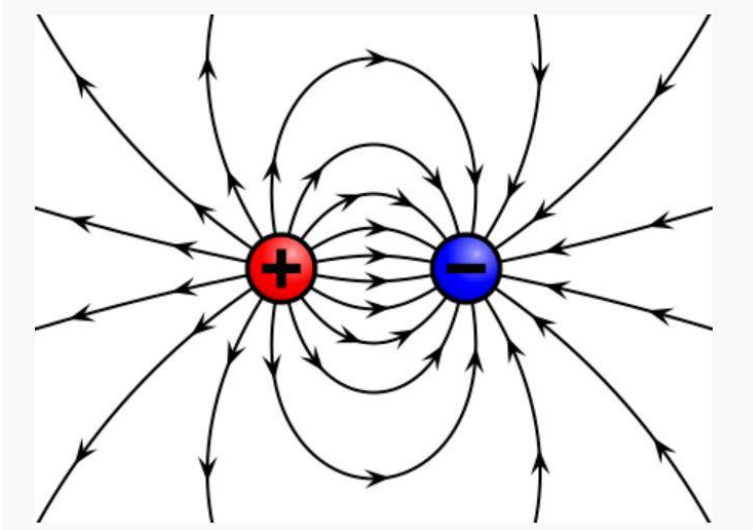
Slika 1.3.1 Električno polje usamljenog nepokretnog tačkastog naelektrisanja

ELEKTRIČNO POLJE ZA TAČKASTA NAELEKTRISANJA

- Električno polje koje postoji u okolini više tačkastih naelektrisanja se dobija vektorskim sumiranjem polja pojedinih naelektrisanja (superpozicija).

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_{oi}; \quad |\vec{r}_o| = 1$$

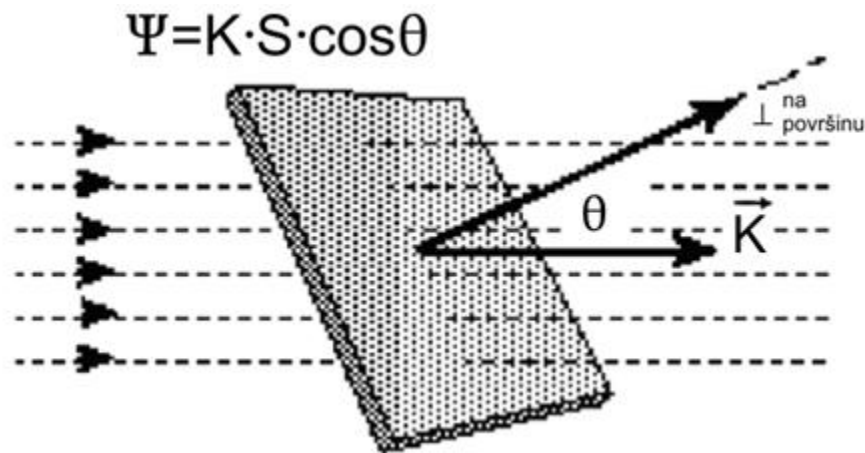
- Električno polje se često grafički prikazuje pomoću linija električnog polja.
- Vektor električnog polja u nekoj tački ima pravac tangente i smer linije polja.



- Fluks električnog polja kroz ravnu površ:

$$\Psi = \vec{K} \vec{S} = KS \cos(\vec{K}, \vec{S})$$

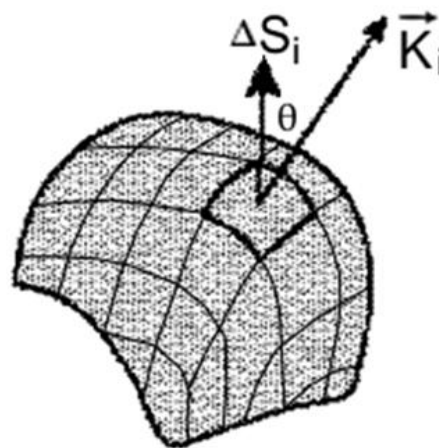
$$\vec{S} = S\vec{n}_o$$



- Šta ako površ nije ravna?

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Psi_i = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \Delta \vec{S}_i$$

$$Diam \Delta S_i \rightarrow 0$$



- **Gausov zakon** - fluks vektora električnog polja Ψ_{S_z} kroz zatvorenu površ S_z jednak je zbiru slobodnih naelektrisanja obuhvaćenih tom površi:

$$\Psi_{S_z} = \frac{\sum_{S_z} Q_{S_z}}{\epsilon_0}$$

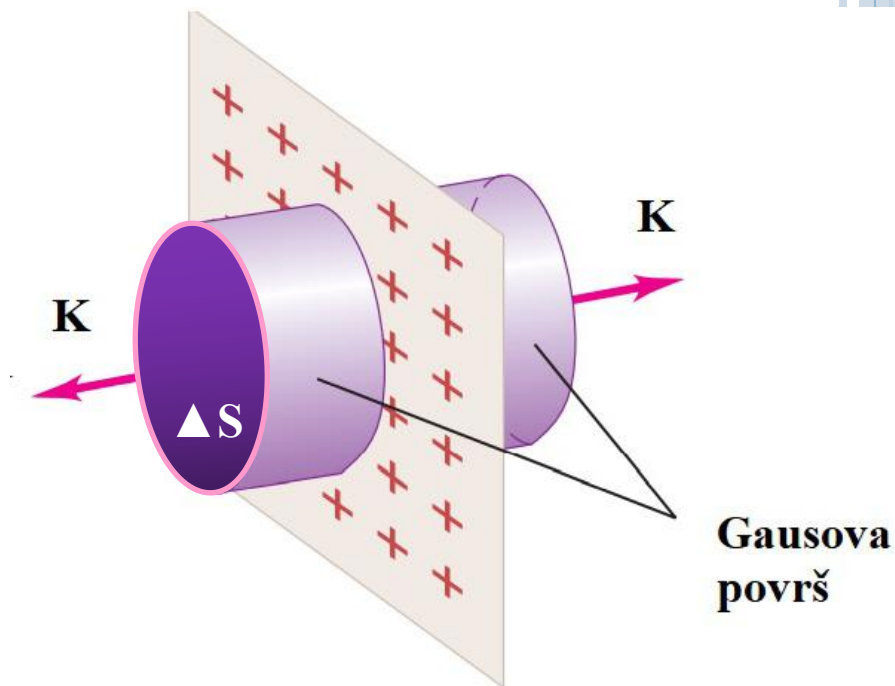
- Za zatvorenu površ, vektor površi $\vec{dS}$ se uobičajeno definiše sa normalom prema spolja.
- **Fluks kroz zatvorenu površ u kojoj nema slobodnih naelektrisanja je jednak 0!**

ELEKTRIČNO POLJE NAELEKTRISANE RAVNI

- Ako je naelektrisana ravan beskonačna, tada polje u okolini ravni ne zavisi od rastojanja od nje - polje je konstantnog inteziteta.
- Zbog simetrije, linije polja i vektor polja su upravni na beskonačnu ravan.
- Zamislimo Gausovu površ oblika cilindra kao na slici.
- Kroz omotač cilindra nema fluksa.
- Fluks postoji samo kroz osnove: $\psi = 2K \Delta S$.
- Ukupno naelektrisanje obuhvaćeno Gausovom površi je: $Q = \sigma \Delta S$.
- Primenom GZ:

$$\psi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2K \Delta S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Delta S$$

$$K = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



UTICAJ DIELEKTRIKA

- Dielektrik je izolator koji se polarizuje pod dejstvom polja.
- Polje se smanjuje ϵ_r puta.
- Relativna dielektrična konstanta ϵ_r (**neimenovani broj**):

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \epsilon_r > 1$$

- Tačkasta naelektrisanja:

$$K = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

- Površinsko naelektrisanje:

$$K = \frac{\sigma}{2\epsilon} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon_r}$$

RAD SILA ELEKTRIČNOG POLJA

- Rad električne sile da pomeri naelektrisanje:

$$\Delta A = \vec{F} \Delta \vec{l}$$

- Elementarni rad sila na nekoj putanji od A do B:

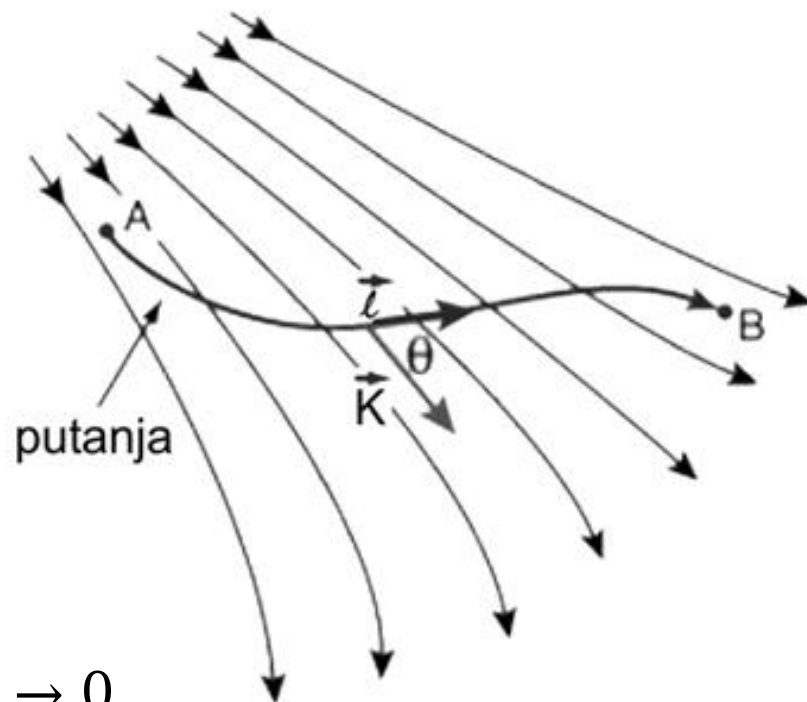
$$\Delta A_i = \Delta Q \vec{K}_i \Delta \vec{l}_i$$

- Jedinica za rad je Džul (J).
- Ukupni rad sila od A do B:

$$A = \sum_{i=1}^N \Delta A_i = \Delta Q \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \Delta \vec{l}_i, \quad |\Delta l_i| \rightarrow 0$$

$$A = \Delta Q \int_A^B \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

- Zatvorena putanja L (na primer A-B-A): $\oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l} = 0$



- Napon između tačaka A i B je:

$$U_{AB} = \frac{A}{\Delta Q} = \int_A^B \vec{K} d\vec{l}$$

$$U_{BA} = \int_B^A \vec{K} d\vec{l} = -U_{AB}$$

- Potencijal tačke A je napon između tačke A i referentne tačke R nultog potencijala:

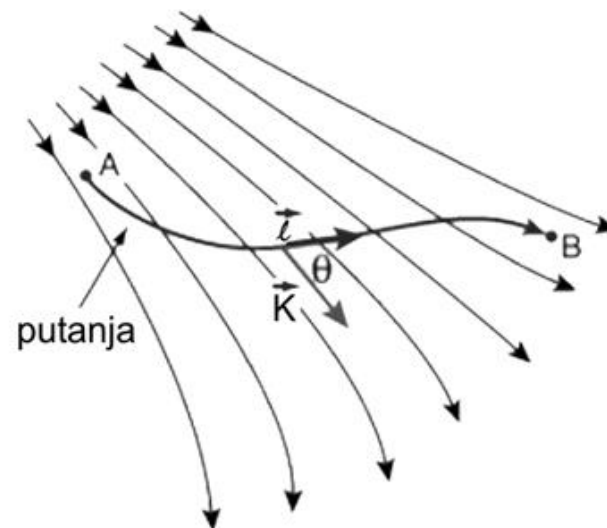
$$V_A = U_{AR} = \int_A^R \vec{K} d\vec{l}$$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{K} d\vec{l} = \int_A^R \vec{K} d\vec{l} + \int_R^B \vec{K} d\vec{l}$$
$$U_{AB} = V_A - V_B$$

- Napon po zatvorenoj putanji je jednak nuli:

$$\oint \vec{K} d\vec{l} = 0$$

- Jedinica za napon i potencijal je Volt (V).



- Potencijal u tački M tačkastog naelektrisanja za referentnu tačku R:

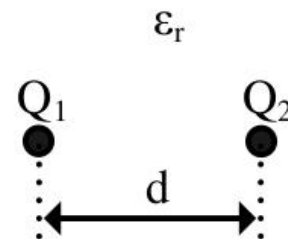
$$V_M = U_{MR} = \int_M^R \vec{K} d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_M^R \frac{dr}{r^2}$$

$$V_M = U_{MR} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_R} \right)$$

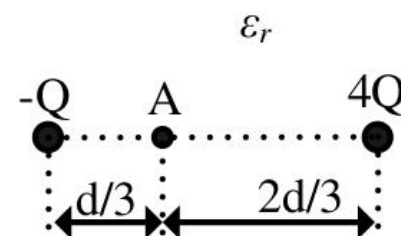
- Ako je referentna tačka R u beskonačnosti:

$$V_M = U_{MR} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_M}$$

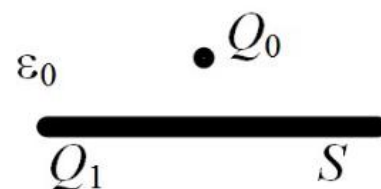
1. Dve kuglice veoma malih dimenzija naelektrisanе su pozitivnim količinama naelektrisanja $Q_1 > 0$ i $Q_2 > 0$, kao na slici. Kuglice se nalaze na rastojanju d u sredini čija je relativna dielektrična konstanta ϵ_r . Odrediti intenzitet i nacrtati vektor sile kojom prva kuglica deluje na drugu. (6 poena)



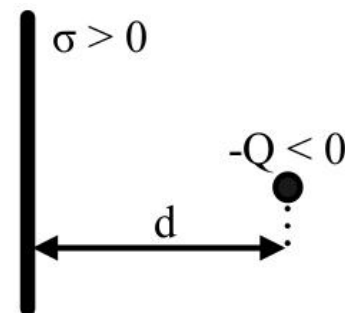
2. (6 poena) Dve kuglice veoma malih dimenzija naelektrisanе su količinama naelektrisanja $Q_1 = -Q$ i $Q_2 = 4Q$, gde je $Q > 0$. Kuglice se nalaze na rastojanju d u sredini čija je relativna dielektrična konstanta ϵ_r , kao na slici. Usvojiti proizvoljni koordinatni sistem, a zatim odrediti i nacrtati vektor električnog polja u tački A koja se nalazi na rastojanju $d/3$ od prve i $2d/3$ od druge kuglice.



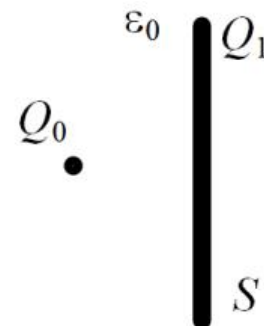
3. (6 poena) U vazduhu, iznad velike horizontalne ploče površine S naelektrisanе količinom naelektrisanja $Q_1 = Q > 0$ nalazi se tačkasto naelektrisanje $Q_0 = -Q$. Odrediti intenzitet sile kojom ploča deluje na tačkasto naelektrisanje.



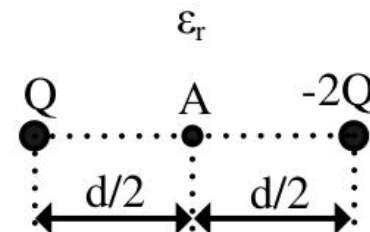
4. Veoma velika ravna metalna ploča, ravnomerno naelektrisanа površinskom gustinom naelektrisanja $\sigma > 0$ i metalna kuglica veoma malih dimenzija, negativno naelektrisanа količinom naelektrisanja $-Q < 0$, nalaze se u vazduhu na rastojanju d kao na slici. Odrediti i nacrtati vektor sile kojom ploča deluje na kuglicu. (6 poena)



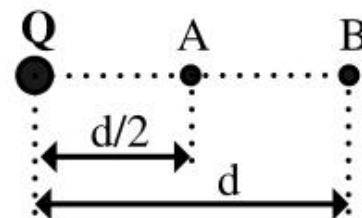
5. U vazduhu, pored velike ploče površine S naelektrisanane nepoznatom količinom naelektrisanja $Q_1 > 0$ nalazi se tačkasto naelektrisanje $Q_0 > 0$. Ukoliko je poznat intenzitet sile F uzajamnog dejstva ploče i tačkastog naelektrisanja, odrediti Q_1 . Poznato je S , Q_0 , F i ϵ_0 . **(6 poena)**



6. Dve kuglice veoma malih dimenzija naelektrisanane su količinama naelektrisanja Q i $-2Q$. Kuglice se nalaze na rastojanju d u sredini čija je relativna dielektrična konstanta ϵ_r , kao na slici. Odrediti potencijal električnog polja u tački A koja se nalazi na sredini rastojanja između kuglica. **(6 poena)**



7. **(6 poena)** Veoma mala kuglica naelektrisanana količinom naelektrisanja $Q > 0$ nalazi se u vazduhu. Na rastojanjima $d/2$ i d od naelektrisanane kuglice nalaze se redom tačke A i B, kao što je prikazano na slici. Ako su vrednosti naelektrisanja Q i rastojanja d poznate, odrediti izraz za napon između tačaka A i B.



8. Veoma velika ravna ploča, ravnomerno naelektrisanana površinskom gustinom naelektrisanja $\sigma > 0$, nalazi se u vazduhu. Desno od ploče, nalaze se tačke A i B kao na slici. Odrediti napon U_{AB} . **(6 poena)**

