



UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

ELEKTROTEHNIKA

- ŠKOLSKA 2025/2026 -

2. JEDNOSMERNE STRUJE
- OSNOVNI POJMOVI, OZ I KZ -

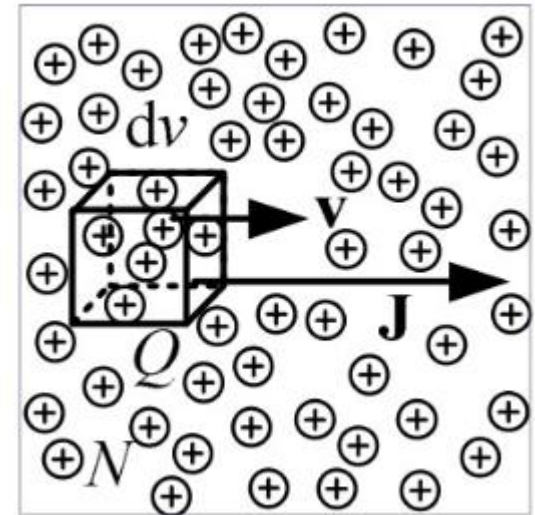
POVRŠINSKA GUSTINA ELEKTRIČNE STRUJE

2

- Električna struja u provodnicima nastaje pod dejstvom električnog polja.
- Električno polje deluje na naelektrisane čestice koje se usmenreno kreću u pravcu polja (pozitivne u smeru vektora polja, a negativne u suprotnom smeru) brzinom $\mathbf{v}$.
- Vektr površinske gustine električne struje se definiše

$$\vec{J} = NQ\vec{v} = NQ\mu\vec{K} = \gamma\vec{K}.$$

- Q je naelektrisanje slobodne čestice, N njihova koncentracija u prostoru, a μ pokretljivost.
- Smer vektora $\mathbf{J}$ je tehnički smer struje, **svejedno je da li se pozitivna čestica kreće u pravcu polja ili negativna u suprotnom pravcu!!!**
- Jedinica je $\mathbf{A/m^2}$ (A - Amper).



SPECIFIČNA PROVODNOST I OTPORNOST

- Dakle, važi da je
$$\vec{J} = \gamma \vec{K}, \quad \vec{K} = \rho \vec{J}, \quad \rho = 1/\gamma$$
- Specifična provodnost γ ima jedinicu **S/m** (S - Simens).
- Specifična otpornost ρ ima jedinicu **Ωm** (Ω - Om).
- Srebro: $\gamma=63 \text{ MS/m}$, a $\rho=16 \text{ n}\Omega\text{m}$.
- Bakar: $\gamma=58 \text{ MS/m}$, a $\rho=17 \text{ n}\Omega\text{m}$.
- **Savršeni provodnik**
$$\gamma \rightarrow \infty, \rho = 0$$
- Dakle, i ako postoji struja, električno polje je **$K=0$** !
- **Savršeni izolator**
$$\gamma = 0, \rho \rightarrow \infty$$
- Dakle, i ako postoji električno polje, gustina struje je **$J=0$** !

- Kada struja protiče kroz provodne žice, dovoljno je posmatrati brzinu proticanja slobodnih naelektrisanja kroz poprečni presek žičanog provodnika.
- U tu svrhu definiše se **jačina struje** (jedinica A)

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

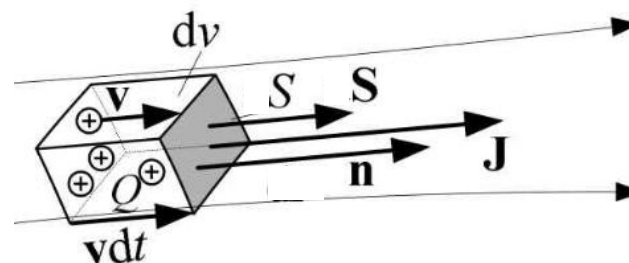
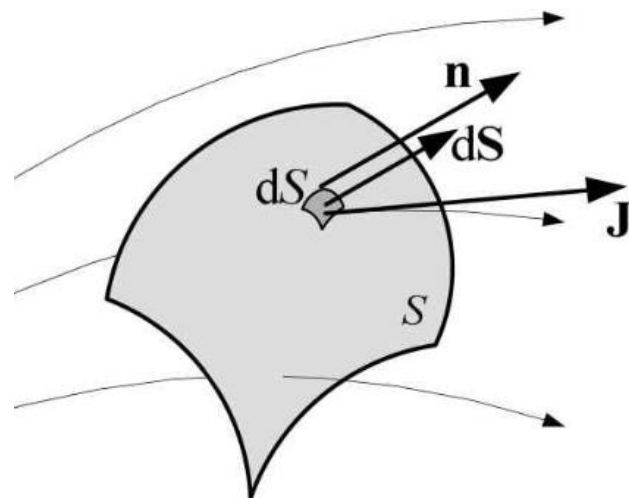
- Ako posmatramo površ S normalnu na vektor gustine struje koju čine nosioci naelektrisanja Q i koncentracije N , a brzina njihovog kretanja je v , tada je

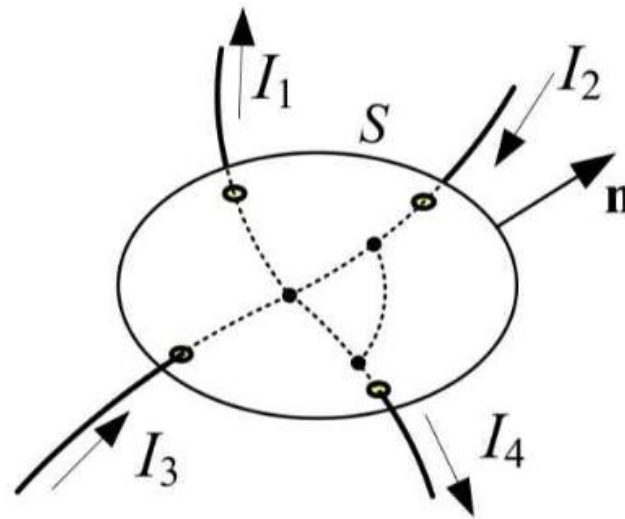
$$I = JS = (NQv)S$$

$$I = \frac{QNS(vdt)}{dt} = \frac{QN(Sdl)}{dt}$$

$$I = \frac{QN dV}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

- Dakle, jačina struje je jednaka brzini protoka naelektrisanja kroz površ S u jedinici vremena.





- Ukoliko nema nagomilavanja naelektrisanja fluks vektora gustine struje kroz zatvorenu površ S jednak je nuli

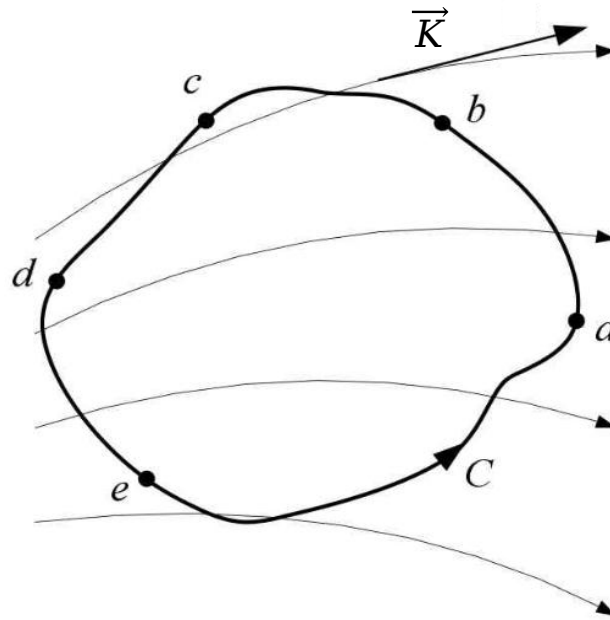
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Ukoliko zatvorena površ S obuhvata žičane provodnike

$$+I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

- Ova jednakost se naziva **I Kirhofov zakon (I KZ)**.

DRUGI KIRHOFOV ZAKON



- Duž zatvorene konture C cirkulacija vektora K je jednaka nuli

$$\oint_C \vec{K} \cdot d\vec{l} = 0$$

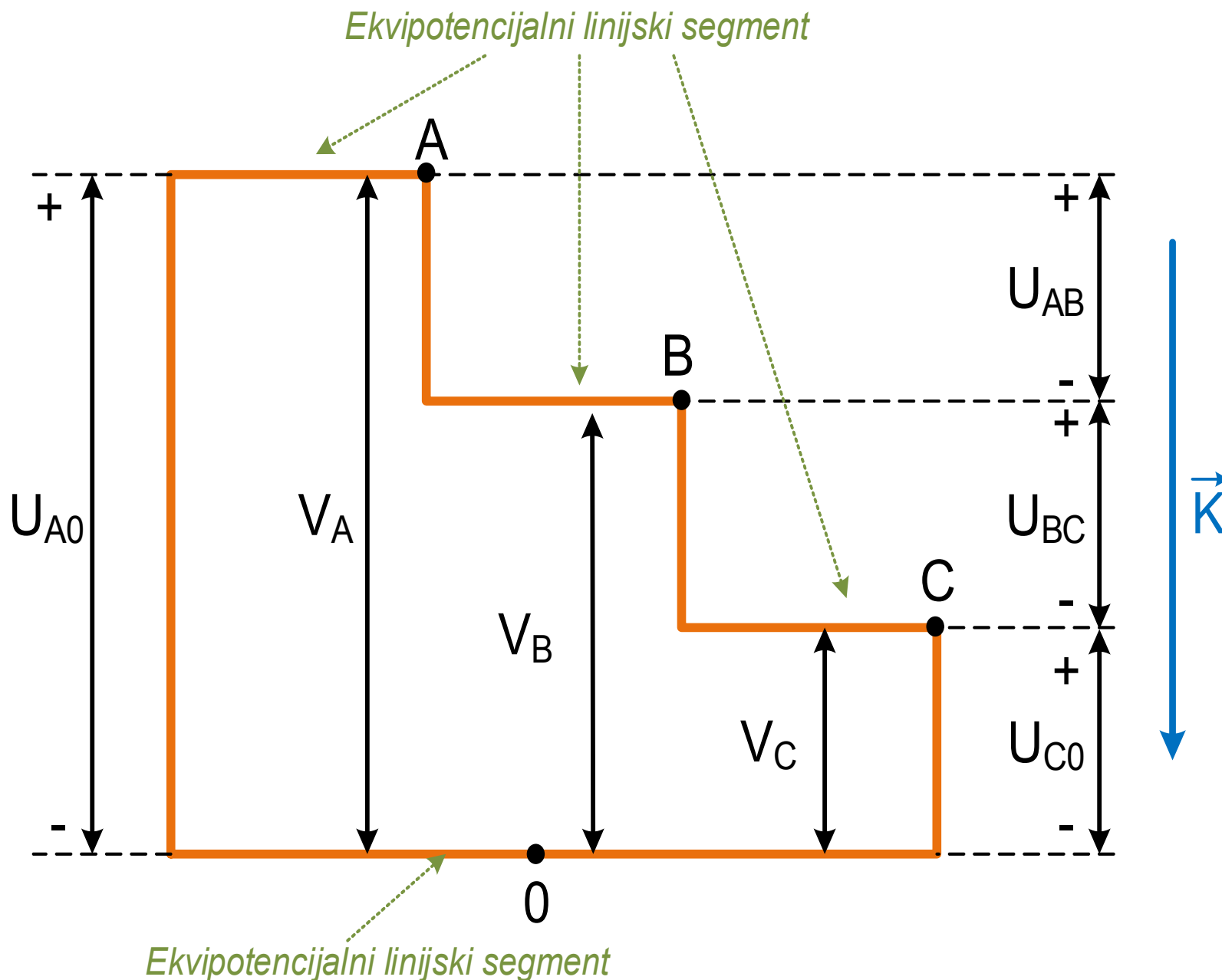
- Ako se ovaj integral razloži na delove putanje C , dobija se

$$\oint_C \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_d^e \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_e^a \vec{K} \cdot d\vec{l} = 0$$
$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{de} + U_{ea} = 0$$

- Ova jednakost se naziva **II Kirhofov zakon (II KZ)**.

DRUGI KIRHOFOV ZAKON

-



DRUGI KIRHOFOV ZAKON

- Dva načina pisanja jednačina po II KZ:
 1. Kretanje niz polje (u smeru opadanja napona): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (+) ka (-),
 2. Kretanje uz polje (u smeru porasta napona): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (-) ka (+).
- I način (piše se (+) u smeru opadanja napona), ako se kreće u smeru kazaljki na satu dobija se
$$U_{AB} + U_{BC} + U_{C0} - U_{A0} = 0$$
- II način (piše se (+) u smeru porasta napona), ako se kreće u smeru kazaljki na satu dobija se
$$-U_{AB} - U_{BC} - U_{C0} + U_{A0} = 0$$
- Oba načina pisanja daju istu jednačinu: dovoljno je obrnuti smer obilaska konture (suprotan od kretanja kazaljki na satu) ili pomnožiti jednačinu sa (-1).
- Odaberite stil pisanja jednačina po vašoj želji!

DRUGI KIRHOFOV ZAKON

- Dva načina pisanja jednačina za potencijal:
 - Kretanje u smeru opadanja napona od tačke u kojoj se traži potencijal ka 0 (referentnoj tački): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (+) ka (-),
 - Kretanje u smeru porasta napona od tačke 0 (referentne tačke) ka tački u kojoj se traži potencijal: u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (-) ka (+).
- I način (piše se (+) u smeru opadanja napona): kretanje mora da se vrši od tačke A/B/C prema tački 0 (referentna tačka)
$$V_A = U_{AB} + U_{BC} + U_{C0} = U_{A0}$$
$$V_B = U_{BC} + U_{C0} = -U_{AB} + U_{A0}$$
$$V_C = U_{C0} = -U_{BC} - U_{AB} + U_{A0}$$
- II način (piše se (+) u smeru porasta napona): kretanje mora da se vrši od tačke 0 (referentna tačka) prema tački A/B/C. **Jednačine su iste i moraju biti iste!!!**

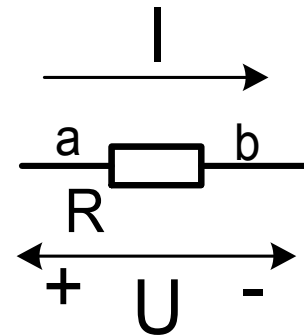
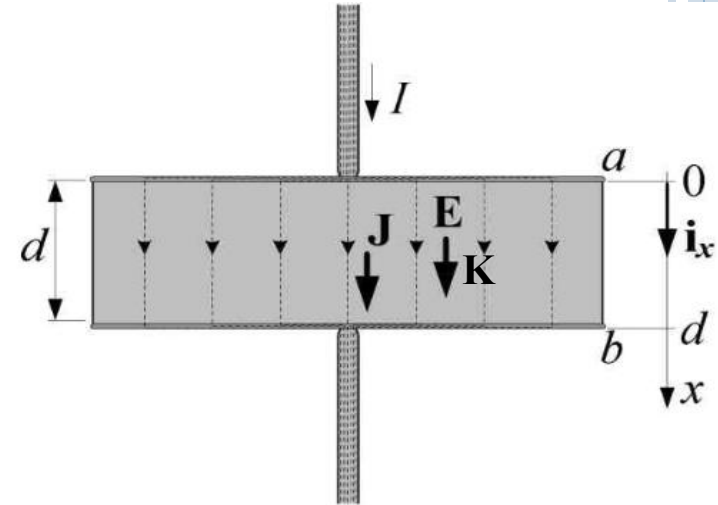
OTPORNIK U KOLU JEDNOSMERNE STRUJE

- Napon na krajevima otpornika je

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \rho \vec{J} \cdot d\vec{l}$$

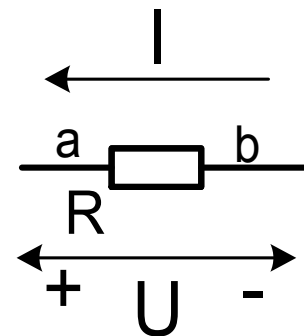
$$U_{ab} = \rho J d = \frac{\rho d}{S} I = RI$$

- Gde je $R = \rho \frac{d}{S}$ parametar koji nazivamo otpornost, a jedinica provodnosi je om (Ω).
- Recipročna vrednost otpornosti naziva se provodnost $G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{S}{d}$ a jedinica je simens (S).
- Jednakost $U_{ab} = RI$ naziva se **Omov zakon**.
- Treba voditi računa da je smer struje od priključka a ka b - usaglašeni referentni smer!



usaglašeni
referentni
smer

$$U_{ab} = RI$$



neusaglašeni
referentni
smer

$$U_{ab} = -RI$$

- Kada se se naelektrisanja kreću kroz otpornik, zbog sudara sa jonima, dolazi do zagrevanja materijala - električni rad se pretvara u toplotu.
- Ovakva pojava da se rad električnih sila pretvara u otporniku u toplotu se naziva **Džulovim gubicima**.
- Može se izvesti da je snaga Džulovih gubitaka $P = UI$, a imajući u vidu Omov zakon dobija se da je

$$P = UI = RI^2 = \frac{I^2}{G} = \frac{U^2}{R} = GU^2$$

- Snaga predstavlja brzinu vršenja rada tj. brzinu sa kojom se vrši konverzija električne energije u toplotnu

$$P = \frac{dA}{dt}$$

- Jedinica za energiju i rad je J (Džul), a za snagu W (Vat).

GENERATOR I OTPORNIK U STRUJNOM KOLU

- Napon generatora U_g je jednak elektromotornoj sili E .
- Po II KZ, napon otpornika je takođe jednak elektromotornoj sili

$$U_R = U_g = E$$

- Prema Omovom zakonu struja u kolu je

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{E}{R}$$

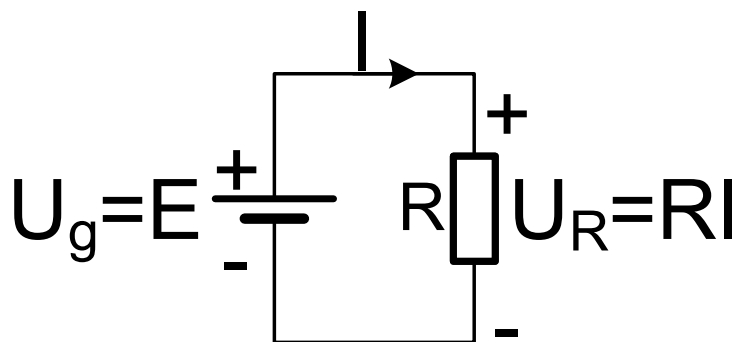
- Snaga Džulovih gubitaka u otporniku

$$P_R = RI^2 = U_R I = EI = \frac{E^2}{R}$$

- Snaga koja se troši u otporniku snabdeva se iz generatora

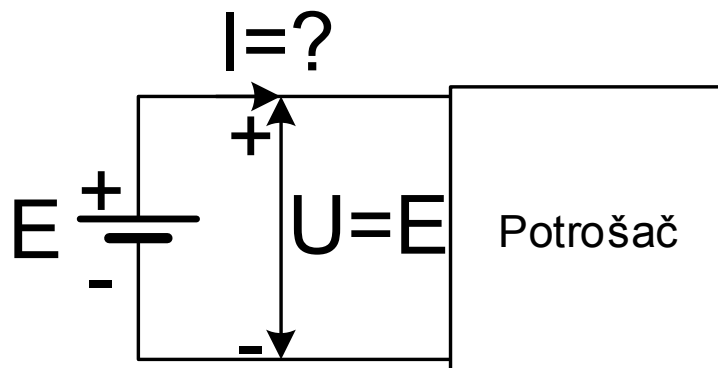
$$P_g = EI = P_R$$

- **Usaglašeni referentni smerovi generatora su suprotni nego za otpornik (struja je usmerena od (-) kraja ka (+) kraju generatora)!**

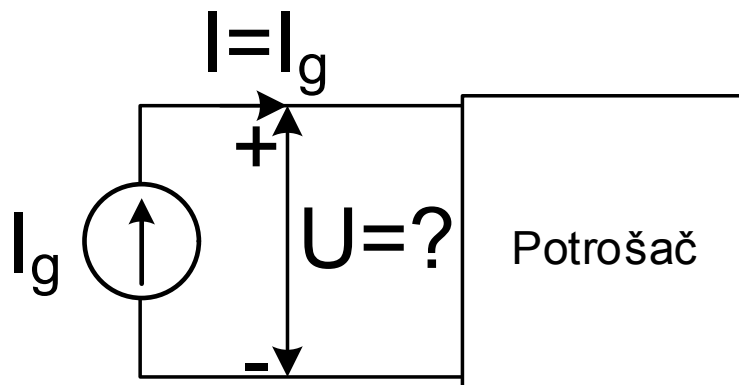
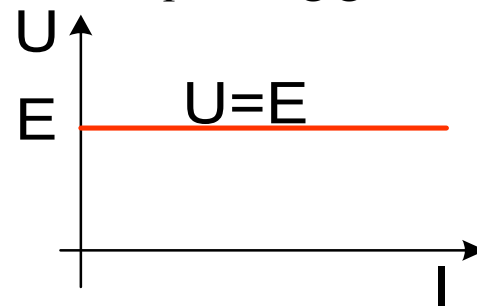


GENERATOR I OTPORNIK U STRUJNOM KOLU

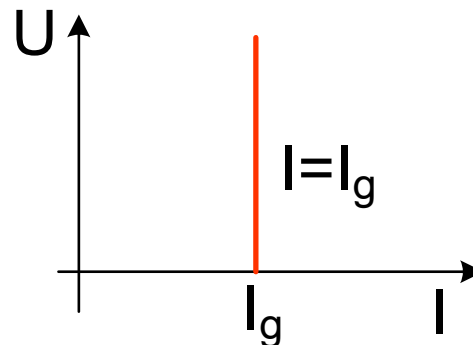
- Naponski generator: $U_g = E$
- Strujni generator: $I_g = I$
- Prethodno definisani generatori nazivaju se **idealnim naponskim i strujnim generatorima**.



U-I karakteristika idealnog naponskog generatora



U-I karakteristika idealnog strujnog generatora

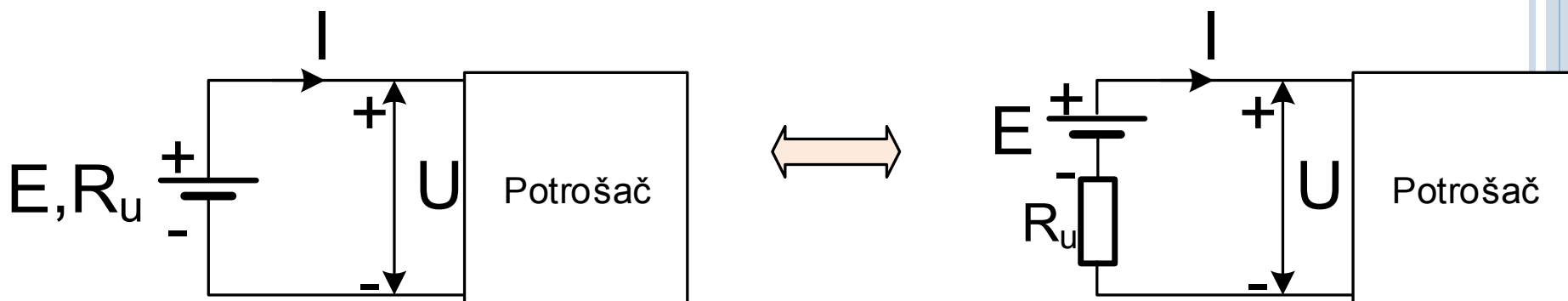


- Realni naponski generatori imaju Džulove gubitke koji se modeluju redno vezanim “unutrašnjim” otpornikom čija je otpornost R_u .
- Napon realnog naponskog generatora opada sa porastom struje kroz potrošač

$$U = E - R_u I$$

- **Realni naponski** generator se može u kolima transformisati u **realni strujni**, vodeći računa da **referentni smerovi ostanu neizmenjeni!** Parametri ekvivalentnog strujnog generatora su

$$G_u = \frac{1}{R_u}, \quad I_g = \frac{E}{R_u}$$



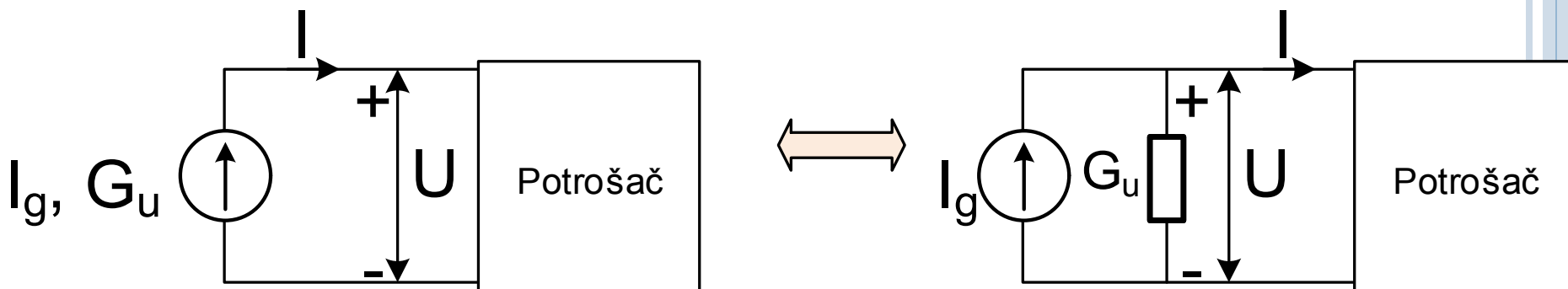
NAPONSKI GENERATOR JE ODREĐEN ŠA (E, R_u)

- Realni strujni generatori imaju Džulove gubitke koji se modeluju paralelno vezanim “unutrašnjim” otpornikom čija je provodnot G_u .
- Struja realnog strujnog generatora opada sa porastom napona potrošača

$$I = I_g - G_u U$$

- **Realni strujni** generator se može u kolima transformisati u **realni naponski** vodeći računa da **referentni smerovi ostanu neizmenjeni!**
Parametri ekvivalentnog naponskog generatora su

$$R_u = \frac{1}{G_u}, \quad E = \frac{I_g}{G_u}$$



STRUJNI GENERTOR JE ODREĐEN SA (I_g, G_u)

USLOV PRENOSA MAKSIMALNE SNAGE

- Kada se realni generator (E, R_u) poveže na potrošač u vidu otpornika otpornosti R_p , kolika je optimalna vrednost otpornosti tako da se potrošaču prenese maksimalna snaga?

$$\begin{aligned}U_{PN} &= R_p I \\U_{PN} &= E - U_{R_u} = E - R_u I \\R_p I &= E - R_u I \\I &= \frac{E}{R_p + R_u}\end{aligned}$$

- Snaga opornika tj. potrošača je

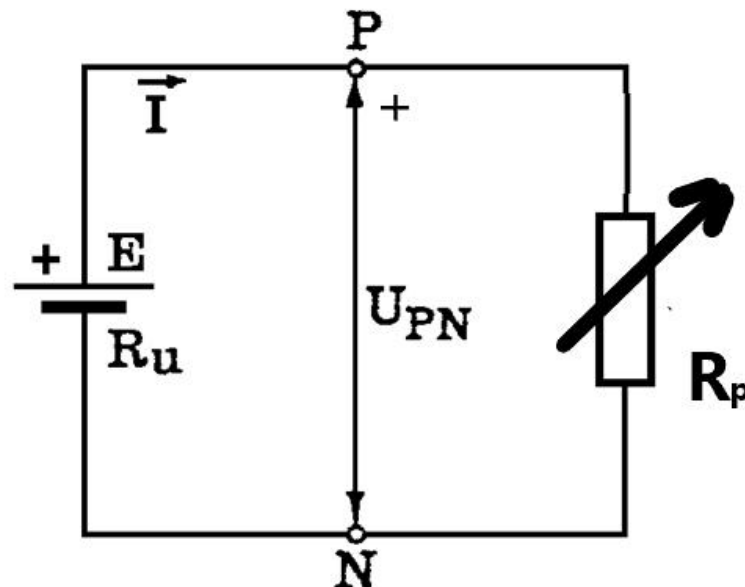
$$P = R_p I^2 = \frac{R_p E^2}{(R_p + R_u)^2}$$

- Maksimum se dobija za

$$\frac{\partial P}{\partial R_p} = 0$$

- Uslov prenosa maksimalne snage je odatle

$$\mathbf{R_p = R_u}$$



PRIMENA I I II KZ SA OZ

- I KZ za čvor O:

1. Struje koje izlaze sa (+) a koje ulaze sa (-):

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

2. Suma struja koje ulaze = sumi struja koje izlaze

$$I_1 + I_2 + I_4 + I_5 = I_3$$

- II KZ za kont. A-B-C:

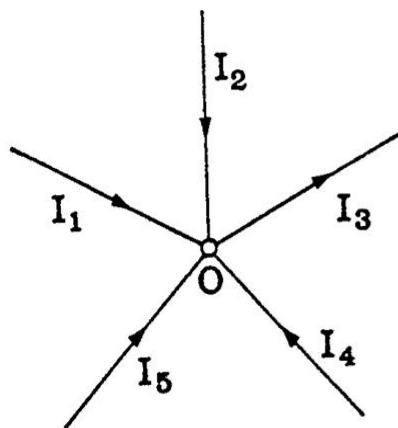
1. (+) ako napon opada tj. niz struju:

$$-E_1 + R_1 I_1 + E_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

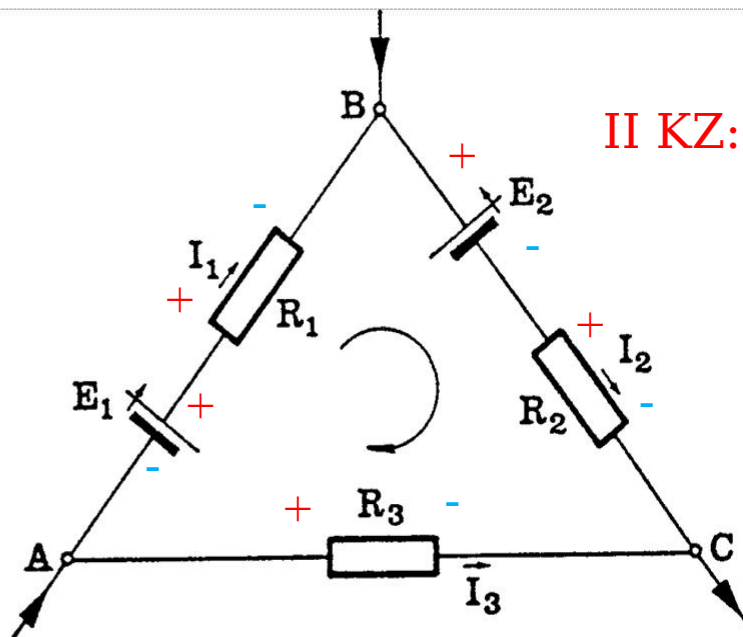
2. (+) ako napon raste tj. uz struju:

$$+E_1 - R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0$$

I KZ: $\sum I = 0$
Čvor O



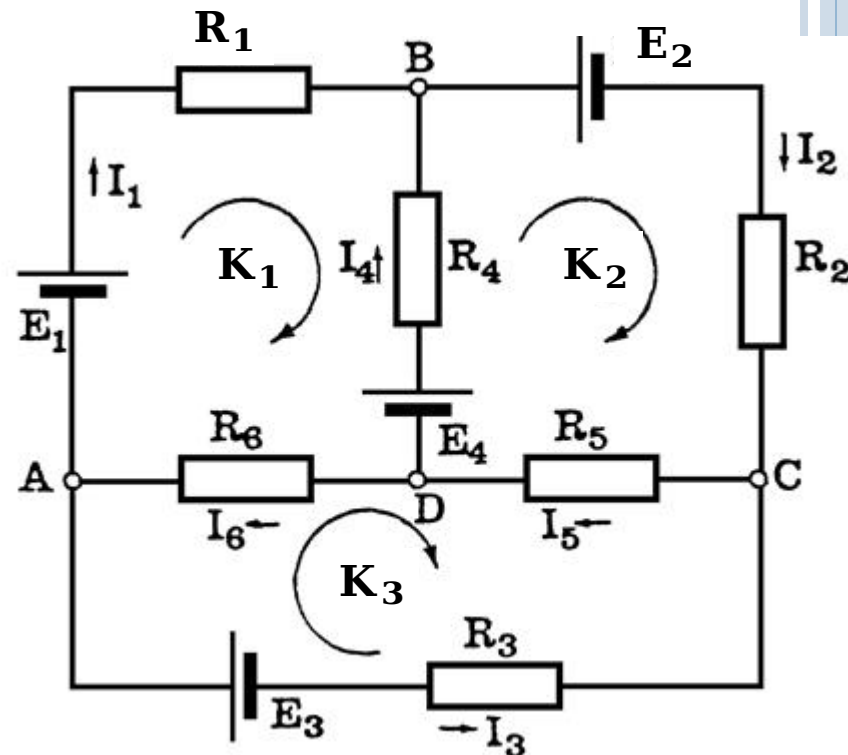
II KZ: $\sum U = 0$
Kontura



REŠAVANJE KOLA PONOČU KZ

18

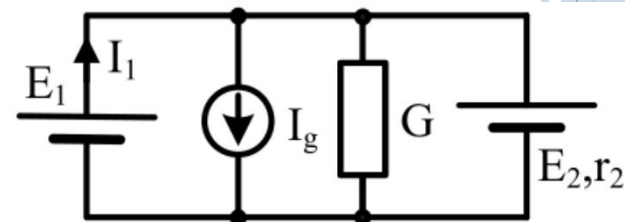
- Rešiti kolo $\Leftrightarrow$ Odrediti struje u svim granama kola.
- **Struje se mogu orijentisati proizvoljno:**
ako se dobije da je **struja negativna** to samo znači da je realni smer struje zapravo suprotan od pretpostavljenog referentnog smera.
- Broj čvorova: A, B, C, D $\rightarrow n_{\check{c}} = 4$.
Jedan čvor je suvišan - referentni čvor.
- **Broj jednačina po I KZ je**
$$n_{\check{c}} - 1 = 4 - 1 = 3$$
- Broj grana i nepoznatih struja: A-B, A-C, A-D, B-D, B-C, C-D $\rightarrow n_g = 6$.
- **Broj jednačina po II KZ je**
$$n_g - (n_{\check{c}} - 1) = 6 - 3 = 3$$



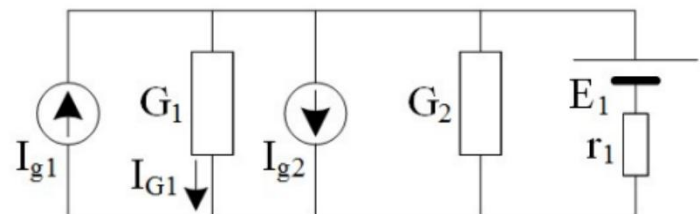
- Šta ako postoji idealni strujni generator???
- **Broj jednačina po II KZ je tada**
$$n_g - (n_{\check{c}} - 1) - n_{I_g}$$

- ... videti primere sa teorijskih ispita ...

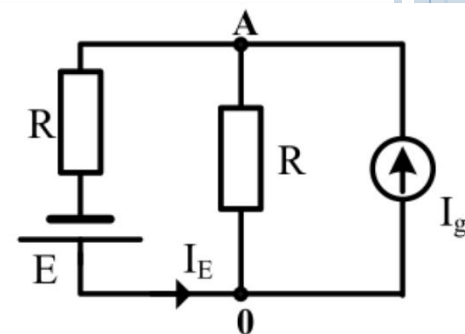
4. (7 poena) U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E_1 , I_g , G , E_2 i r_2 . Odrediti struju I_1 kroz generator E_1 .



4. (7 poena) U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E_1 , I_{g1} , I_{g2} , G_1 , G_2 i r_1 . Odrediti struju I_{G1} .



3. U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E , I_g i R . Primenom metode potencijala čvorova, odrediti najpre izraz za potencijal čvora A, a zatim i izraz za struju I_E koja protiče kroz generator E u smeru označenom na slici. (6poena) *Uraditi pomoću KZ !*



4. (7 poena) U električnom kolu poznati su i prikazani na slici parametri svih elemenata. Odrediti napon U_1 i intenzitet struje I_2 .

