UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

ELEKTROTEHNIKA

- ŠKOLSKA 2026/2027 -

2. JEDNOSMERNE STRUJE

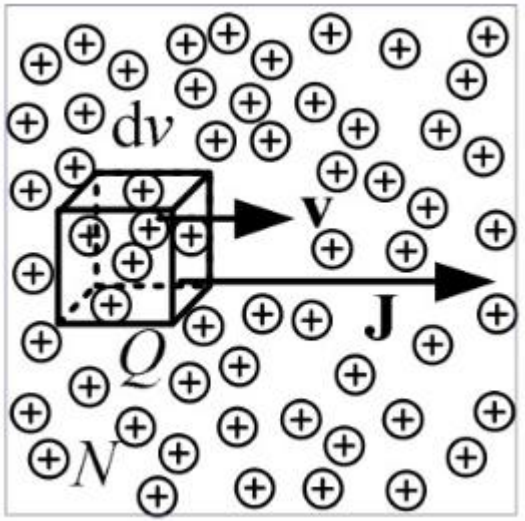
- OZ, KZ, MKS, MPČ, TT, NT, TS -

POVRŠINSKA GUSTINA ELEKTRIČNE STRUJE

- Električna struja u provodnicima nastaje pod dejstvom električnog polja.
- Električno polje deluje na naelektrisane čestice koje se usmenreno kreću u pravcu polja (pozitivne u smeru vektora polja, a negativne u suprotnom smeru) brzinom ***v***.
- Vektr površinske gustine električne struje se definiše

$$\vec{J} = NQ\vec{v} = NQ\mu\vec{K} = \gamma\vec{K}.$$

- ***Q*** je naelektrisanje slobodne čestice, ***N*** njihova koncentracija u prostoru, a $\boldsymbol{\mu}$ pokretljivost.
- Smer vektora ***J*** je tehnički smer struje, **svejedno je da li se pozitivna čestica kreće u pravcu polja ili negativna u suprotnom pravcu**!!!
- Jedinica je $\mathbf{A/m^2}$ (A - Amper).



SPECIFIČNA PROVODNOST I OTPORNOST

- Dakle, važi da je

$$\vec{J} = \gamma \vec{K}, \qquad \vec{K} = \rho \vec{J}, \qquad \rho = 1/\gamma$$

- Specifična provodnost $\boldsymbol{\gamma}$ ima jedinicu $\mathbf{S/m}$ (S - Simens).
- Specifična otpornost $\boldsymbol{\rho}$ ima jedinicu $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{m}$ ($\boldsymbol{\Omega}$ - Om).
- Srebro: γ=63 MS/m, a ρ=16 nΩm.
- Bakar: γ=58 MS/m, a ρ=17 nΩm.

- **Savršeni provodnik**

$$\boldsymbol{\gamma \to \infty,\ \rho = 0}$$

- Dakle, i ako postoji struja, električno polje je ***K*=0**!

- **Savršeni izolator**

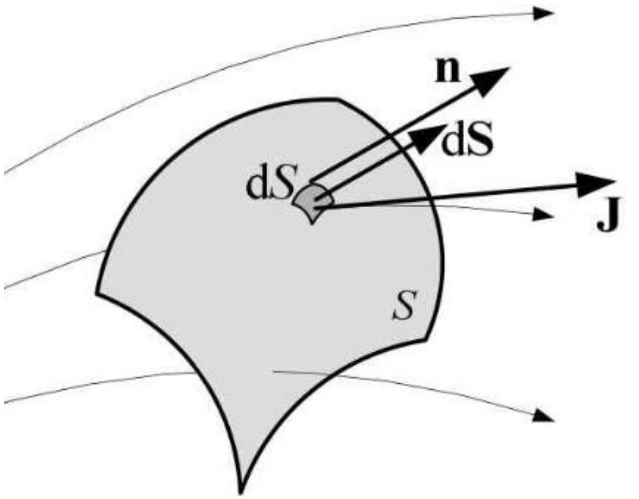
$$\boldsymbol{\gamma = 0,\ \rho \to \infty}$$

- Dakle, i ako postoji električno polje, gustina struje je ***J*=0**!

JAČINA STRUJE

- Kada struja protiče kroz provodne žice, dovoljno je posmatrati brzinu proticanja slobodnih naelektrisanja kroz poprečni presek žičanog provodnika.
- U tu svrhu definiše se **jačina struje** (jedinica A)

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{dS}$$

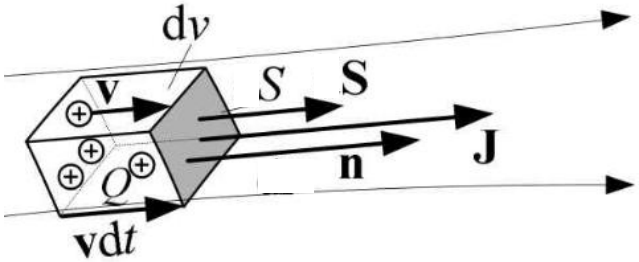


- Ako posmatramo površ S normalnu na vektor gustine struje koju čine nosioci naelektrisanja Q i koncentracije N, a brzina njihovog kretanja je v, tada je

$$I = JS = (NQv)S$$

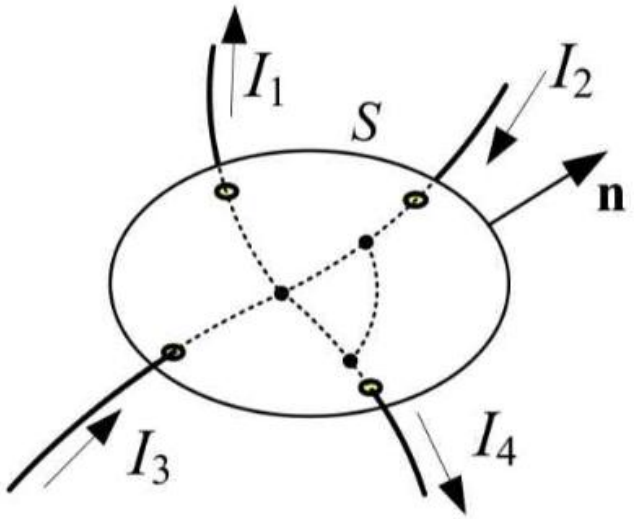
$$I = \frac{QNS(vdt)}{dt} = \frac{QN(Sdl)}{dt}$$

$$I = \frac{QNdV}{dt} = \frac{dq}{dt}$$



- Dakle, jačina struje je jednaka brzini protoka naelektrisanja kroz površ S u jedinici vremena.

PRVI KIRHOFOV ZAKON



- Ukoliko nema nagomilavanja naelektrisanja fluks vektora gustine struje kroz zatvorenu površ S jednak je nuli

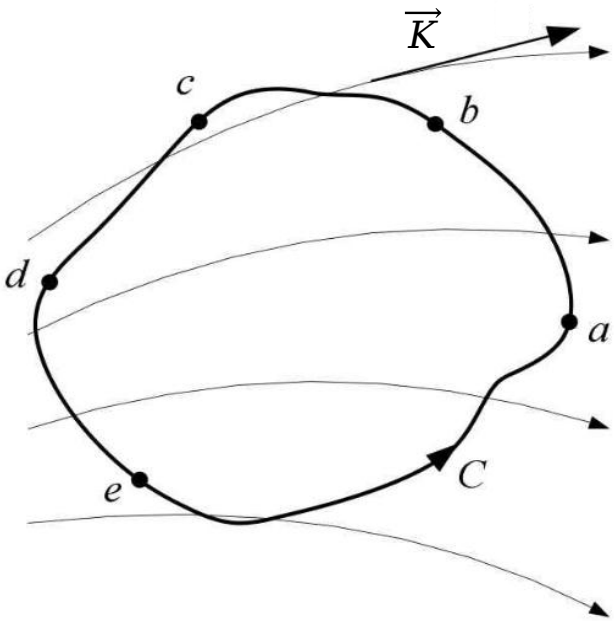
$$\oint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

- Ukoliko zatvorena površ S obuhvata žičane provodnike

$$+I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

- **Ova jednakost se naziva I Kirhofov zakon (I KZ).**

DRUGI KIRHOFOV ZAKON



- Duž zatvorene konture ***C*** cirkulacija vektora ***K*** je jednaka nuli

$$\oint_C \vec{K} \cdot \vec{dl} = 0$$

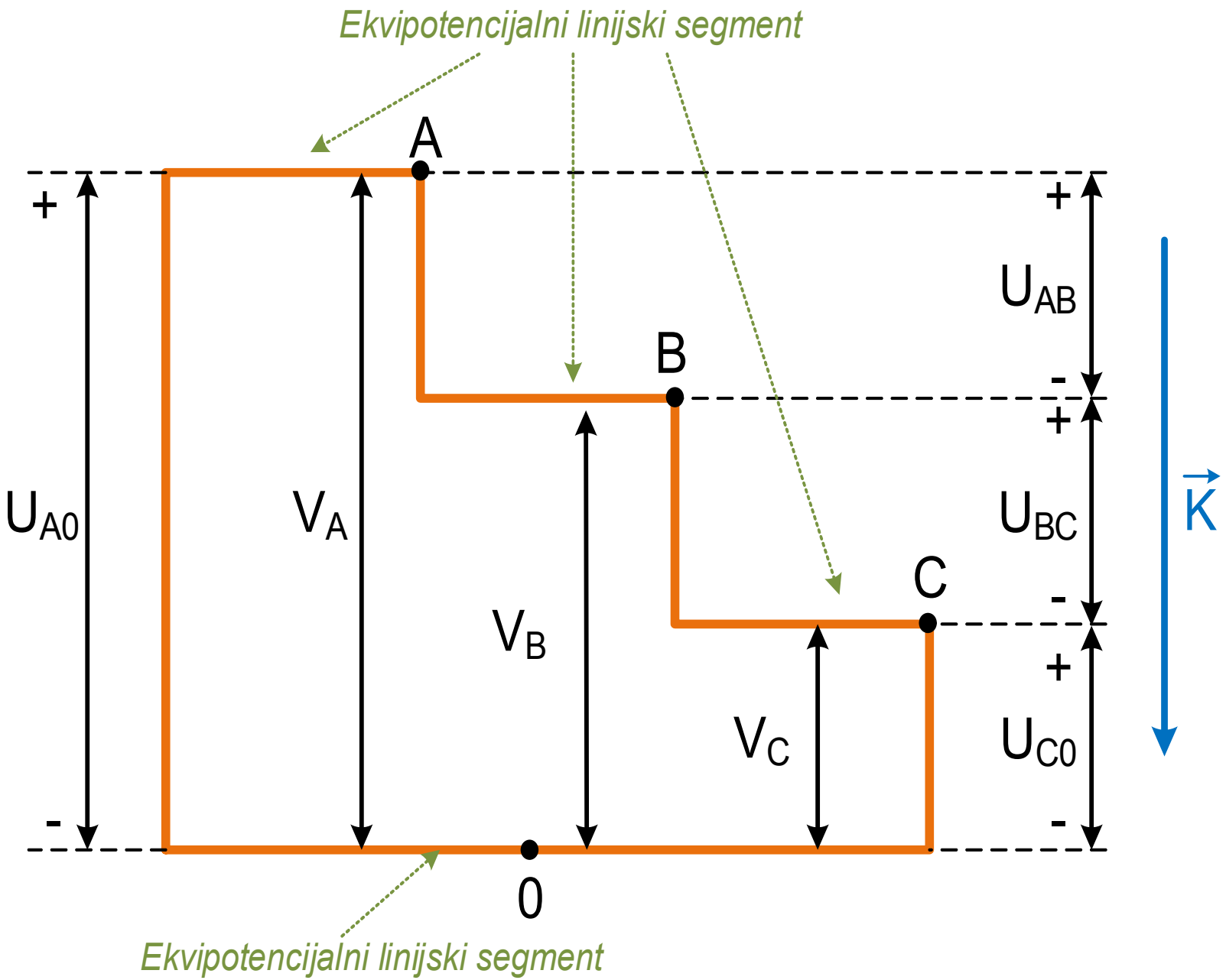
- Ako se ovaj integral razloži na delove putanje *C*, dobija se

$$\oint_C \vec{K} \cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec{K} \cdot \vec{dl} + \int_b^c \vec{K} \cdot \vec{dl} + \int_c^d \vec{K} \cdot \vec{dl} + \int_d^e \vec{K} \cdot \vec{dl} + \int_e^a \vec{K} \cdot \vec{dl} = 0$$

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{de} + U_{ea} = 0$$

- **Ova jednakost se naziva II Kirhofov zakon (II KZ).**

DRUGI KIRHOFOV ZAKON



DRUGI KIRHOFOV ZAKON

- Dva načina pisanja jednačina po II KZ:
  1. Kretanje niz polje (u smeru opadanja napona): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (+) ka (-),
  2. Kretanje uz polje (u smeru porasta napona): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (-) ka (+).
- I način (piše se (+) u smeru opadanja napona), ako se kreće u smeru kazaljki na satu dobija se

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{C0} - U_{A0} = 0$$

- II način (piše se (+) u smeru porasta napona), ako se kreće u smeru kazaljki na satu dobija se

$$-U_{AB} - U_{BC} - U_{C0} + U_{A0} = 0$$

- **Oba načina pisanja daju istu jednačinu: dovoljno je obrnuti smer obilaska konture (suprotan od kretanja kazaljki na satu) ili pomnožiti jednačinu sa (-1).**
- **Odaberite stil pisanja jednačina po vašoj želji!**

Drugi Kirhofov zakon

- Dva načina pisanja jednačina za potencijal:
  - Kretanje u smeru opadanja napona od tačke u kojoj se traži potencijal ka 0 (referentnoj tački): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (+) ka (-),
  - Kretanje u smeru porasta napona od tačke 0 (referentne tačke) ka tački u kojoj se traži potencijal: u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (-) ka (+).

- I način (piše se (+) u smeru opadanja napona): kretanje mora da se vrši od tačke A/B/C prema tački 0 (reefrentna tačka)

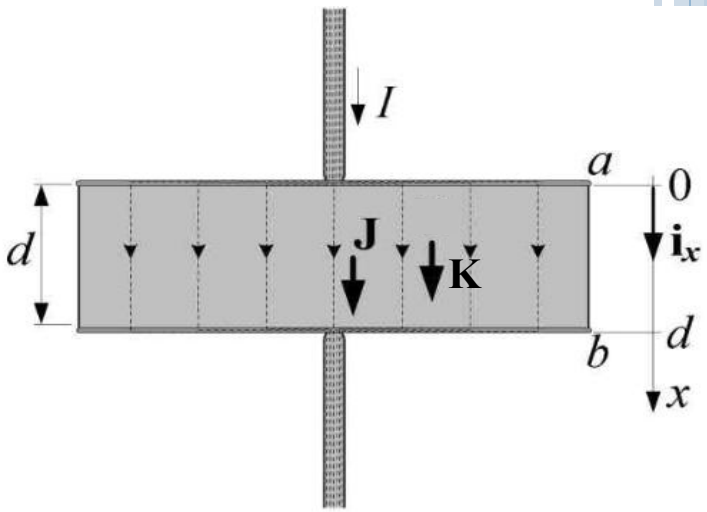
$$V_A = U_{AB} + U_{BC} + U_{C0} = U_{A0}$$
$$V_B = U_{BC} + U_{C0} = -U_{AB} + U_{A0}$$
$$V_C = U_{C0} = -U_{BC} - U_{AB} + U_{A0}$$

- II način (piše se (+) u smeru porasta napona): kretanje mora da se vrši od tačke 0 (referentna tačka) prema tački A/B/C. Jednačine su iste i moraju biti iste!!!

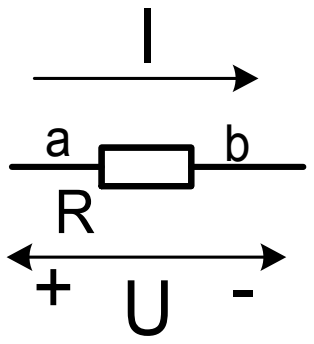
OTPORNIK U KOLU JEDNOSMERNE STRUJE

- Napon na krajevima otpornika je

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{K} \cdot \vec{dl} = \int_a^b \rho \vec{J} \cdot \vec{dl}$$
$$U_{ab} = \rho J d = \frac{\rho d}{S} I = RI$$

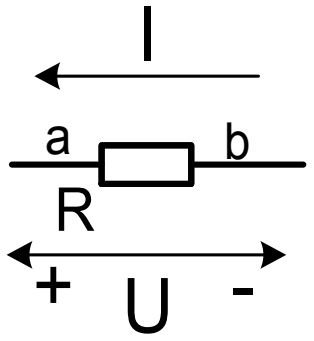


- Gde je $R = \rho \frac{d}{S}$ parametar koji nazivamo otpornost, a jedinica otpornosti je om (Ω).
- Recipročna vrednost otpornosti naziva se provodnost $G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{S}{d}$ a jedinica je simens (S).
- Jednakost $\boldsymbol{U_{ab} = RI}$ naziva se **Omov zakon**.
- Treba voditi računa da je smer struje od priključka a ka b - usaglašeni referentni smer!



usaglašeni referentni smer

$\boldsymbol{U_{ab} = RI}$



neusaglašeni referentni smer

$\boldsymbol{U_{ab} = -RI}$

OTPORNIK U KOLU JEDNOSMERNE STRUJE

- Kada se se naelektrisanja kreću kroz otpornik, zbog sudara sa jonima, dolazi do zagrevanja materijala - električni rad se pretvara u toplotu.
- Ovakva pojava da se rad električnih sila pretvara u otporniku u toplotu se naziva **Džulovim gubicima**.
- Može se izvesti da je snaga Džulovih gubitaka $P = U\,I$, a imajući u vidu Omov zakon dobija se da je

$$P = U\,I = R\,I^2 = \frac{I^2}{G} = \frac{U^2}{R} = G\,U^2$$

- Snaga predstavlja brzinu vršenja rada tj. brzinu sa kojom se vrši konverzija električne energije u toplotnu

$$P = \frac{d\,A}{d\,t}$$

- Jedinica za energiju i rad je J (Džul), a za snagu W (Vat).

GENERATOR I OTPORNIK U STRUJNOM KOLU

- Napon generatora U_g je jednak elektromotornoj sili E.
- Po II KZ, napon otpornika je takođe jednak elektromotornoj sili

$$U_R = U_g = E$$

- Prema Omovom zakonu struja u kolu je

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{E}{R}$$

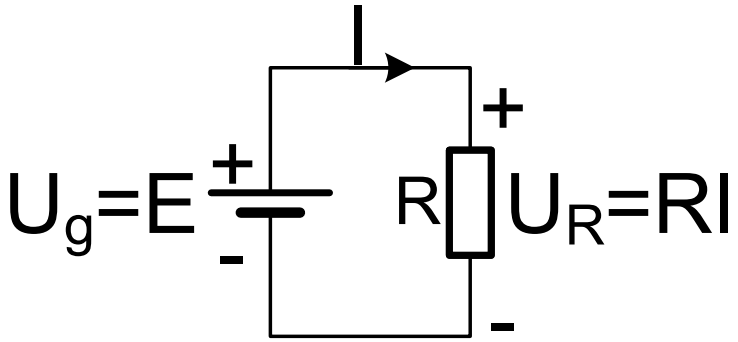
- Snaga Džulovih gubitaka u otporniku

$$P_R = RI^2 = U_R I = EI = \frac{E^2}{R}$$

- Snaga koja se troši u otporniku snabdeva se iz generatora

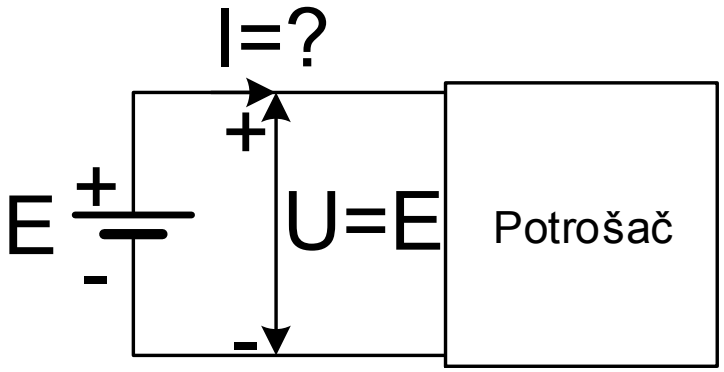
$$P_g = EI = P_R$$

- **Usaglašeni referentni smerovi generatora su suprotni nego za otpornik (struja je usmerena od (-) kraja ka (+) kraju generatora)!**

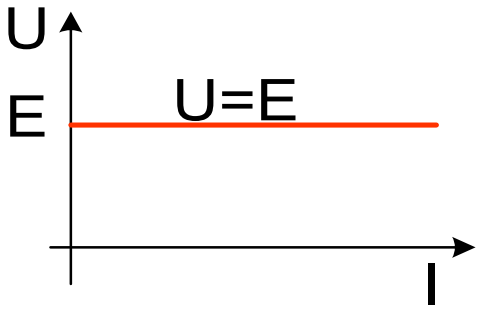


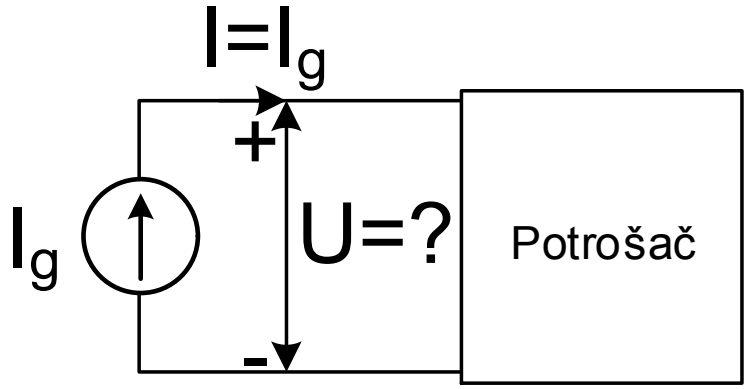
GENERATOR I OTPORNIK U STRUJNOM KOLU

- Naponski generator: $U_g = E$
- Strujni generator: $I_g = I$
- Prethodno definisani generatori nazivaju se **idealnim naponskim i strujnim generatorima**.

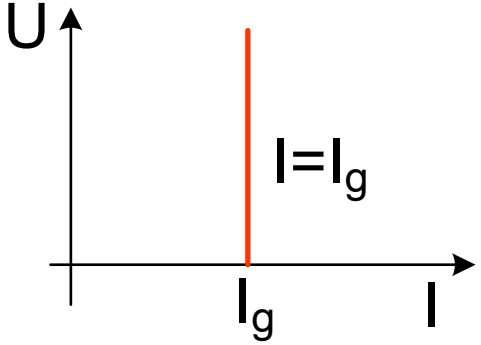


U-I karakteristika idealnog naponskog generatora





U-I karakteristika idealnog strujnog generatora



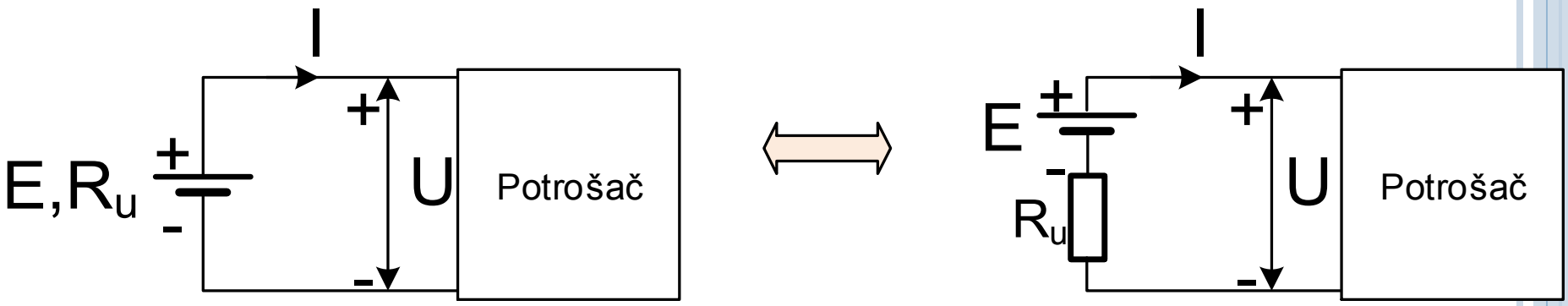
REALNI NAPONSKI GENERATOR

- Realni naponski generatori imaju Džulove gubitke koji se modeluju redno vezanim "unutrašnjim" otpornikom čija je otpornot R_u.
- Napon realnog naponskog generatora opada sa porastom struje kroz potrošač

$$U = E - R_u I$$

- Realni naponski generator se može u kolima transformisati u realni strujni, vodeći računa da referentni smerovi ostanu neizmenjeni! Patametri ekvivalentnog strujnog generatora su

$$G_u = \frac{1}{R_u}, \qquad I_g = \frac{E}{R_u}$$



NAPONSKI GENERATOR JE ODREĐEN SA (E, R_u)

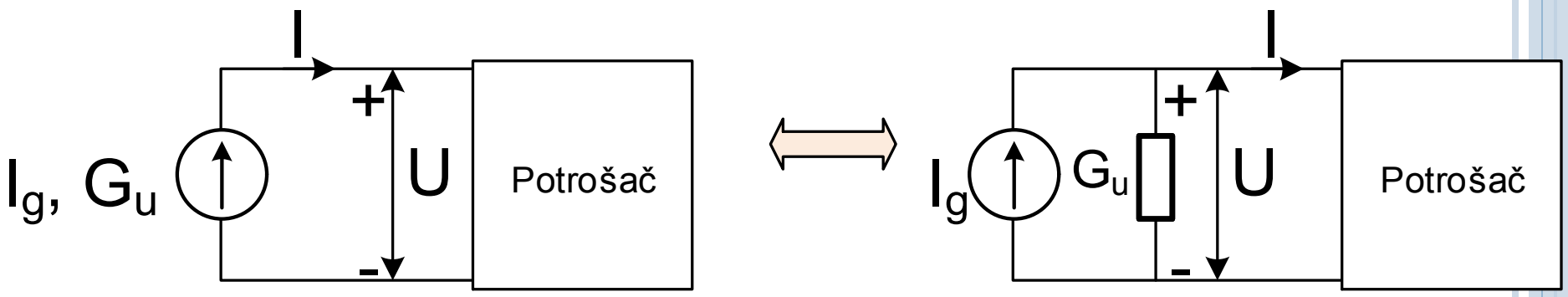
REALNI STRUJNI GENERATOR

- Realni strujni generatori imaju Džulove gubitke koji se modeluju paralelno vezanim "unutrašnjim" otpornikom čija je provodnot G_u.
- Struja realnog strujnog generatora opada sa porastom napona potrošača

$$I = I_g - G_u U$$

- Realni strujni generator se može u kolima transformisati u realni naponski vodeći računa da referentni smerovi ostanu neizmenjeni! Patametri ekvivalentnog naponskog generatora su

$$R_u = \frac{1}{G_u}, \qquad E = \frac{I_g}{G_u}$$

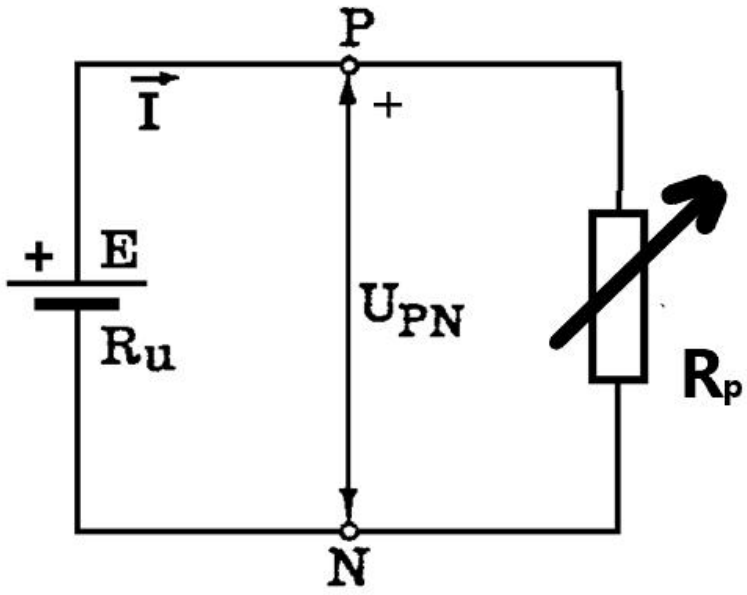


STRUJNI GENERTOR JE ODREĐEN SA (I_g, G_u)

USLOV PRENOSA MAKSIMALNE SNAGE

- Kada se realni generator (E, R_u) poveže na potrošač u vidu otpornika otpornosti R_p, kolika je optimalna vrednost otpornosti tako da se potošaču prenese maksimalna snaga?

$$U_{PN} = R_p I$$
$$U_{PN} = E - U_{R_u} = E - R_u I$$
$$R_p I = E - R_u I$$
$$I = \frac{E}{R_p + R_u}$$



- Snaga opornika tj. potrošača je

$$P = R_p I^2 = \frac{R_p E^2}{(R_p + R_u)^2}$$

- Maksimum se dobija za

$$\frac{\partial P}{\partial R_p} = 0$$

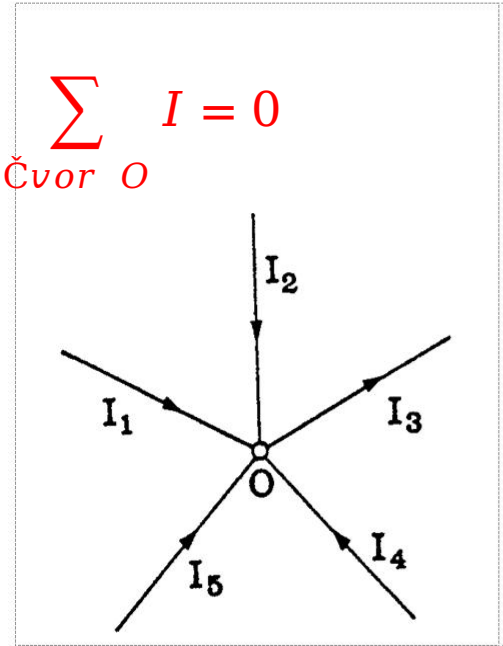
- Uslov prenosa maksimalne snage je odatle

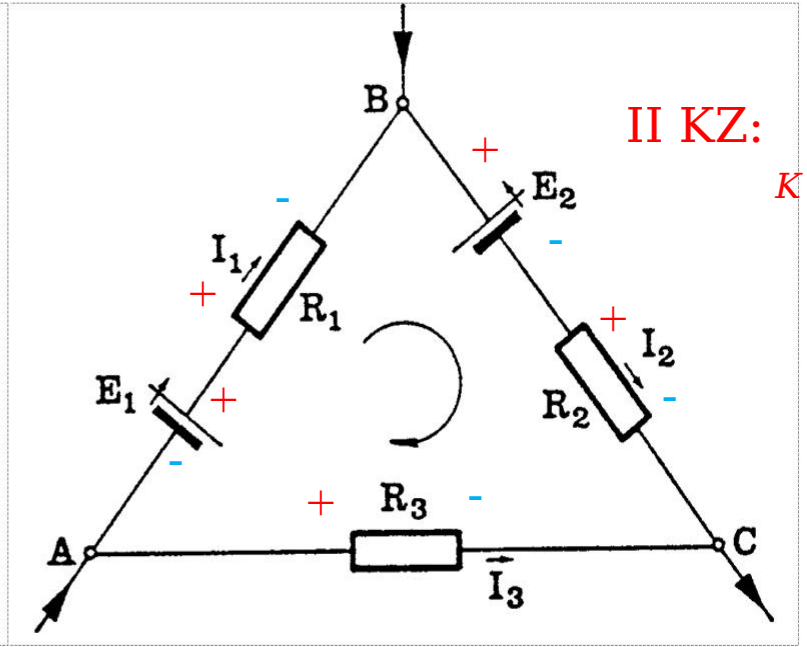
$$\boldsymbol{R_p = R_u}$$

PRIMENA I I II KZ SA OZ

- **I KZ za čvor O:**
  1. Struje koje izlaze sa (+) a koje ulaze sa (-):
  $$-I_1-I_2+I_3-I_4-I_5=0$$
  2. Suma struja koje ulaze = sumi struja koje izlaze
  $$I_1+I_2+I_4+I_5=I_3$$
- **II KZ za kont. A-B-C:**
  1. (+) ako napon opada tj. niz struju:
  $$-E_1+R_1I_1+E_2+R_2I_2-R_3I_3=0$$
  2. (+) ako napon raste tj. uz struju:
  $$+E_1-R_1I_1-E_2-R_2I_2+R_3I_3=0$$

I KZ: $\sum_{\text{Čvor } O} I = 0$

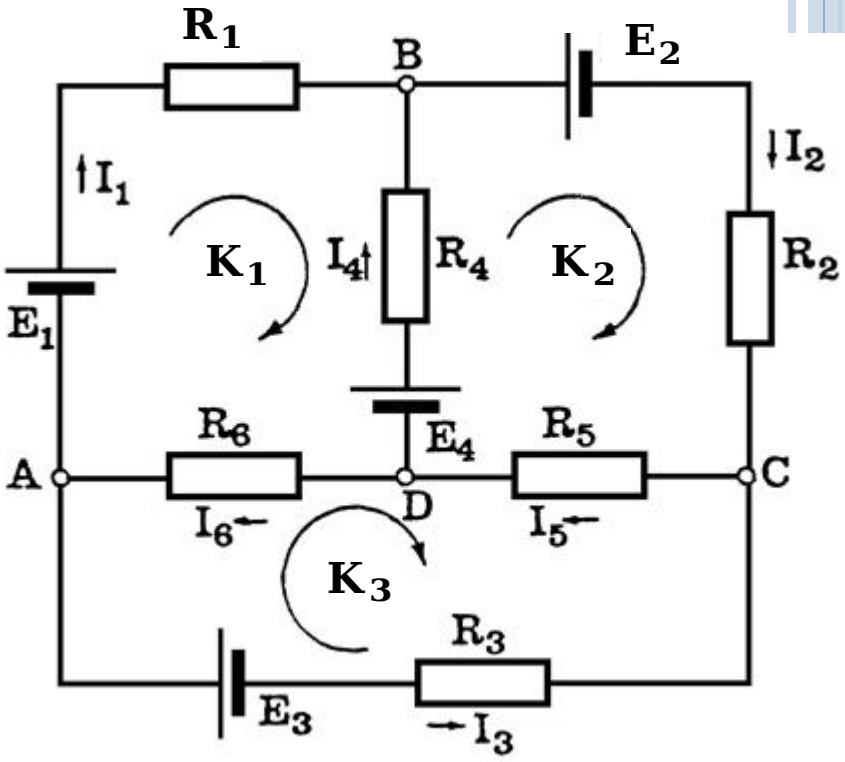




II KZ: $\sum_{Kontura} U = 0$

REŠAVANJE KOLA PONOĆU KZ

- Rešiti kolo <=> Odrediti struje u svim granama kola.
- **Struje se mogu orjentisati proizvoljno**:
  ako se dobije da je struja negativna to samo znači da je realnismer struje zapravo suprotan od pretpostavljenog referentnog smera.



- Broj čvorova: A, B, C, D -> $n_č = 4$.
  Jedan čvor je suvišan - referentni čvor.
- **Broj jednačina po I KZ je**
  $$n_č - 1 = 4 - 1 = 3$$
- Broj grana i nepoznatih struja: A-B, A-C, A-D, B-D, B-C, C-D -> $n_g = 6$.
- **Broj jednačina po II KZ je**
  $$n_g - (n_č - 1) = 6 - 3 = 3$$

- Šta ako postoji idealni strujni generator???
- **Broj jednačina po II KZ je tada**
  $$n_g - (n_č - 1) - n_{I_g}$$

REDNA I PARALELNA VEZA OTPORNIKA

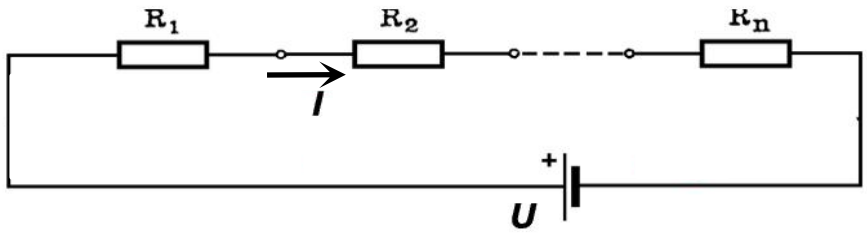
- **Redna veza**

$$U = I(R_1 + R_2 \cdots + R_n)$$

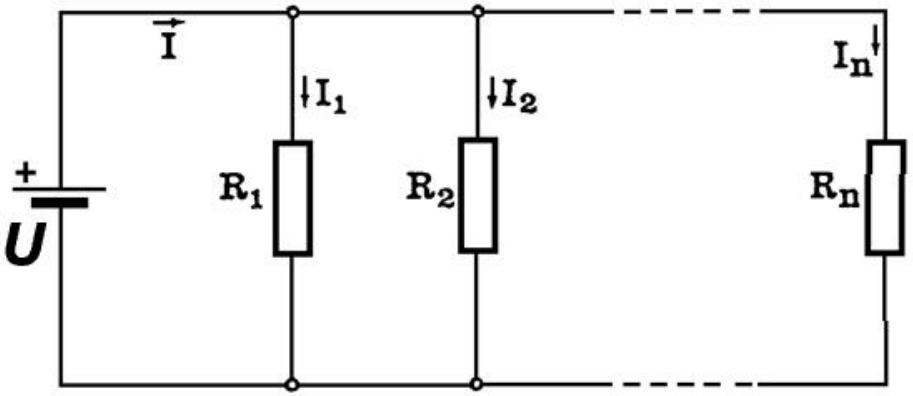
$$R_e = \frac{U}{I}$$

$$R_e = R_1 + R_2 \cdots + R_n = \sum_{i-1}^{n} R_i$$

$$\frac{1}{G_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{G_i}$$



- **Paralelna veza**



$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \cdots + \frac{U}{R_n}$$

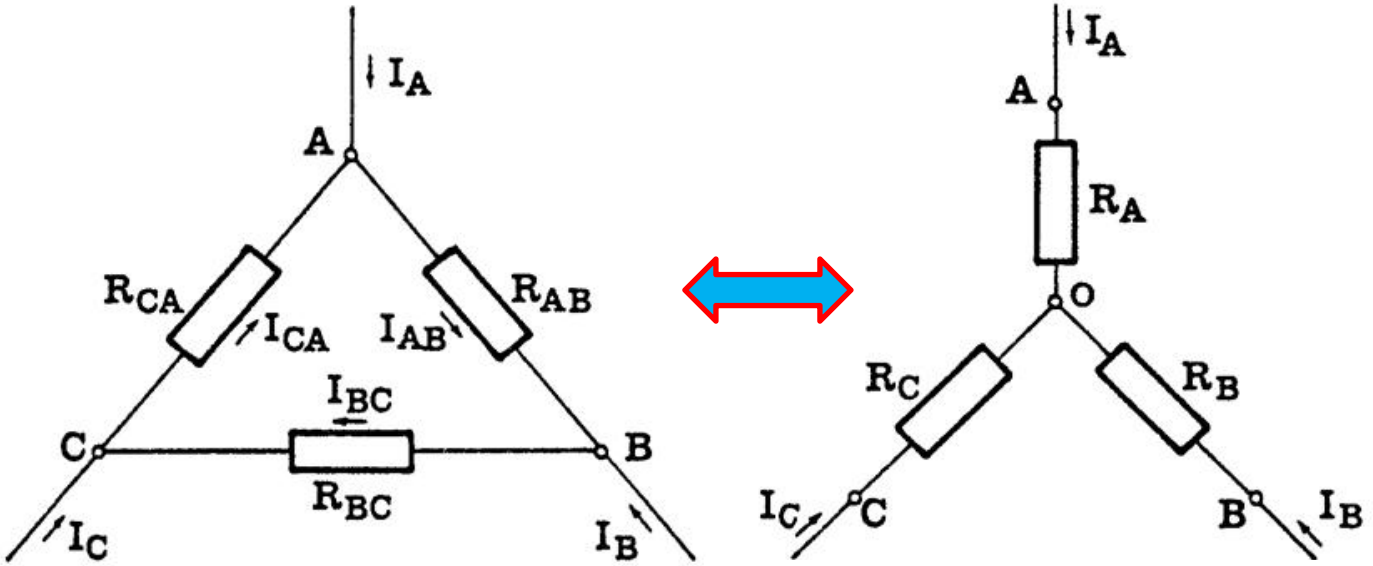
$$\frac{1}{R_e} = \frac{I}{U}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$G_e = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

VEZE OTPORNIKA U TROUGAO U ZVEZDU

- Ako ne postoje ni redne ni paralelne veze, onda treba potražiti zvezdu ili trougao...



$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B}$$

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

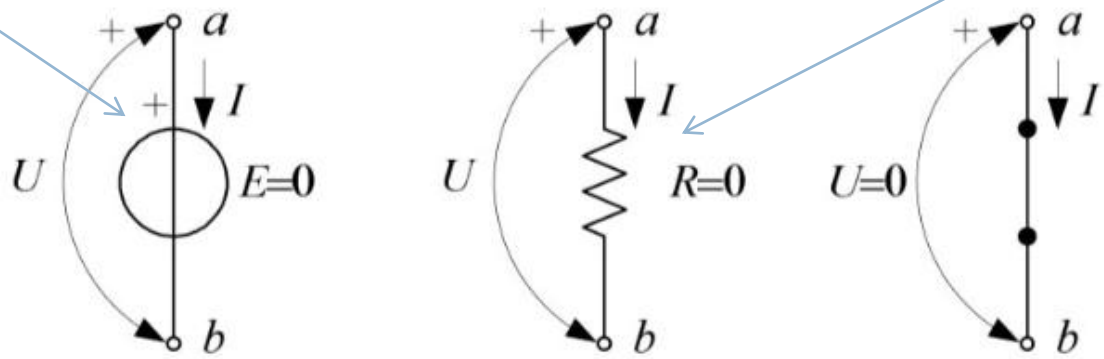
$$R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

KRATAK SPOJ I OTVORENA VEZA

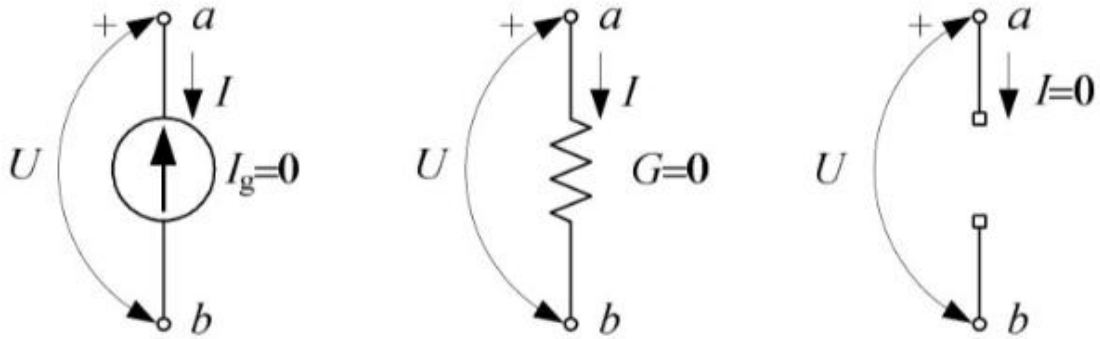
- Kratk spoj je ekvivalentan idealnom provodnom elementu tj. otporniku $R = 0,\ G \to \infty$ ili idealnom naponskom generatoru elektromotorne sile $E = 0$.

Oznaka za idealni naponski generator u knjizi sa ETF-a

Oznaka za otpornik u knjizi sa ETF-a



- Otvorena veza je ekvivalentna idealnom izolujućem elementu tj. otporniku $G = 0,\ R \to \infty$ ili idealnom strujnom generatoru struje $I_g = 0$.



METODA KONTURNIH STRUJA

- Broj jednačina u sistemu n_g se može redukovati tako što se izbegne pisanje jednačina po I KZ čime se dobija **metoda konturnih struja (MKS)**.
- Pisanje jednačina po I KZ se može izbeći ako su te jednačine "automatski zadovoljene" što se postiže uvođenjem koncepta zamišljenih konturnih struja koje "teku" po konturama po kojima se pišu jednačine za II KZ.
- Pošto kroz svaki čvor kroz koji prolazi, konturna struja i ulazi i izlazi iz čvora I KZ je automatski zadovoljen i ove jednačine se ne pišu.
- Dakle, potrebno je napisati samo jednačine po II KZ po odabranim konturama koristeći konturne struje a to je sistem sa $n_g - (n_{\check{c}} - 1)$ jednačina.

METODA KONTURNIH STRUJA

- Jednačine po MKS za kolo **bez idealnih strujnih generatora** se u opštem obliku mogu zapisati kao

$$R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} + \ldots + R_{1n_k}I_{kn_k} = E_{k1}$$
$$R_{21}I_{k1} + R_{22}I_{k2} + \ldots + R_{2n_k}I_{kn_k} = E_{k2}$$
$$\vdots$$
$$R_{n_k1}I_{k1} + R_{n_k2}I_{k2} + \ldots + R_{n_kn_k}I_{kn_k} = E_{kn_k}$$

- Gde je $\boldsymbol{n_k}$ broj kontura $n_k = n_g - (n_č - 1)$.

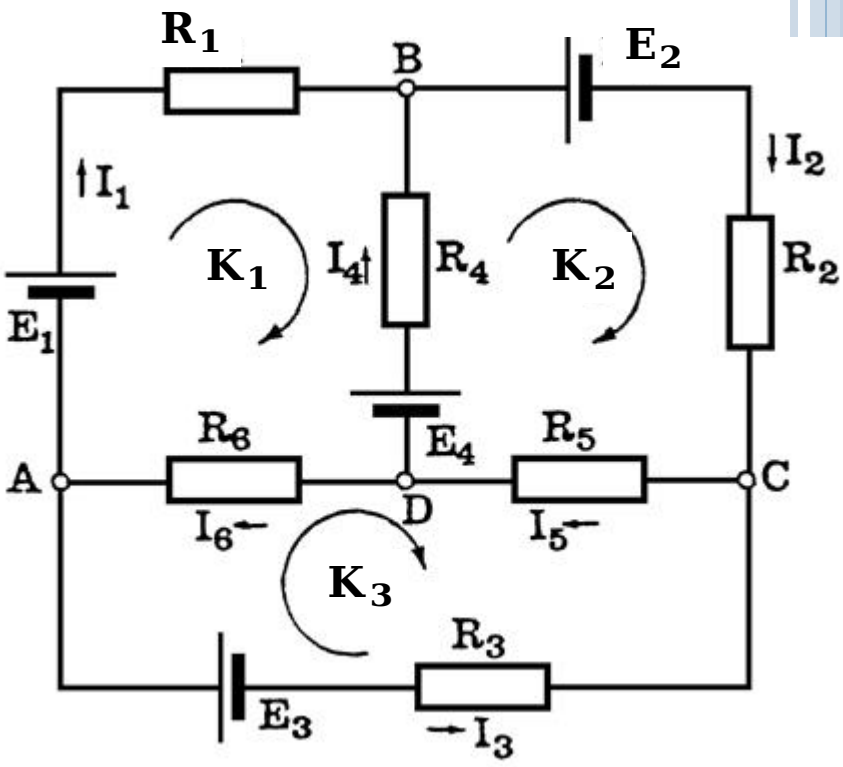
METODA KONTURNIH STRUJA

- R_{ii}, $i=1,2,\ldots,n_k$ su sopsvene otpornosti konture i jednake su zbiru svih otpornosti u i-toj konturi (uzete uvek sa predznakom (+)).
- R_{ij}, $i,j=1,2,\ldots,n_k$, $i\neq j$ su međusobne otpornosti konture i i konture j i jednake su algebarskom zbiru svih otpornosti koje zu zajedničke za obe konture. Otpornosti se uzimaju sa predznakom (+) ako se smerovi obilaska kontura u tim zajedničkim granama poklapaju. Ako se smerovi obilaska kontura i i j ne poklapaju, uzima se predznak (-). Očigledno je $R_{ji}=R_{ij}$.
- E_{ki}, $i=1,2,\ldots,n_k$ je algebarski zbir elektromotornih sila idealnih naponskih generatora u konturi i. Ako se pri obilasku u smeru konture smer poklapa sa smerom dejstva elektromotorne sile (u smeru porasta napona tj. od (-) ka (+) kraju generatora) uzima se predznak (+), a predznak (-) ako se smer obilaska konture i dejstvo elektromotorne sile ne poklapaju (u smeru opadanja napona tj. od (+) ka (-) kraju generatora)).

METODA KONTURNIH STRUJA - PRIMER

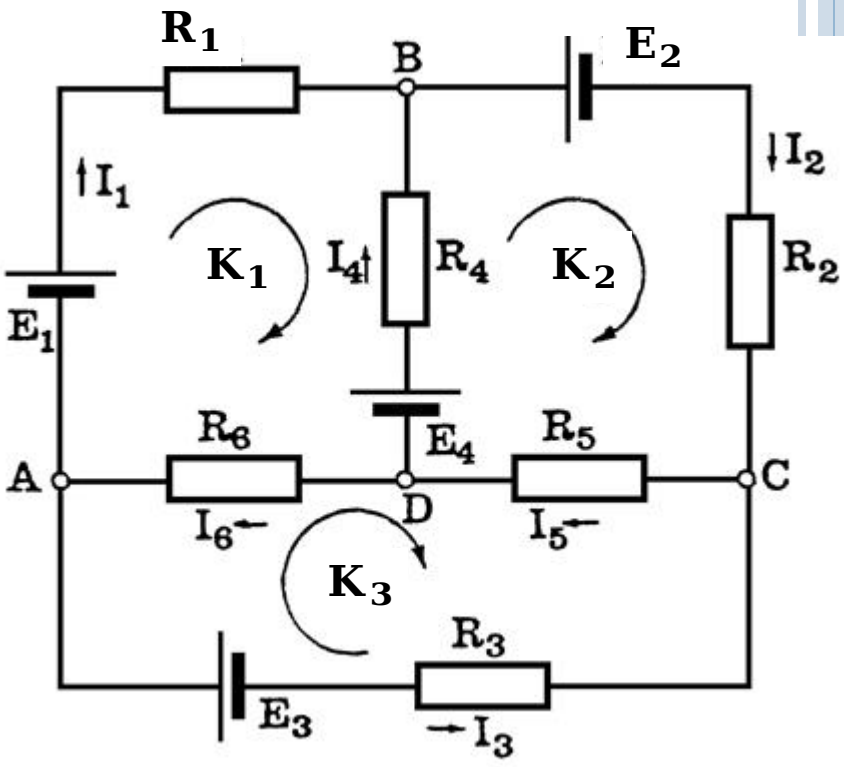
- Za datu sliku postoje 3 konture i 3 konturne struje I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}. Smerovi ovih struja su isti kao i smerovi obilaska kontura.
- Realne struje u granama se dobijaju kao zbir konturnih struja pri čmu se struja uzima sa znakom (+) ako se poklapa sa smerom konturne struje, a sa znakom (-) ako je smer suprotan:

$I_1 = I_{k1},$
$I_2 = I_{k2},$
$I_3 = -I_{k3},$
$I_4 = -I_{k1} + I_{k2},$
$I_5 = I_{k2} - I_{k3},$
$I_6 = I_{k1} - I_{k3}.$



METODA KONTURNIH STRUJA - PRIMER

- Za kolo je potrebno napisati $n_k = n_g - (n_č - 1) = 3$ jed.
- $R_{11} I_{k1} + R_{12} I_{k2} + R_{13} I_{k3} = E_{k1}$
- $R_{21} I_{k1} + R_{22} I_{k2} + R_{23} I_{k3} = E_{k2}$
- $R_{31} I_{k1} + R_{32} I_{k2} + R_{33} I_{k3} = E_{k3}$
- Sopstvene otpornosti su
  $R_{11} = R_1 + R_4 + R_6,$
  $R_{22} = R_2 + R_4 + R_5,$
  $R_{33} = R_3 + R_5 + R_6.$
- Međusobne otpornosti su
  $R_{12} = R_{21} = -R_4,$
  $R_{13} = R_{31} = -R_6,$
  $R_{23} = R_{32} = -R_5.$
- Ems po konturama su
  $E_{k1} = E_1 - E_4$
  $E_{k2} = E_4 - E_2$
  $E_{k1} = E_3.$



METODA KONTURNIH STRUJA - IG ???

- **Za kolo sa n_{Ig} idealnih strujnih generatora** treba napisati $n_k - n_{I_g} = n_g - (n_č - 1) - n_{I_g}$ jednačina.
- Preostalih n_{Ig} jednačina su trivijalne jednačine oblika
$$I_{ki} = I_{gi}\ , \quad i = 1,2,\ldots,n_{I_g}$$
- **Neophodno je provući jednu i samo jednu konturu kroz jedan idealni strujni generator**!!!
- Prvo odabrati n_{Ig} kontura od kojih svaka prolazi samo kroz jedan strujni generator i za njih napisati jednačine oblika $I_{ki} = I_{gi}$.
- A zatim napisati preostalih n_k - n_{Ig} jednačina po MKS **birajući konture koje nikako ne smeju da prođu ni kroz jedan strujni generator**!
- Dimenzija sistema jednačina po MKS je i dalje $n_k = n_g - (n_č - 1)$ i postoji isto toliko konturnih struja, samo se ne pišu sve jednačine sistema već se umesto njih pišu jednačine oblika $I_{ki} = I_{gi}$.

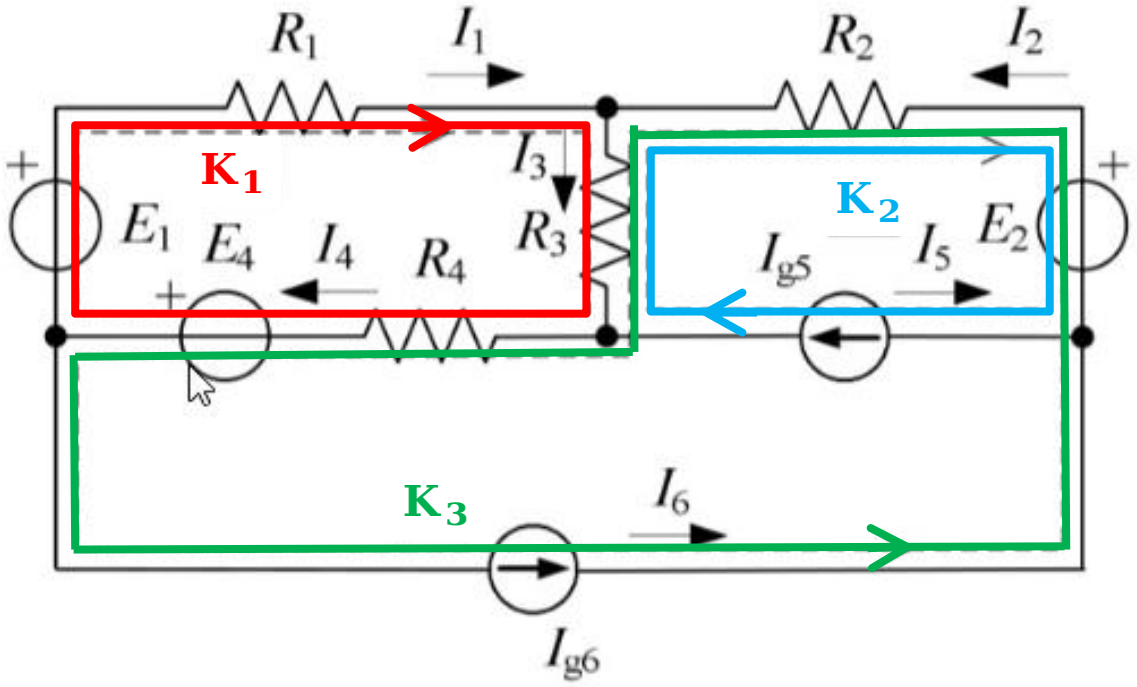
METODA KONTURNIH STRUJA - PRIMER SA IG

- Potpuni sistem jednačina po MKS je

$$(1)\ (R_1 + R_3 + R_4)I_{k1} - R_3 I_{k2} + (R_3 + R_4)I_{k3} = E_1 + E_4,$$
$$(2)\ I_{k2} = I_{g5},$$
$$(3)\ I_{k3} = I_{g6}.$$

- Sistem se rešava po jedinoj nepoznatoj struji I_{k1}.
- Dalje su struje u granama

$$I_1 = I_{k1},$$
$$I_2 = I_{g6} - I_{g5},$$
$$I_3 = I_{k1} - I_{g5} + I_{g6},$$
$$I_4 = I_{k1} + I_{g6},$$
$$I_5 = -I_{g5},$$
$$I_6 = I_{g6}.$$

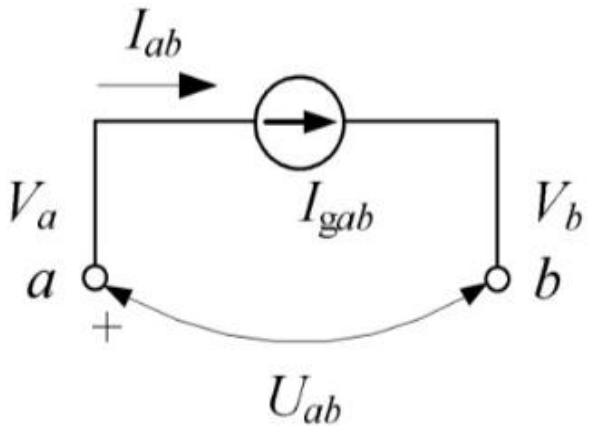


METODA POTENCIJALA ČVOROVA

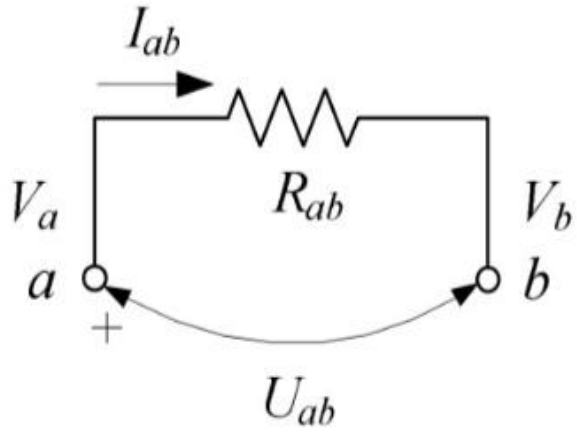
- Broj jednačina u sistemu n_g se može redukovati i tako što se izbegne pisanje jednačina po II KZ čime se dobija **metoda napona između čvorova (MNČ)** ili **metoda potencijala čvorova (MPČ)**.
- Pisanje jednačina po II KZ se može izbeći ako su te jednačine "automatski zadovoljene" što se postiže pisanjem sistema jednačina po potencijalima čvorova kola.
- U kolu postoji $n_č - 1$ nezavisnih potencijala čvorova, te se može napisati isto toliko jednačina po I KZ.
- Ako se na neki način sve struje u jednačinama po I KZ izraze preko potencijala čvorova, dobio bi se potpuni sistem jednačina dimenzije $n_č - 1$.
- Kako sve struje izraziti preko potencijala čvorova???

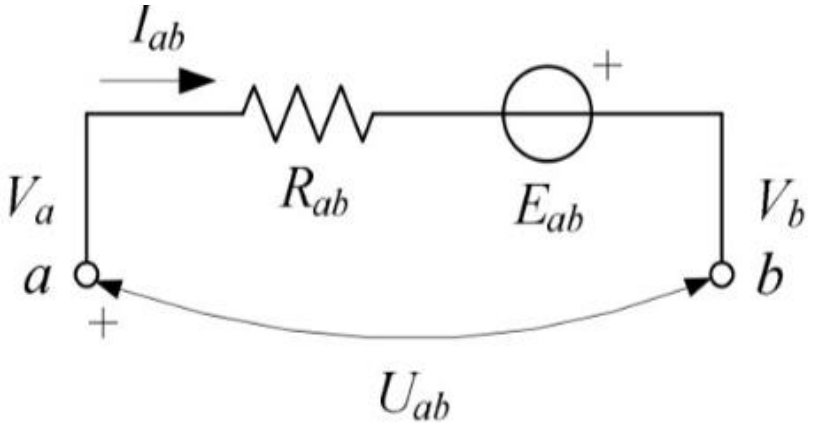
METODA POTENCIJALA ČVOROVA

- Kako sve struje izraziti preko potencijala čvorova???



$$I_{ab} = I_{gab}$$





$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{R_{ab}} = \frac{V_a - V_b}{R_{ab}}$$

$$I_{ab} = \frac{U_{ab} + E_{ab}}{R_{ab}} = \frac{V_a - V_b + E_{ab}}{R_{ab}}$$

METODA POTENCIJALA ČVOROVA

- Jednačine po MPČ za kolo **bez idealnih naponskih generatora** se u opštem obliku mogu zapisati kao

$$G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \ldots + G_{1(n_č-1)}V_{(n_č-1)} = I_{č1}$$

$$G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \ldots + G_{2(n_č-1)}V_{(n_č-1)} = I_{č2}$$

$$\vdots$$

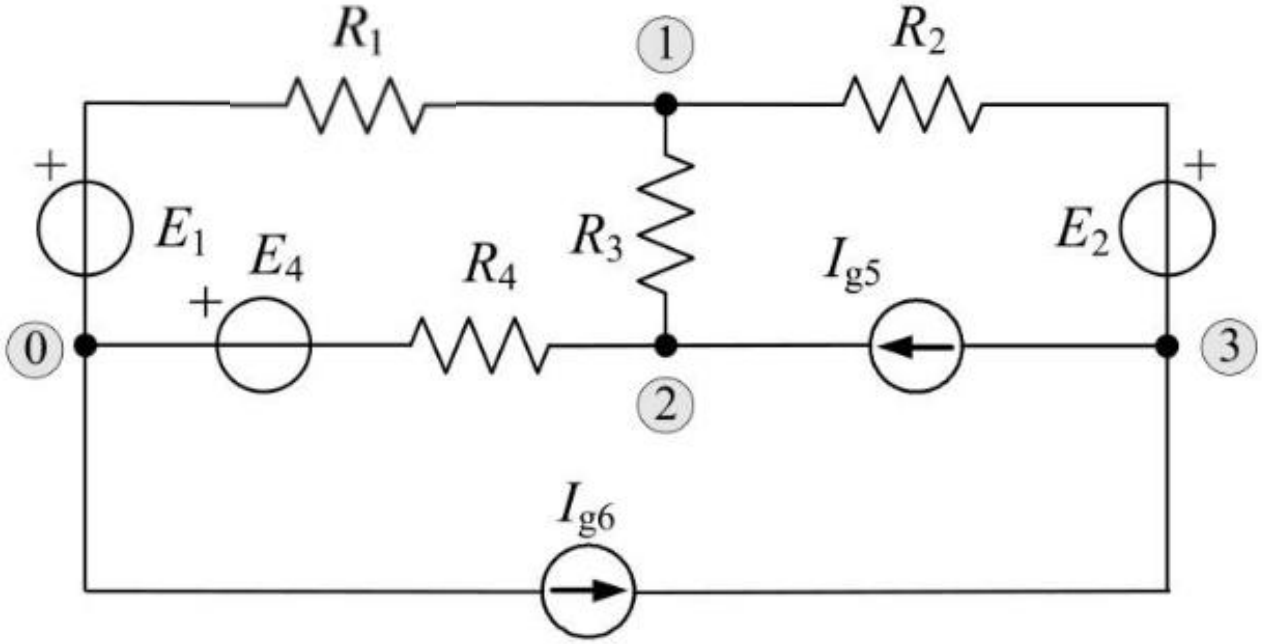
$$G_{(n_č-1)1}V_1 + G_{(n_č-1)2}V_2 + \ldots + G_{(n_č-1)(n_č-1)}V_{(n_č-1)} = I_{č(n_č-1)}$$

- Gde je $\boldsymbol{n_č}$ broj čvorova u kolu.

METODA POTENCIJALA ČVOROVA

- G_{ii}, i=1,2,...,$n_č$-1 su sopsvene provodnosti čvora i i jednake su zbiru provodnosti svih grana koje se stiču u i-tom čvoru (uzete uvek sa predznakom (+)).
- G_{ij}, i,j=1,2,...,$n_č$-1, $i \neq j$ su međusobne provodnosti čvora i i čvora j i jednake su zbiru provodnosti svih grana koje direktno povezuju ova dva čvora (uzete uvek sa predznakom (-)). Ukoliko čvorovi i i j nisu direktno povezani ili je u toj grani idealni strujni generator tada je $G_{ij}=0$. Očigledno je $G_{ji}=G_{ij}$.
- $I_{či}$, i=1,2,...,$n_č$-1 je algebarski zbir struja svih idealnih strujnih generatora i ekvivalentnih realnih strujnih generatora koji se stiču u čvoru i. Ako je strujni generator okrenut prema čvoru uzima se predznak (+), a predznak (-) ako je strujni generator okrenut od čvora.

METODA POTENCIJALA ČVOROVA - PRIMER



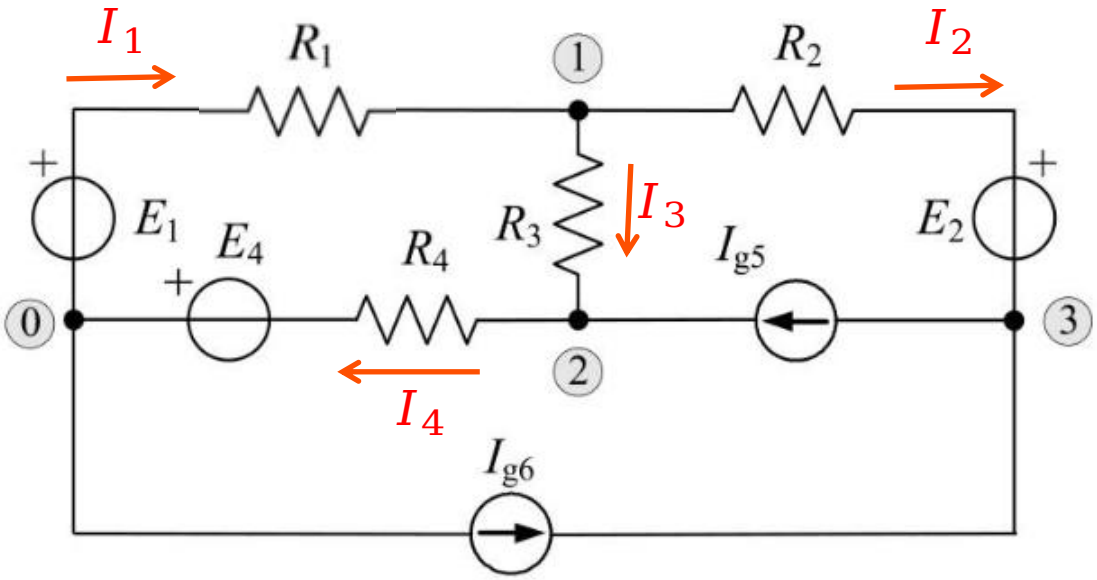
- Jednačine po MPČ

$$(1)\quad +\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_1 - \frac{1}{R_3}V_2 - \frac{1}{R_2}V_3 = +\frac{1}{R_1}E_1 + \frac{1}{R_2}E_2$$

$$(2)\quad -\frac{1}{R_3}V_1 + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)V_2 - 0\bullet V_3 = -\frac{1}{R_4}E_4 + I_{g5}$$

$$(3)\quad -\frac{1}{R_2}V_1 - 0\bullet V_2 + \frac{1}{R_2}V_3 = -\frac{1}{R_2}E_2 + I_{g6} - I_{g5}$$

METODA POTENCIJALA ČVOROVA - PRIMER



- Struje u granama su

$$I_1 = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{(E_1+V_0)-(V_1)}{R_1} = \frac{E_1-V_1}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{(V_1)-(E_2+V_3)}{R_2} = \frac{V_1-E_2-V_3}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{V_1-V_2}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{(V_2)-(-E_4+V_0)}{R_4} = \frac{V_2+E_4}{R_4}$$

METODA POTENCIJALA ČVOROVA - E ???

- Kada u kolu postoje idealni naponski generatori, otpornosti tih grana su jednake 0 a odgovarajuće provodnosti grana sa indealnim naponskim generatorima su beskonačne. Zbog toga se **jednačine po metodi MPČ za čvorove u kojima se stiču grane sa idealnim naponskim generatorima ne mogu pisati**!
- Ako postoji **jedan ili više idealnih naponskih generatora koji su svi jednim svojim krajem povezani za referentni čvor**, tada se, slično kao kod MKS, može napisati redukovani skup jednačina.
- Za svaki čvor u kome se stiče grana sa idealnim naponskim generatorom, ne piše se jednačina po MPČ, već se piše jednačina oblika

$$V_i = E_i \ , \qquad i = 1,2,\ldots,n_E$$

- Gde je $\boldsymbol{n_E}$ broj grana koje sadrže samo idealne naponske generatore, a $\boldsymbol{E_i}$ su elektromotorne sile tih generatora. Ako je generator okrenut prema čvoru uzima se predznak (+), a predznak (-) ako je generator okrenut od čvora (tj. prema referentnom čvoru).
- Dimenzija sistema jednačina po MPČ je i dalje $(n_č - 1)$ i postoji isto toliko potencijala čvorova, samo se ne pišu sve jednačine sistema, već se umesto njih pišu jednačine oblika $V_i = E_i$.

METODA POTENCIJALA ČVOROVA - PRIMER SA E

- Kolo sa slike ima **idealni naponski generator** između čvorova 0 i 1.
- Dimenzija sistema je $n_č - 1 = 4 - 1 = 3$, jer toliko ima nezavisnih potencijala, ali se jednačina za čvor 1 ne piše po MPČ

$$1: \quad V_1 = E_1$$

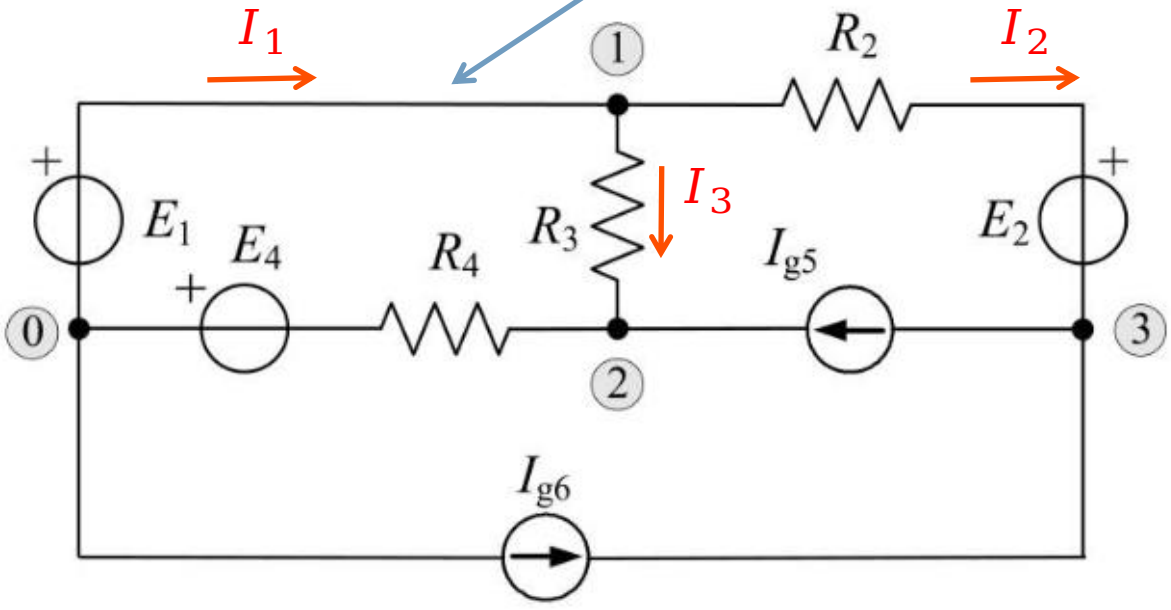
$$2: \quad -\frac{1}{R_3}V_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 = -\frac{E_4}{R_4} + I_{g5},$$

$$3: \quad -\frac{1}{R_2}V_1 + \frac{1}{R_2}V_3 = -\frac{E_2}{R_2} - I_{g5} + I_{g6}.$$

Kako izračunati struju kroz E_1 ?

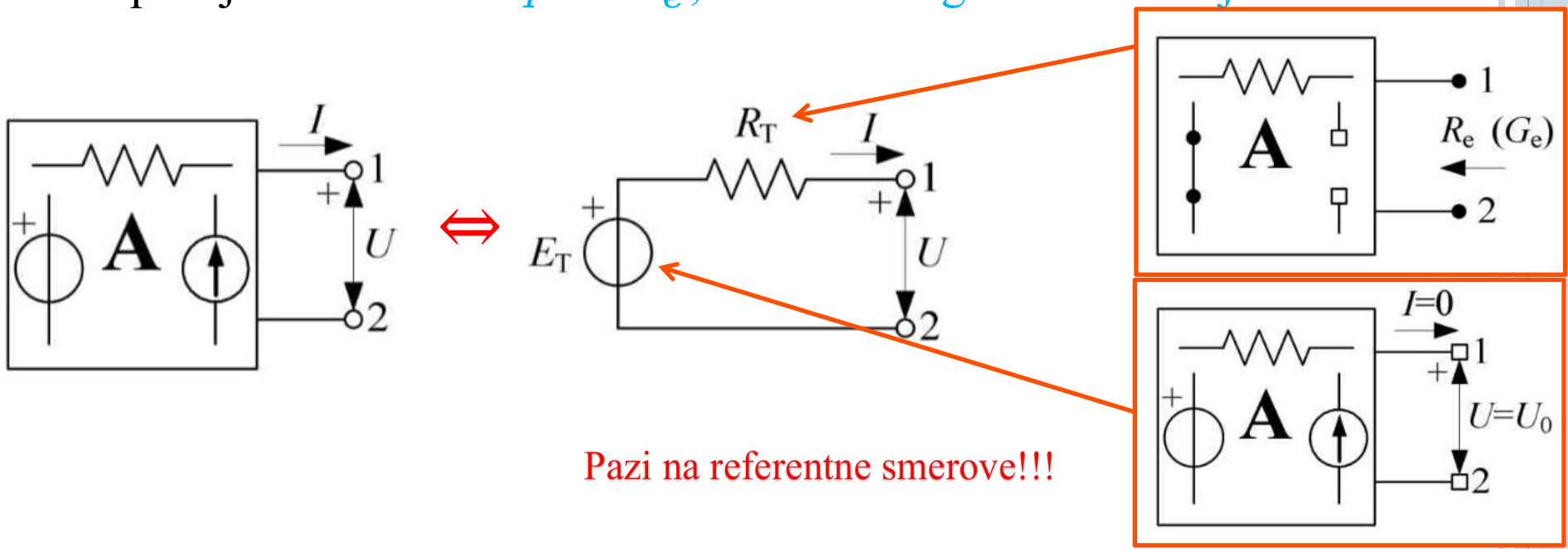
$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{V_1 - (E_2 + V_3)}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_3}$$



TEVENENOVA TEOREMA

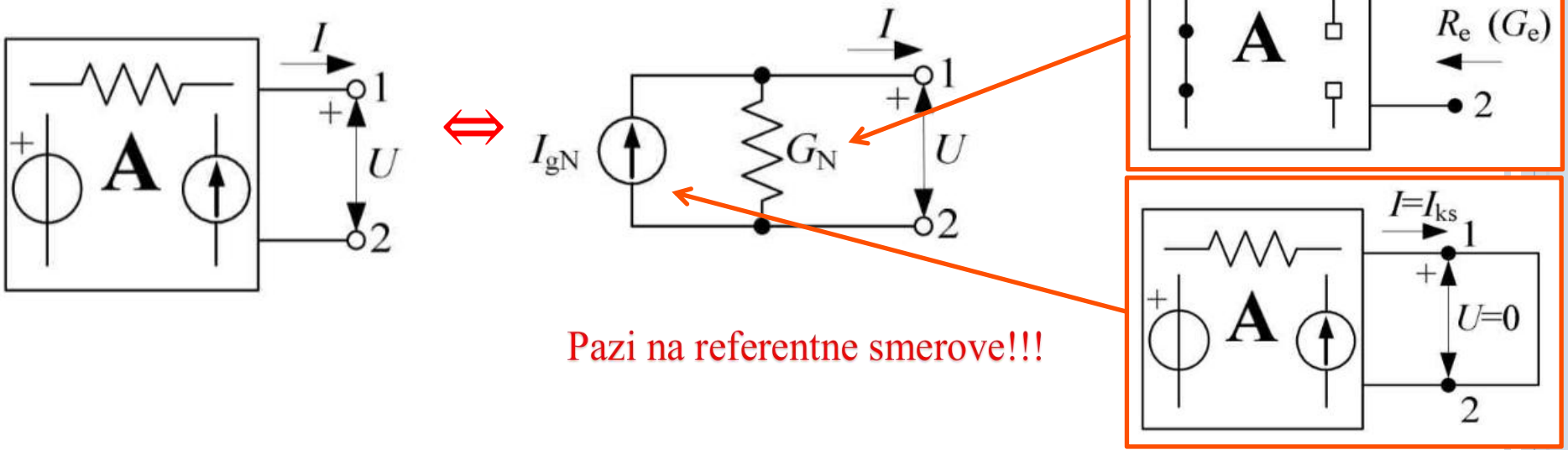
- Deo linearnog kola između dva čvora se može zameniti
  - realnim naponskim generatom - Tevenenova teorema ili
  - realnim strujnim generatorom - Nortonova teorema.
- **Tevenenova teorema**: Mreža A između priključaka 1 i 2 se može zameniti realnim naponskim generatorom, čija je
  - elektromotorna sila jednaka naponu između otvorenih priključaka 1 i 2: $E_T = U_0$,
  - unutrašnja otpornost je jednaka ekvivalentnoj otpornosti između priključaka 1 i 2: $R_T = R_e$, kada su svi generatori isključeni.



Pazi na referentne smerove!!!

TEVENENOVA TEOREMA

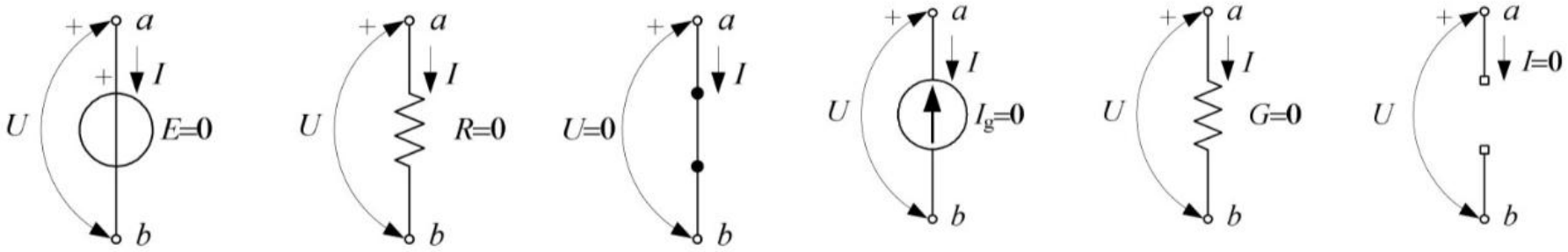
- **Nortonova teorema**: Mreža A između priključaka 1 i 2 se može zameniti realnim strujnim generatorom čija je
  - struja jednaka struji kratkog spoja priključaka 1 i 2: $I_{gN} = I_{KS}$,
  - unutrašnja provodnost je jednaka ekvivalentnoj provodnosti između priključaka 1 i 2: $G_T = G_e$, kada su svi generatori isključeni.
- Nortonova i Tevenenova teorema su **dualne**.
  - Tevenenov generaor se može transformisati u strujni Nortonov generator: $I_{gN} = E_T/R_T$, $G_N = 1/R_T$.
  - Važi i obrnuto: $E_T = I_{gN}/G_N$, $R_T = 1/G_N$.



Pazi na referentne smerove!!!

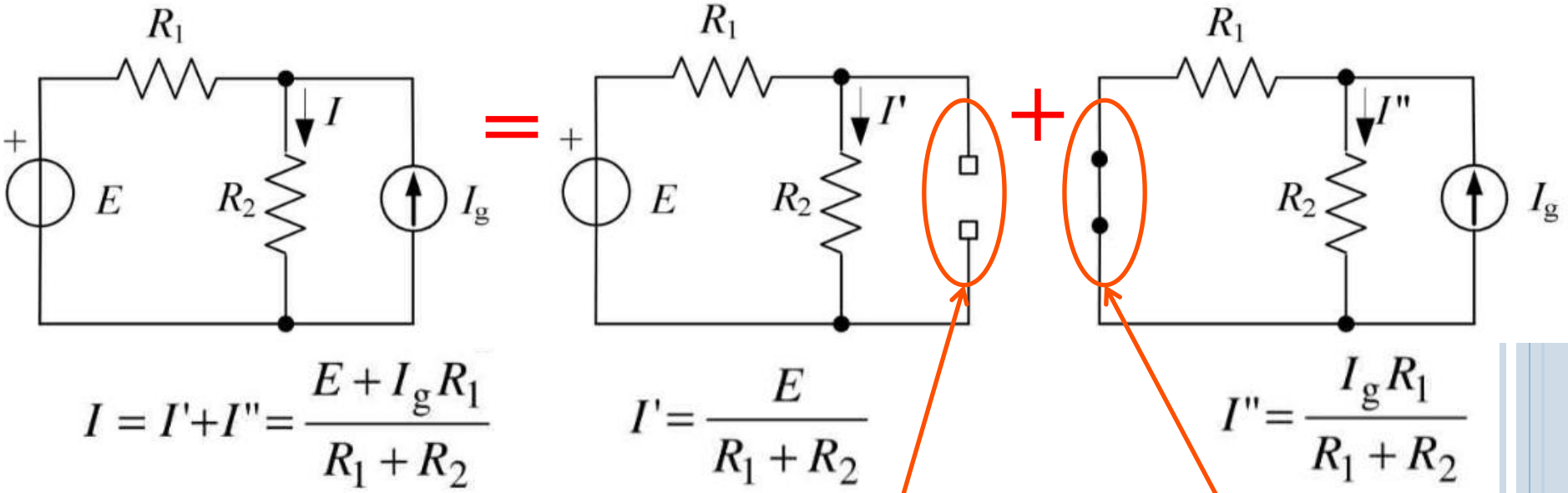
TEOREMA SUPERPOZICIJE

- **Teorema superpozicije:** Bilo koji odziv kola (napon između bilo koja dva čvora ili struja bilo koje grane) se može dobiti kao zbir (superpozicija) odziva na svaku pojedinačnu pobudu.
- Primenjuje se na linearno kolo u kome deluje više pobuda (naponskih ili strujnih generatora).
- Ima smisla ako se kola sa jednom pobudom jednostavno rešavaju.
- Da bi se odredio odziv na samo jednu pobudu, sve ostale pobude se moraju anulirati:
  - za idealni naponski generator ***E*=0 => kratak spoj**, ako je generator realni i ima R_u ova otpornost ostaje.
  - za idealni strujni generator I_g**=0 => otvorena veza**, ako je generator realni i ima G_u ova provodnst ostaje.



TEOREMA SUPERPOZICIJE - PRIMER

- U kolu sa slike odrediti struju ***I*** u grani sa otpornikom R_2.



$$I = I' + I'' = \frac{E + I_g R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I' = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

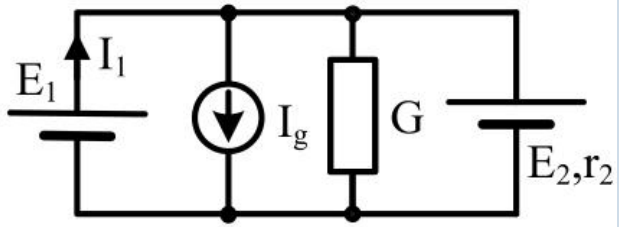
$$I'' = \frac{I_g R_1}{R_1 + R_2}$$

Ukidanje strujnog generatora

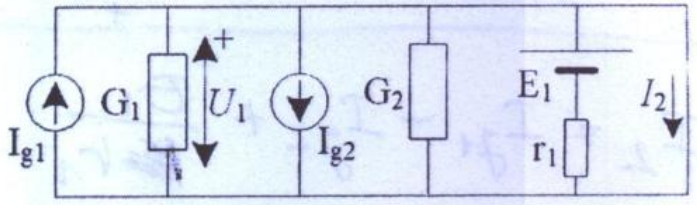
Ukidanje naponskog generatora

PRIMERI

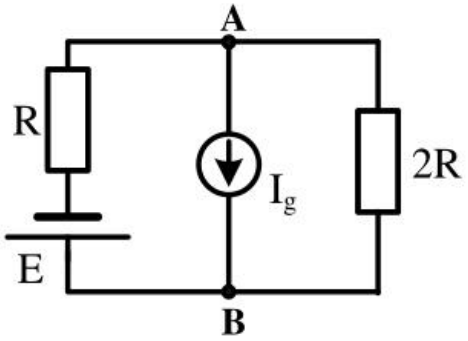
1. (7 poena) U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E_1, I_g, G, E_2 i r_2. Odrediti struju I_1 kroz generator E_1.



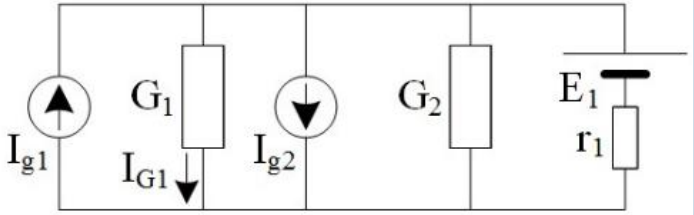
2. (7 poena) U električnom kolu poznati su i prikazani na slici parametri svih elemenata. Odrediti napon U_1 i intenzitet struje I_2.



3. U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E, I_g i R. Primenom **metode konturnih struja**, odrediti najpre struju kroz otpornik $2R$, a zatim odrediti snagu koja se razvija na ovom otporniku. **(6 poena)**

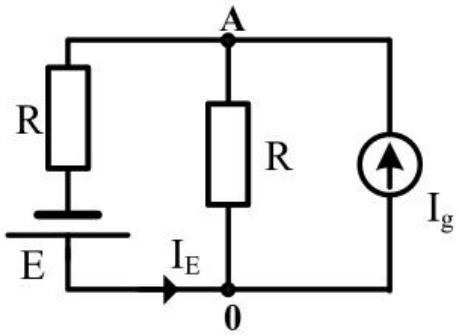


4. (7 poena) U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E_1, I_{g1}, I_{g2}, G_1, G_2 i r_1. Odrediti struju I_{G1}.



PRIMERI

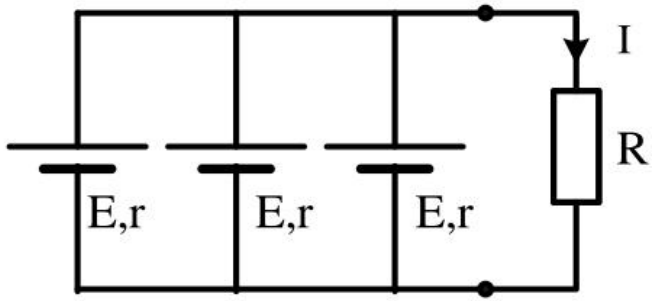
5. U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E, I_g i R. Primenom **metode potencijala čvorova**, odrediti najpre izraz za potencijal čvora A, a zatim i izraz za struju I_E koja protiče kroz generator E u smeru označenom na slici. **(6poena)**



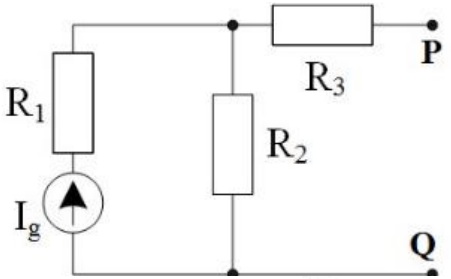
6. Tri identična realna naponska generatora, poznatih parametara E i r, povezana su paralelno, a zatim je na njih povezan potrošač poznate otpronosti R.

a) Primenom metode potencijala čvorova odrediti struju kroz potrošač. **(5 poena)**

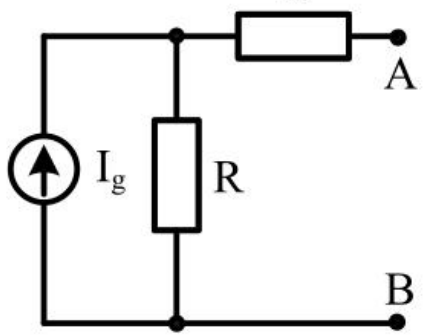
b) Odrediti izraz za struju potrošača, ako je paralelno povezano N identičnih generatora. **(2 poena)**



7. **(6 poena)** Za kolo na slici, između tačaka P i Q, nacrtati ekvivalentni Tevenenov generator i odrediti njegove parametre. Poznate su vrednosti parametara: I_g, R_1, R_2 i R_3.

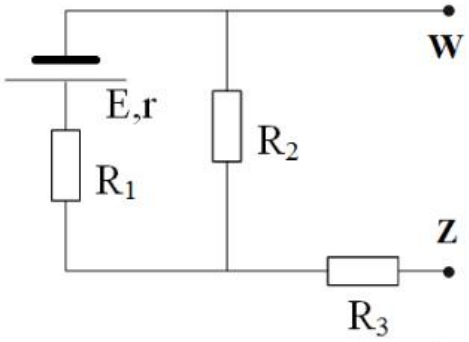


8. **(6 poena)** Za kolo na slici, primenom Tevenenove teoreme, odrediti parametre ekvivalentnog realnog naponskog generatora između tačaka A i B. Poznate su vrednosti parametara: I_g i R.

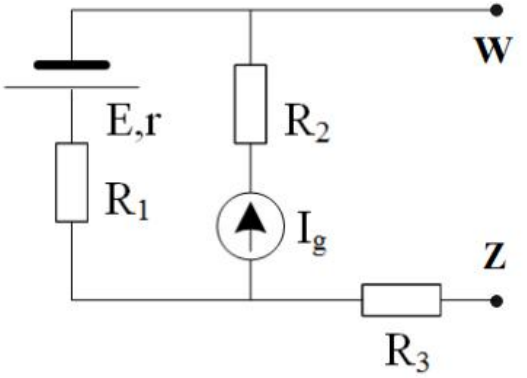


PRIMERI

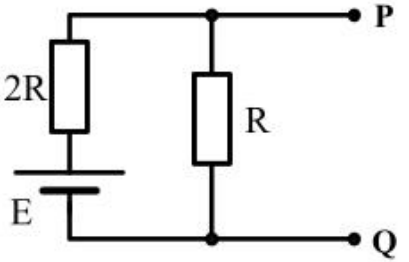
9. **(6 poena)** Za kolo na slici, između tačaka W i Z, nacrtati ekvivalentni Tevenenov generator i odrediti njegove parametre. Poznate su vrednosti parametara: E, r, R_1, R_2 i R_3.



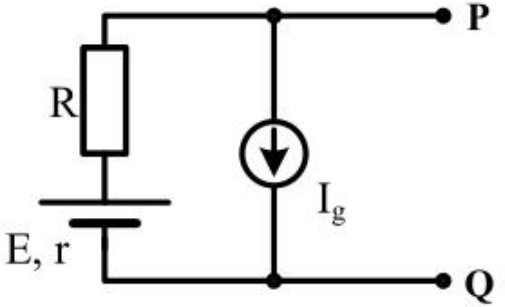
10. Za kolo na slici, između tačaka W i Z, nacrtati ekvivalentni Nortonov generator i odrediti njegove parametre I_N i G_N.
Poznate su vrednosti parametara: E, r, Ig, R_1, R_2 i R_3. **(6 poena)**



11. Za kolo na slici, između tačaka P i Q, nacrtati ekvivalentni Nortonov generator i odrediti njegove parametre. Poznate su vrednosti parametara: E i R. **(6 poena)**

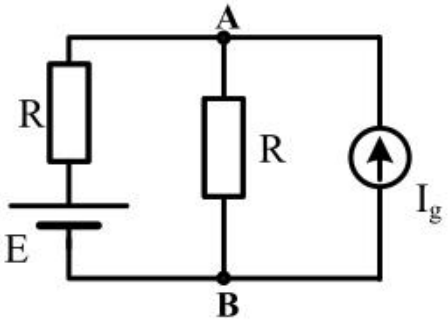


12. Za kolo na slici, između tačaka P i Q, nacrtati ekvivalentni Nortonov generator i odrediti njegove parametre I_N i G_N. Poznate su vrednosti parametara: E, r, I_g i R. **(7 poena)**



PRIMERI

13. U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E, I_g i R. Primenom **teoreme superpozicije**, odrediti napon U_{AB}. **(7 poena)**



14. **(7 poena)** U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E, I_g, R_1 i R_2. Primenom metode superpozicije odrediti intenzitet struje I_X.

