



UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

ELEKTROTEHNIKA

- ŠKOLSKA 2025/2026 -

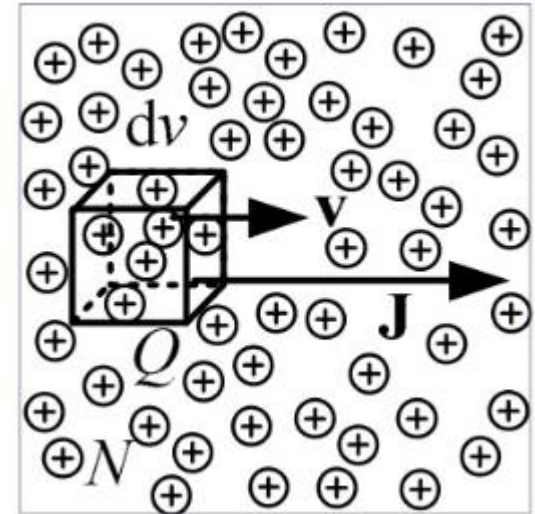
2. JEDNOSMERNE STRUJE
- OZ, KZ, MKS, MPČ, TT, NT, TS -

POVRŠINSKA GUSTINA ELEKTRIČNE STRUJE

- Električna struja u provodnicima nastaje pod dejstvom električnog polja.
- Električno polje deluje na naelektrisane čestice koje se usmenreno kreću u pravcu polja (pozitivne u smeru vektora polja, a negativne u suprotnom smeru) brzinom $\mathbf{v}$.
- Vektr površinske gustine električne struje se definiše

$$\vec{J} = NQ\vec{v} = NQ\mu\vec{K} = \gamma\vec{K}.$$

- Q je naelektrisanje slobodne čestice, N njihova koncentracija u prostoru, a μ pokretljivost.
- Smer vektora $\mathbf{J}$ je tehnički smer struje, **svejedno je da li se pozitivna čestica kreće u pravcu polja ili negativna u suprotnom pravcu!!!**
- Jedinica je $\mathbf{A/m^2}$ (A - Amper).



SPECIFIČNA PROVODNOST I OTPORNOST

- Dakle, važi da je
$$\vec{J} = \gamma \vec{K}, \quad \vec{K} = \rho \vec{J}, \quad \rho = 1/\gamma$$
- Specifična provodnost γ ima jedinicu **S/m** (S - Simens).
- Specifična otpornost ρ ima jedinicu **Ωm** (Ω - Om).
- Srebro: $\gamma=63 \text{ MS/m}$, a $\rho=16 \text{ n}\Omega\text{m}$.
- Bakar: $\gamma=58 \text{ MS/m}$, a $\rho=17 \text{ n}\Omega\text{m}$.
- **Savršeni provodnik**
$$\gamma \rightarrow \infty, \rho = 0$$
- Dakle, i ako postoji struja, električno polje je **$K=0$** !
- **Savršeni izolator**
$$\gamma = 0, \rho \rightarrow \infty$$
- Dakle, i ako postoji električno polje, gustina struje je **$J=0$** !

- Kada struja protiče kroz provodne žice, dovoljno je posmatrati brzinu proticanja slobodnih naelektrisanja kroz poprečni presek žičanog provodnika.
- U tu svrhu definiše se **jačina struje** (jedinica A)

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

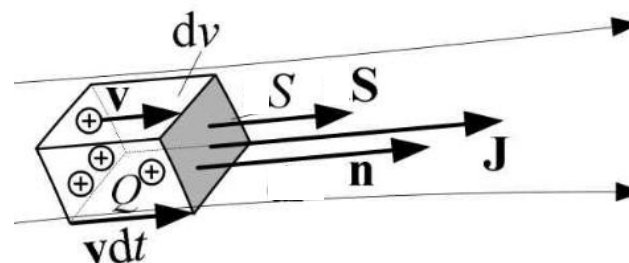
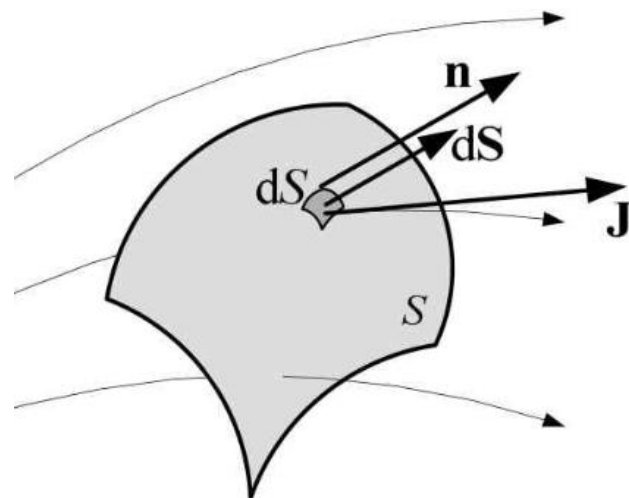
- Ako posmatramo površ S normalnu na vektor gustine struje koju čine nosioci naelektrisanja Q i koncentracije N , a brzina njihovog kretanja je v , tada je

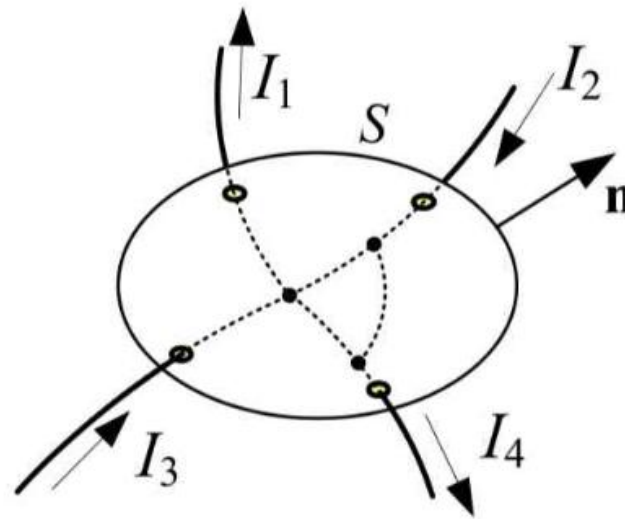
$$I = JS = (NQv)S$$

$$I = \frac{QNS(vdt)}{dt} = \frac{QN(Sdl)}{dt}$$

$$I = \frac{QN dV}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

- Dakle, jačina struje je jednaka brzini protoka naelektrisanja kroz površ S u jedinici vremena.





- Ukoliko nema nagomilavanja naelektrisanja fluks vektora gustine struje kroz zatvorenu površ S jednak je nuli

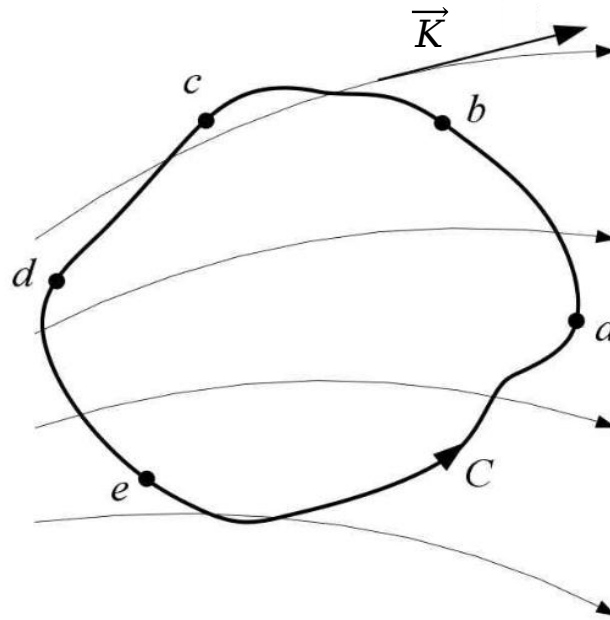
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Ukoliko zatvorena površ S obuhvata žičane provodnike

$$+I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

- Ova jednakost se naziva **I Kirhofov zakon (I KZ)**.

DRUGI KIRHOFOV ZAKON



- Duž zatvorene konture C cirkulacija vektora K je jednaka nuli

$$\oint_C \vec{K} \cdot d\vec{l} = 0$$

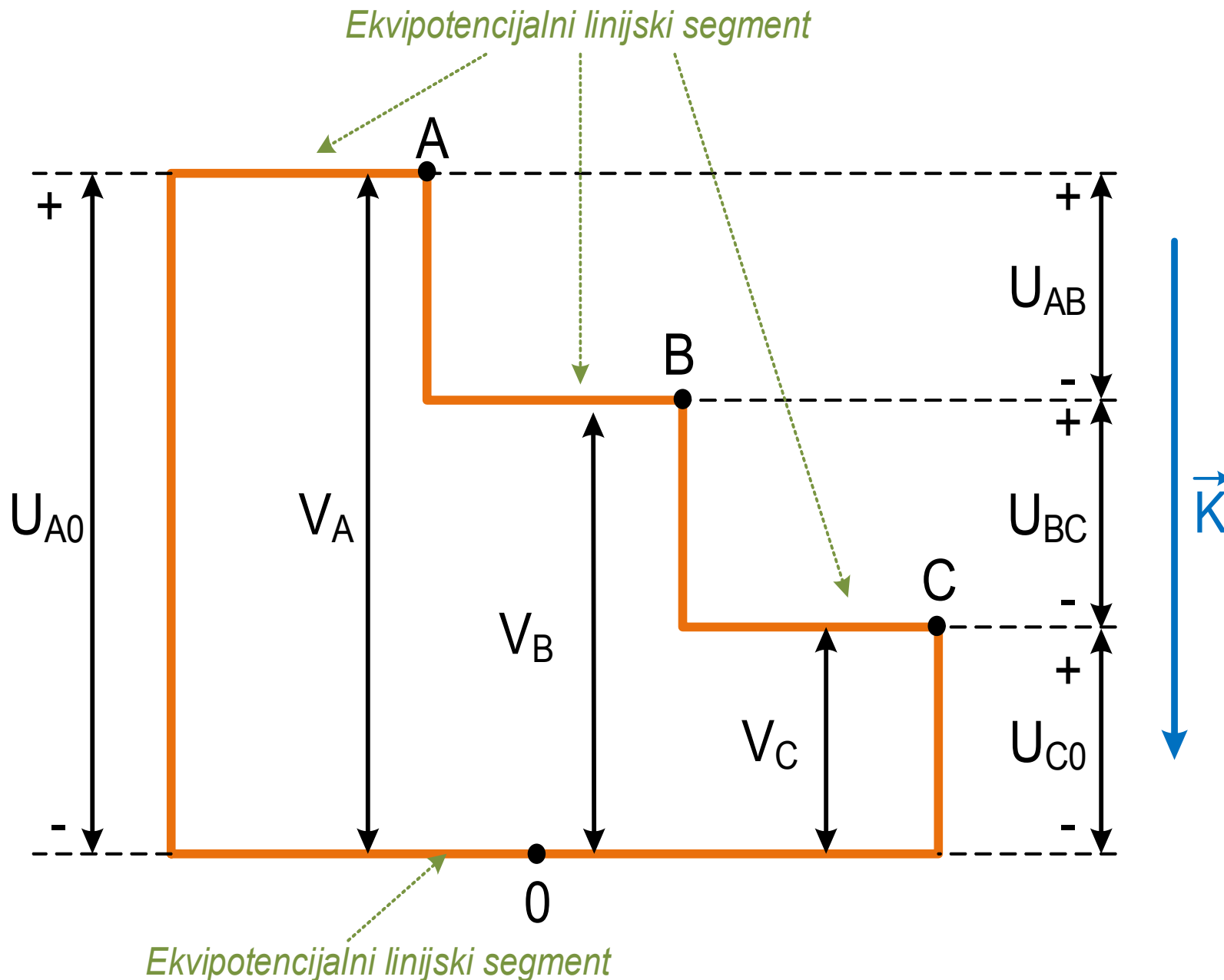
- Ako se ovaj integral razloži na delove putanje C , dobija se

$$\oint_C \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_d^e \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_e^a \vec{K} \cdot d\vec{l} = 0$$
$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{de} + U_{ea} = 0$$

- Ova jednakost se naziva II Kirhofov zakon (II KZ).

DRUGI KIRHOFOV ZAKON

-



DRUGI KIRHOFOV ZAKON

- Dva načina pisanja jednačina po II KZ:
 1. Kretanje niz polje (u smeru opadanja napona): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (+) ka (-),
 2. Kretanje uz polje (u smeru porasta napona): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (-) ka (+).
- I način (piše se (+) u smeru opadanja napona), ako se kreće u smeru kazaljki na satu dobija se
$$U_{AB} + U_{BC} + U_{C0} - U_{A0} = 0$$
- II način (piše se (+) u smeru porasta napona), ako se kreće u smeru kazaljki na satu dobija se
$$-U_{AB} - U_{BC} - U_{C0} + U_{A0} = 0$$
- Oba načina pisanja daju istu jednačinu: dovoljno je obrnuti smer obilaska konture (suprotan od kretanja kazaljki na satu) ili pomnožiti jednačinu sa (-1).
- Odaberite stil pisanja jednačina po vašoj želji!

DRUGI KIRHOFOV ZAKON

- Dva načina pisanja jednačina za potencijal:
 - Kretanje u smeru opadanja napona od tačke u kojoj se traži potencijal ka 0 (referentnoj tački): u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (+) ka (-),
 - Kretanje u smeru porasta napona od tačke 0 (referentne tačke) ka tački u kojoj se traži potencijal: u jednačinama se piše (+) za napon kada se kreće u smeru od (-) ka (+).
- I način (piše se (+) u smeru opadanja napona): kretanje mora da se vrši od tačke A/B/C prema tački 0 (referentna tačka)
$$V_A = U_{AB} + U_{BC} + U_{C0} = U_{A0}$$
$$V_B = U_{BC} + U_{C0} = -U_{AB} + U_{A0}$$
$$V_C = U_{C0} = -U_{BC} - U_{AB} + U_{A0}$$
- II način (piše se (+) u smeru porasta napona): kretanje mora da se vrši od tačke 0 (referentna tačka) prema tački A/B/C. **Jednačine su iste i moraju biti iste!!!**

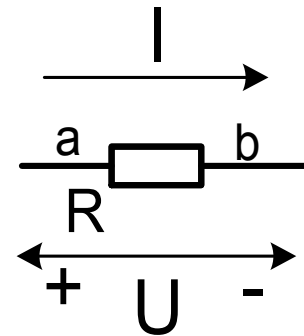
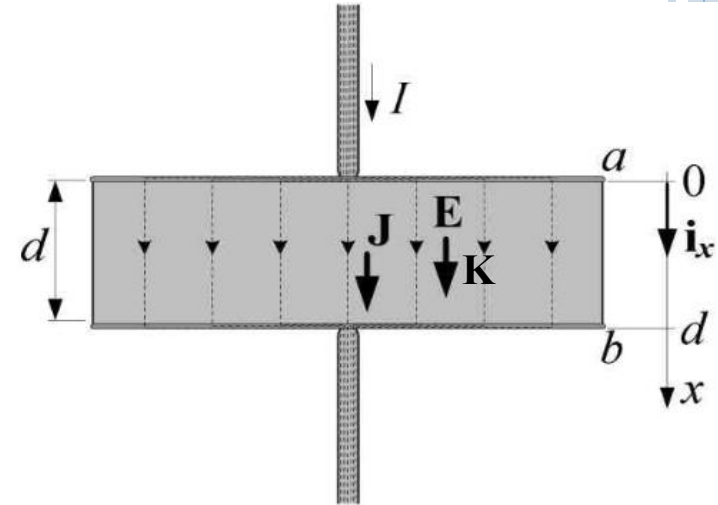
OTPORNIK U KOLU JEDNOSMERNE STRUJE

- Napon na krajevima otpornika je

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \rho \vec{J} \cdot d\vec{l}$$

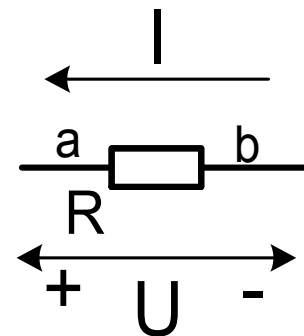
$$U_{ab} = \rho J d = \frac{\rho d}{S} I = RI$$

- Gde je $R = \rho \frac{d}{S}$ parametar koji nazivamo otpornost, a jedinica provodnosi je om (Ω).
- Recipročna vrednost otpornosti naziva se provodnost $G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{S}{d}$ a jedinica je simens (S).
- Jednakost $U_{ab} = RI$ naziva se **Omov zakon**.
- Treba voditi računa da je **smer struje od priključka a ka b - usaglašeni referentni smer!**



usaglašeni
referentni
smer

$$U_{ab} = RI$$



neusaglašeni
referentni
smer

$$U_{ab} = -RI$$

- Kada se se naelektrisanja kreću kroz otpornik, zbog sudara sa jonima, dolazi do zagrevanja materijala - električni rad se pretvara u toplotu.
- Ovakva pojava da se rad električnih sila pretvara u otporniku u toplotu se naziva **Džulovim gubicima**.
- Može se izvesti da je snaga Džulovih gubitaka $P = UI$, a imajući u vidu Omov zakon dobija se da je

$$P = UI = RI^2 = \frac{I^2}{G} = \frac{U^2}{R} = GU^2$$

- Snaga predstavlja brzinu vršenja rada tj. brzinu sa kojom se vrši konverzija električne energije u toplotnu

$$P = \frac{dA}{dt}$$

- Jedinica za energiju i rad je J (Džul), a za snagu W (Vat).

GENERATOR I OTPORNIK U STRUJNOM KOLU

- Napon generatora U_g je jednak elektromotornoj sili E .
- Po II KZ, napon otpornika je takođe jednak elektromotornoj sili

$$U_R = U_g = E$$

- Prema Omovom zakonu struja u kolu je

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{E}{R}$$

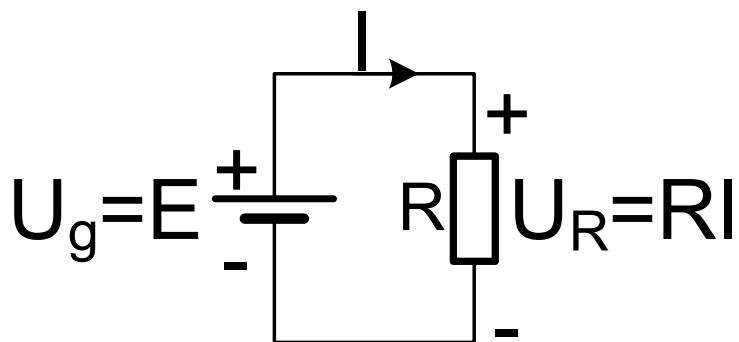
- Snaga Džulovih gubitaka u otporniku

$$P_R = RI^2 = U_R I = EI = \frac{E^2}{R}$$

- Snaga koja se troši u otporniku snabdeva se iz generatora

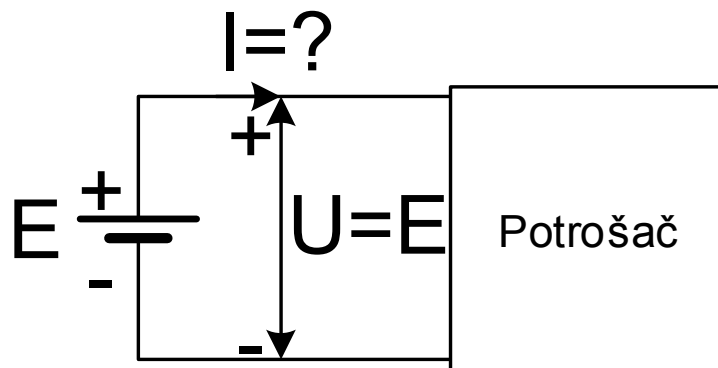
$$P_g = EI = P_R$$

- **Usaglašeni referentni smerovi generatora su suprotni nego za otpornik (struja je usmerena od (-) kraja ka (+) kraju generatora)!**

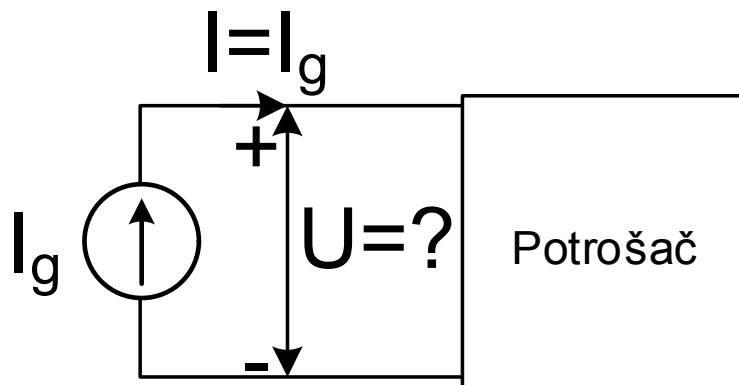
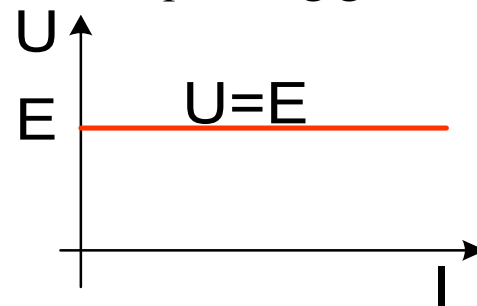


GENERATOR I OTPORNIK U STRUJNOM KOLU

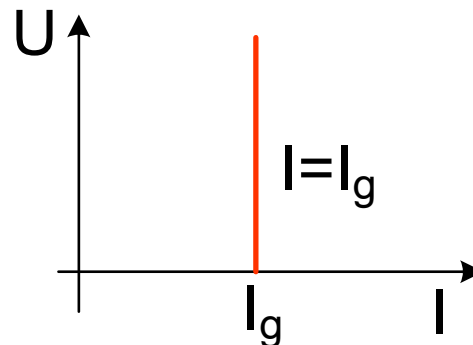
- Naponski generator: $U_g = E$
- Strujni generator: $I_g = I$
- Prethodno definisani generatori nazivaju se **idealnim naponskim i strujnim generatorima**.



U-I karakteristika idealnog naponskog generatora



U-I karakteristika idealnog strujnog generatora

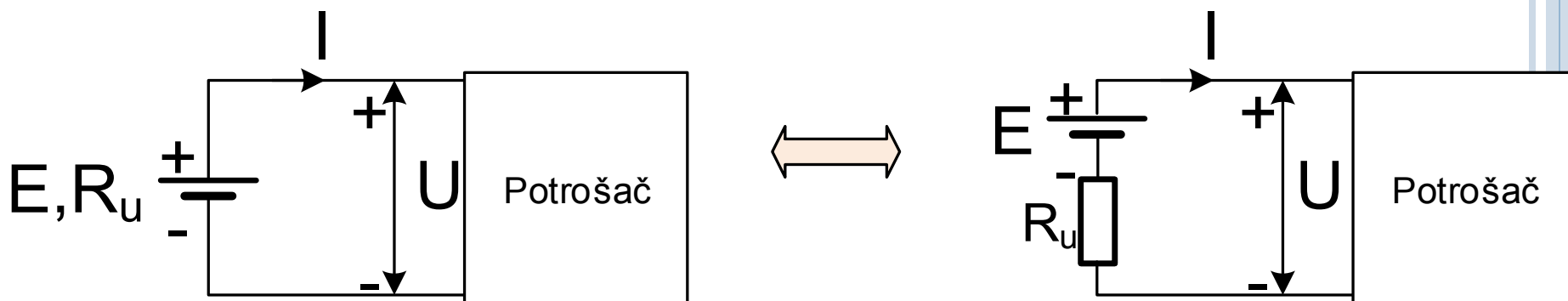


- Realni naponski generatori imaju Džulove gubitke koji se modeluju redno vezanim “unutrašnjim” otpornikom čija je otpornost R_u .
- Napon realnog naponskog generatora opada sa porastom struje kroz potrošač

$$U = E - R_u I$$

- **Realni naponski** generator se može u kolima transformisati u **realni strujni**, vodeći računa da **referentni smerovi ostanu neizmenjeni!** Parametri ekvivalentnog strujnog generatora su

$$G_u = \frac{1}{R_u}, \quad I_g = \frac{E}{R_u}$$



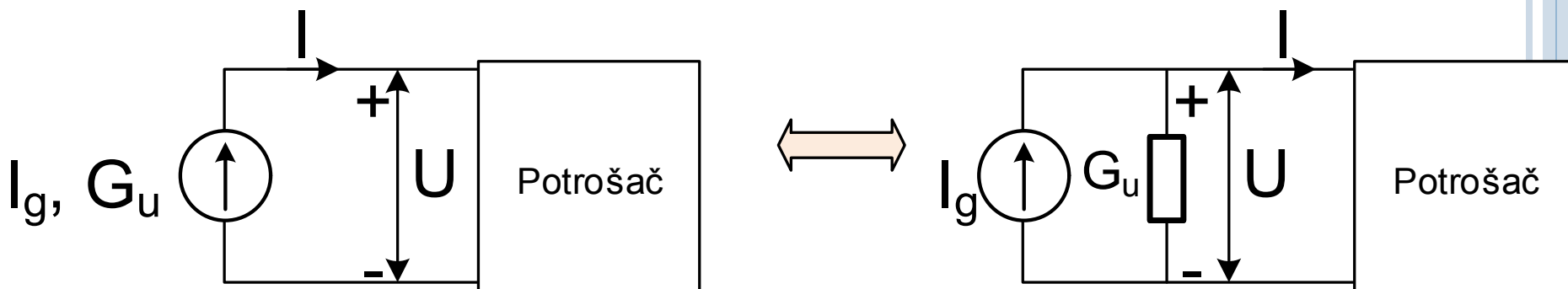
NAPONSKI GENERATOR JE ODREĐEN ŠA (E, R_u)

- Realni strujni generatori imaju Džulove gubitke koji se modeluju paralelno vezanim “unutrašnjim” otpornikom čija je provodnot G_u .
- Struja realnog strujnog generatora opada sa porastom napona potrošača

$$I = I_g - G_u U$$

- **Realni strujni** generator se može u kolima transformisati u **realni naponski** vodeći računa da **referentni smerovi ostanu neizmenjeni!**
Parametri ekvivalentnog naponskog generatora su

$$R_u = \frac{1}{G_u}, \quad E = \frac{I_g}{G_u}$$



STRUJNI GENERTOR JE ODREĐEN SA (I_g, G_u)

USLOV PRENOSA MAKSIMALNE SNAGE

- Kada se realni generator (E, R_u) poveže na potrošač u vidu otpornika otpornosti R_p , kolika je optimalna vrednost otpornosti tako da se potrošaču prenese maksimalna snaga?

$$U_{PN} = R_p I$$

$$U_{PN} = E - U_{R_u} = E - R_u I$$

$$R_p I = E - R_u I$$

$$I = \frac{E}{R_p + R_u}$$

- Snaga opornika tj. potrošača je

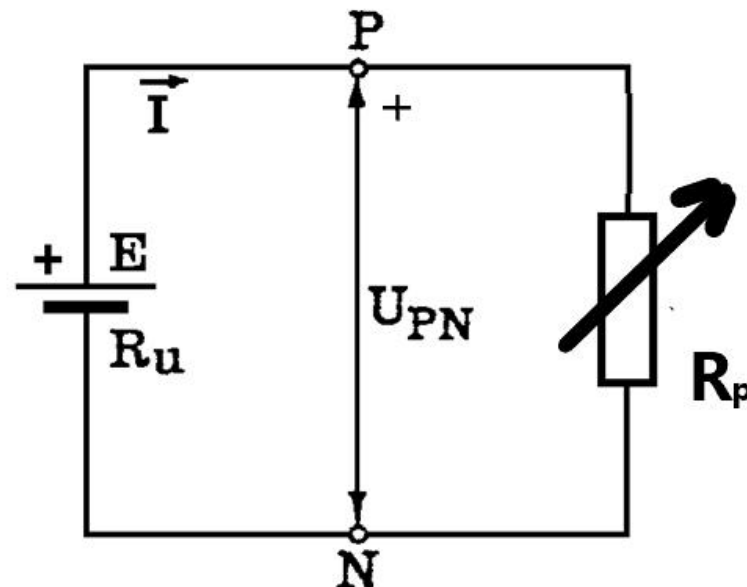
$$P = R_p I^2 = \frac{R_p E^2}{(R_p + R_u)^2}$$

- Maksimum se dobija za

$$\frac{\partial P}{\partial R_p} = 0$$

- Uslov prenosa maksimalne snage je odatle

$$\mathbf{R_p = R_u}$$



PRIMENA I I II KZ SA OZ

- I KZ za čvor O:

1. Struje koje izlaze sa (+) a koje ulaze sa (-):

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

2. Suma struja koje ulaze = sumi struja koje izlaze

$$I_1 + I_2 + I_4 + I_5 = I_3$$

- II KZ za kont. A-B-C:

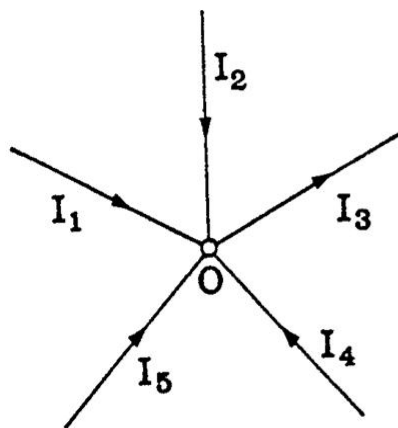
1. (+) ako napon opada tj. niz struju:

$$-E_1 + R_1 I_1 + E_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

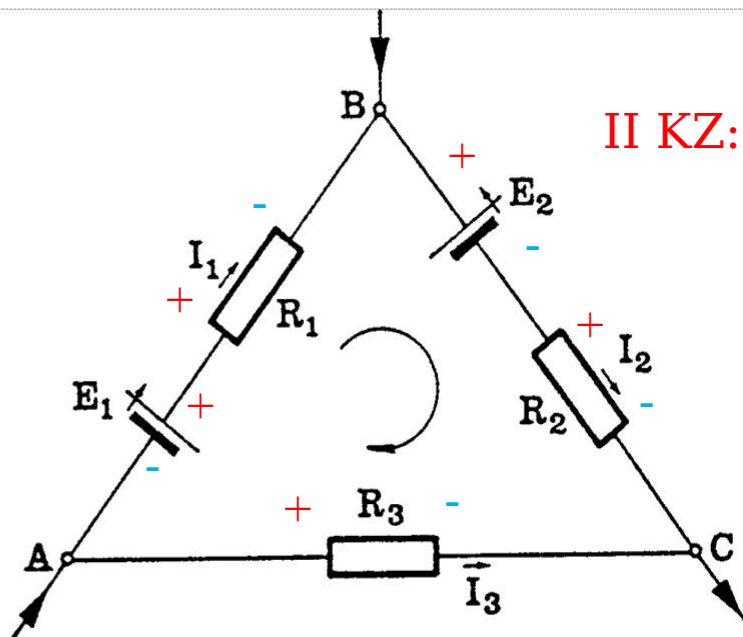
2. (+) ako napon raste tj. uz struju:

$$+E_1 - R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0$$

I KZ: $\sum I = 0$
Čvor O



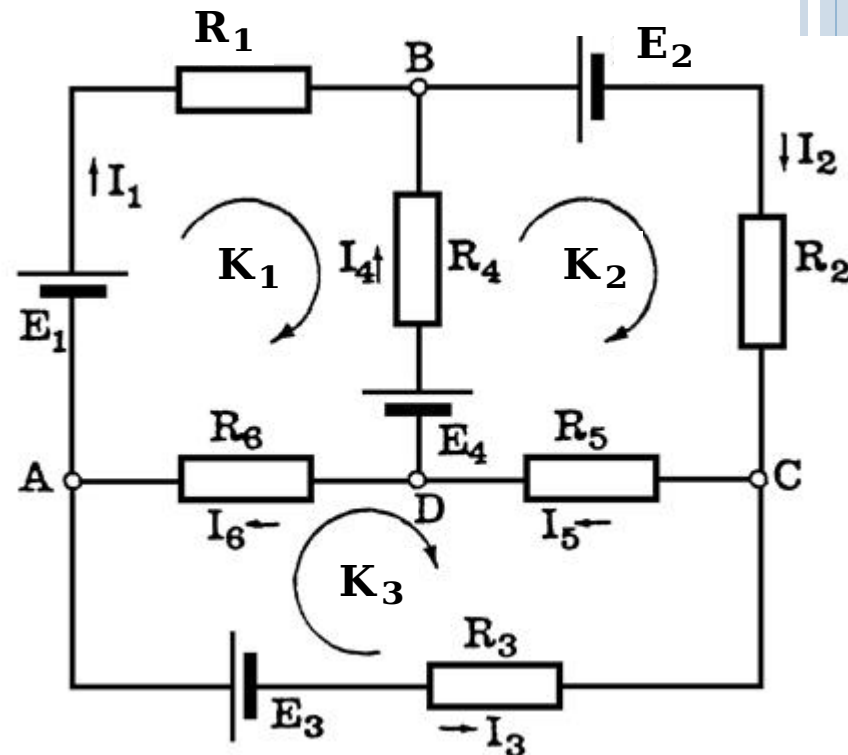
II KZ: $\sum U = 0$
Kontura



REŠAVANJE KOLA PONOČU KZ

18

- Rešiti kolo $\Leftrightarrow$ Odrediti struje u svim granama kola.
- **Struje se mogu orjentisati proizvoljno:**
ako se dobije da je **struja negativna** to samo znači da je realni smer struje zapravo suprotan od pretpostavljenog referentnog smera.
- Broj čvorova: A, B, C, D $\rightarrow n_{\check{c}} = 4$.
Jedan čvor je suvišan - referentni čvor.
- **Broj jednačina po I KZ je**
$$n_{\check{c}} - 1 = 4 - 1 = 3$$
- Broj grana i nepoznatih struja: A-B, A-C, A-D, B-D, B-C, C-D $\rightarrow n_g = 6$.
- **Broj jednačina po II KZ je**
$$n_g - (n_{\check{c}} - 1) = 6 - 3 = 3$$



- Šta ako postoji idealni strujni generator???
- **Broj jednačina po II KZ je tada**
$$n_g - (n_{\check{c}} - 1) - n_{I_g}$$

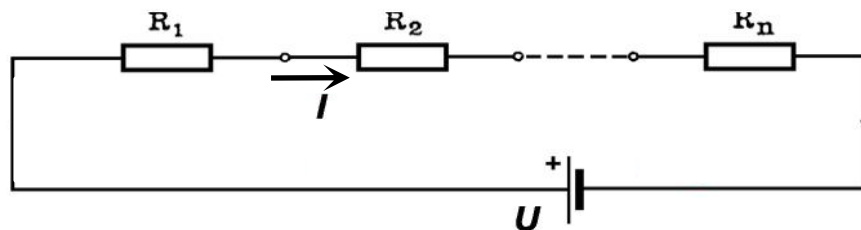
- Redna veza

$$U = I(R_1 + R_2 \cdots + R_n)$$

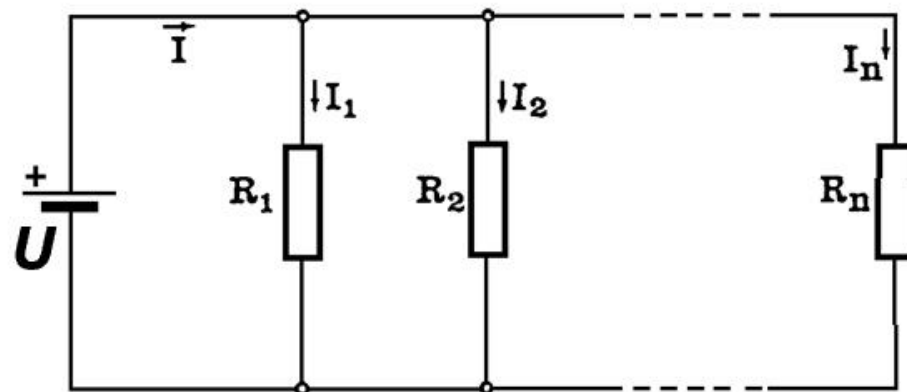
$$R_e = \frac{U}{I}$$

$$R_e = R_1 + R_2 \cdots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i$$

$$\frac{1}{G_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_i}$$



- Paralelna veza



$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \cdots + \frac{U}{R_n}$$

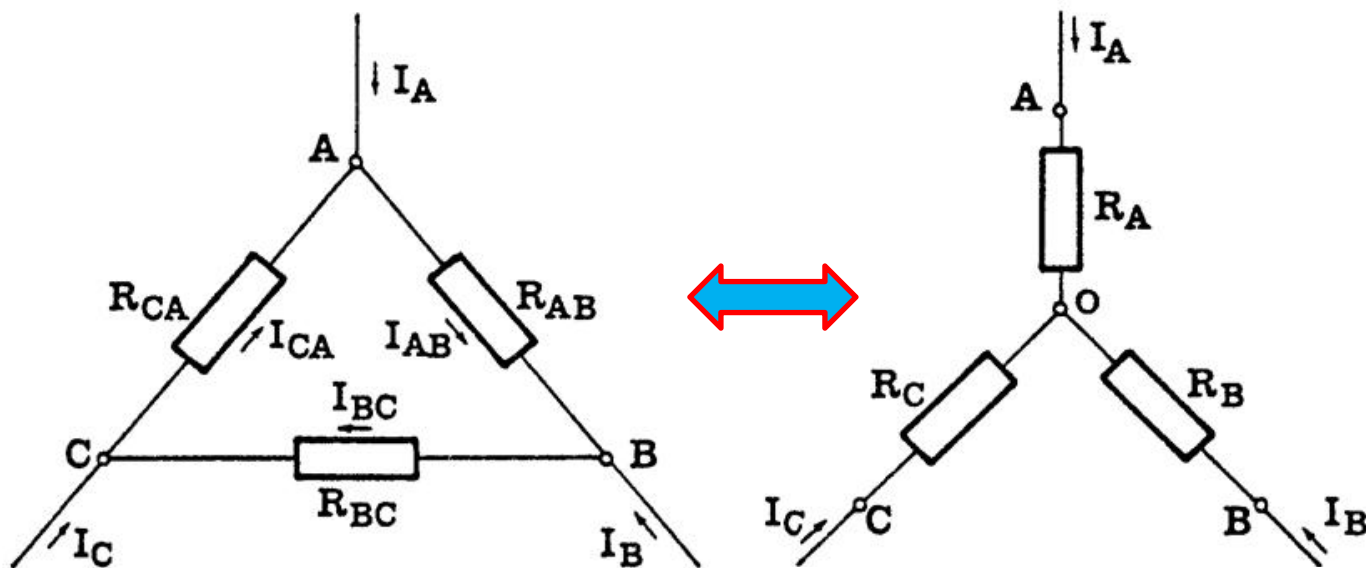
$$\frac{1}{R_e} = \frac{I}{U}$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \cdots + \frac{1}{R_n}$$

$$G_e = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

VEZE OTPORNIKA U TROUGAO U ZVEZDU

- Ako ne postoje ni redne ni paralelne veze, onda treba potražiti zvezdu ili trougao...



$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B}$$

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

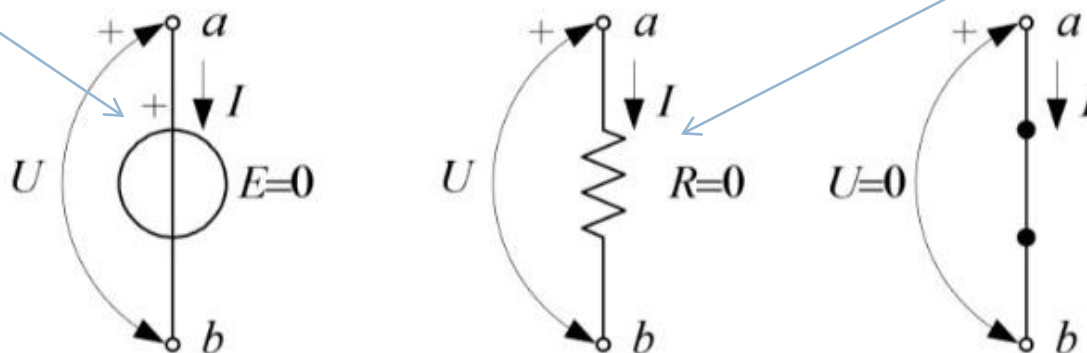
$$R_B = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

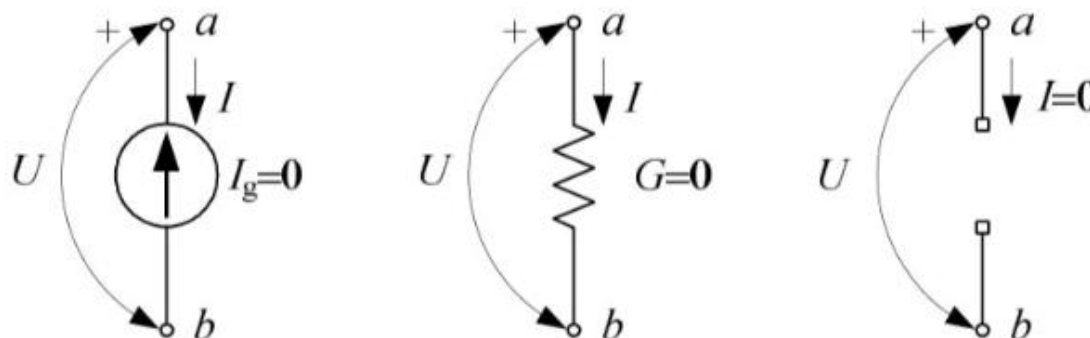
- Kratk spoj** je ekvivalentan idealnom provodnom elementu tj. otporniku $R = 0$, $G \rightarrow \infty$ ili idealnom naponskom generatoru elektromotorne sile $E = 0$.

Oznaka za idealni naponski generator u knjizi sa ETF-a

Oznaka za otpornik u knjizi sa ETF-a



- Otvorena veza** je ekvivalentna idealnom izolujućem elementu tj. otporniku $G = 0$, $R \rightarrow \infty$ ili idealnom strujnom generatoru struje $I_g = 0$.



- Broj jednačina u sistemu n_g se može redukovati tako što se izbegne pisanje jednačina po I KZ čime se dobija **metoda konturnih struja (MKS)**.
- Pisanje jednačina po I KZ se može izbeći ako su te jednačine “automatski zadovoljene” što se postiže uvođenjem koncepta zamišljenih konturnih struja koje “teku” po konturama po kojima se pišu jednačine za II KZ.
- Pošto kroz svaki čvor kroz koji prolazi, konturna struja i ulazi i izlazi iz čvora I KZ je automatski zadovoljen i ove jednačine se ne pišu.
- Dakle, potrebno je napisati samo jednačine po II KZ po odabranim konturama koristeći konturne struje a to je sistem sa $n_g - (n_{\check{c}} - 1)$ jednačina.

- Jednačine po MKS za kolo bez idealnih strujnih generatora se u opštem obliku mogu zapisati kao

$$R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} + \dots + R_{1n_k}I_{kn_k} = E_{k1}$$

$$R_{21}I_{k1} + R_{22}I_{k2} + \dots + R_{2n_k}I_{kn_k} = E_{k2}$$

$\vdots$

$$R_{n_k1}I_{k1} + R_{n_k2}I_{k2} + \dots + R_{n_kn_k}I_{kn_k} = E_{kn_k}$$

- Gde je n_k broj kontura $n_k = n_g - (n_{\check{c}} - 1)$.

- R_{ii} , $i=1,2,\dots,n_k$ su **sopstvene otpornosti konture** i jednake su zbiru svih otpornosti u i -toj konturi (uzete uvek sa predznakom (+)).
- R_{ij} , $i,j=1,2,\dots,n_k$, $i \neq j$ su **međusobne otpornosti konture i i konture j** i jednake su algebarskom zbiru svih otpornosti koje su zajedničke za obe konture. Otpornosti se uzimaju sa predznakom (+) ako se smerovi obilaska kontura u tim zajedničkim granama poklapaju. Ako se smerovi obilaska kontura i i j ne poklapaju, uzima se predznak (-). Očigledno je $R_{ji}=R_{ij}$.
- E_{ki} , $i=1,2,\dots,n_k$ je algebarski zbir elektromotornih sila idealnih naponskih generatora u konturi i . Ako se pri obilasku u smeru konture smer poklapa sa smerom dejstva elektromotorne sile (u smeru porasta napona tj. od (-) ka (+) kraju generatora) **uzima se predznak (+)**, a **predznak (-)** ako se smer obilaska konture i dejstvo elektromotorne sile ne poklapaju (u smeru opadanja napona tj. od (+) ka (-) kraju generatora)).

- Za datu sliku postoje 3 konture i 3 konturne struje I_{k1} , I_{k2} , I_{k3} . Smerovi ovih struja su isti kao i smerovi obilaska kontura.
- Realne struje u granama se dobijaju kao zbir konturnih struja pri čmu se struja uzima sa znakom (+) ako se poklapa sa smerom konturne struje, a sa znakom (-) ako je smer suprotan:

$$I_1 = I_{k1},$$

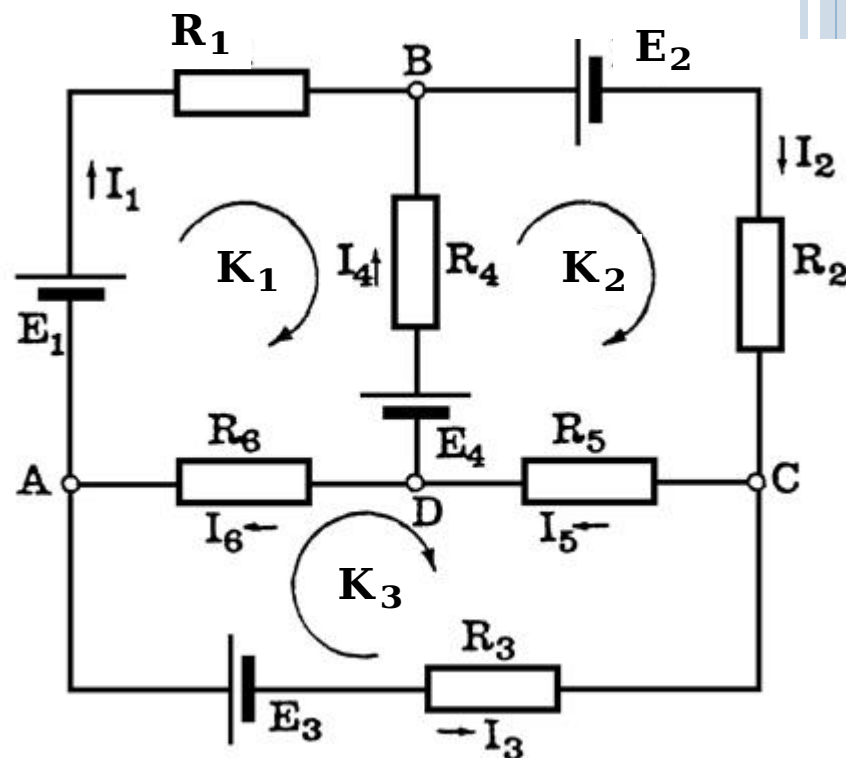
$$I_2 = I_{k2},$$

$$I_3 = -I_{k3},$$

$$I_4 = -I_{k1} + I_{k2},$$

$$I_5 = I_{k2} - I_{k3},$$

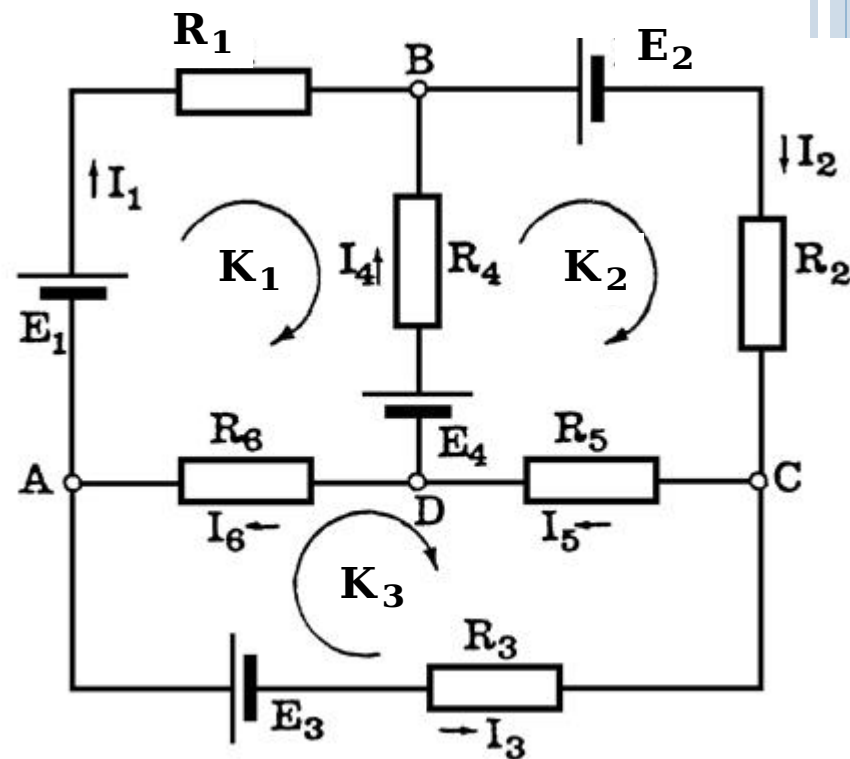
$$I_6 = I_{k1} - I_{k3}.$$



METODA KONTURNIH STRUJA - PRIMER

- Za kolo sa slike potrebno je napisati $n_k = n_g - (n_{\check{c}} - 1) = 3$ jednačine.
- $R_{11}I_{k1} + R_{12}I_{k2} + R_{13}I_{k3} = E_{k1}$
- $R_{21}I_{k1} + R_{22}I_{k2} + R_{23}I_{k3} = E_{k2}$
- $R_{31}I_{k1} + R_{32}I_{k2} + R_{33}I_{k3} = E_{k3}$

- Sopstvene otpornosti su
 $R_{11} = R_1 + R_4 + R_6,$
 $R_{22} = R_2 + R_4 + R_5,$
 $R_{33} = R_3 + R_5 + R_6.$
- Međusobne otpornosti su
 $R_{12} = R_{21} = -R_4,$
 $R_{13} = R_{31} = -R_6,$
 $R_{23} = R_{32} = -R_5.$



- Za kolo sa n_{Ig} idealnih strujnih generatora treba napisati $n_k - n_{Ig} = n_g - (n_{\check{c}} - 1) - n_{Ig}$ jednačina.
- Preostalih n_{Ig} jednačina su trivijalne jednačine oblika
$$I_{ki} = I_{gi}, \quad i = 1, 2, \dots, n_{Ig}$$
- Neophodno je provući jednu i samo jednu konturu kroz jedan idealni strujni generator!!!
- Prvo odabrati n_{Ig} kontura od kojih svaka prolazi samo kroz jedan strujni generator i za njih napisati jednačine oblika $I_{ki} = I_{gi}$.
- A zatim napisati preostalih $n_k - n_{Ig}$ jednačina po MKS **birajući konture koje nikako ne smeju da prođu ni kroz jedan strujni generator!**
- Dimenzija sistema jednačina po MKS je i dalje $n_k = n_g - (n_{\check{c}} - 1)$ i postoji isto toliko konturnih struja, samo se ne pišu sve jednačine sistema već se umesto njih pišu jednačine oblika $I_{ki} = I_{gi}$.

- Potpuni sistem jednačina po MKS je

$$(1) (R_1 + R_3 + R_4)I_{k1} - R_3I_{k2} + (R_3 + R_4)I_{k3} = E_1 + E_4,$$

$$(2) I_{k2} = I_{g5},$$

$$(3) I_{k3} = I_{g6}.$$

- Sistem se rešava po jedinoj nepoznatoj struji I_{k1} .

- Dalje su struje u granama

$$I_1 = I_{k1},$$

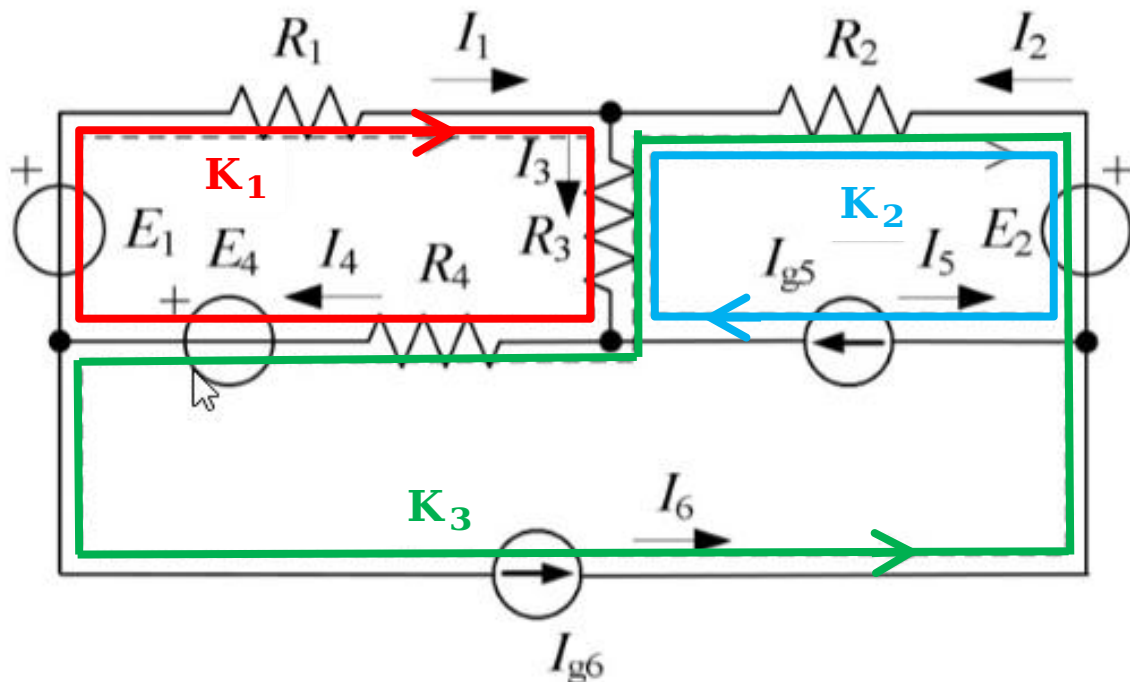
$$I_2 = I_{g6} - I_{g5},$$

$$I_3 = I_{k1} - I_{g5} + I_{g6},$$

$$I_4 = I_{k1} + I_{g6},$$

$$I_5 = -I_{g5},$$

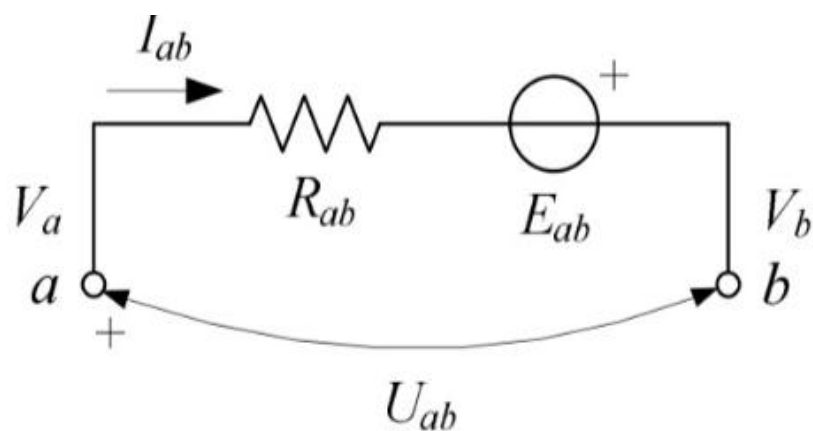
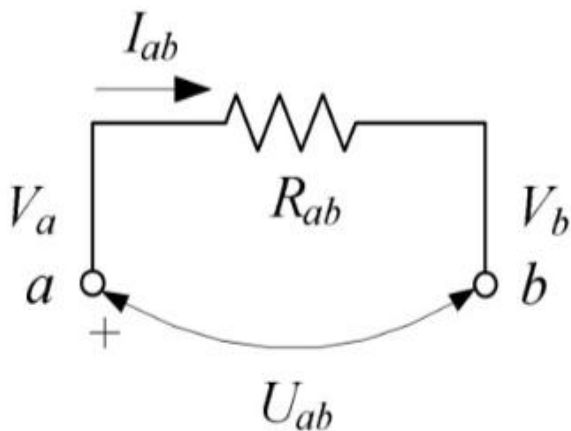
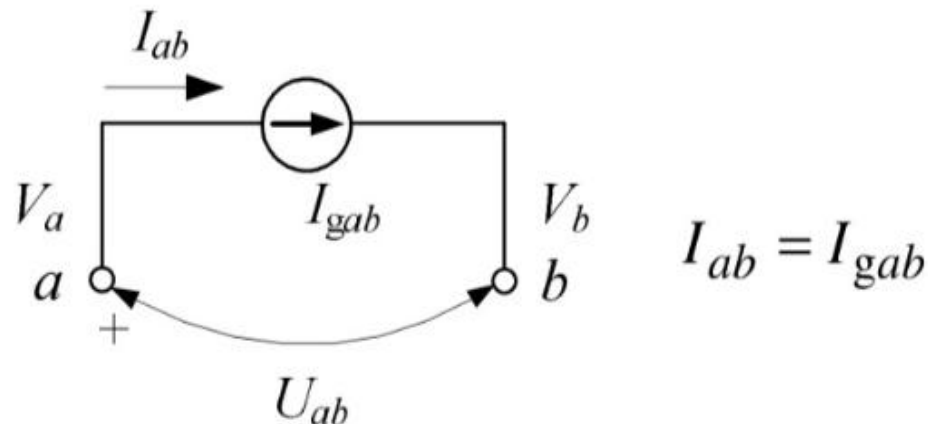
$$I_6 = I_{g6}.$$



- Broj jednačina u sistemu n_g se može redukovati i tako što se izbegne pisanje jednačina po II KZ čime se dobija **metoda napona između čvorova (MNČ)** ili **metoda potencijala čvorova (MPČ)**.
- Pisanje jednačina po II KZ se može izbeći ako su te jednačine “automatski zadovoljene” što se postiže pisanjem sistema jednačina po potencijalima čvorova kola.
- U kolu postoji $n_{\check{c}} - 1$ nezavisnih potencijala čvorova, te se može napisati isto toliko jednačina po I KZ.
- Ako se na neki način sve struje u jednačinama po I KZ izraze preko potencijala čvorova, dobio bi se potpuni sistem jednačina dimenzije $n_{\check{c}} - 1$.
- Kako sve struje izraziti preko potencijala čvorova???

METODA POTENCIJALA ČVOROVA

- Kako sve struje izraziti preko potencijala čvorova???



$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{R_{ab}} = \frac{V_a - V_b}{R_{ab}}$$

$$I_{ab} = \frac{U_{ab} + E_{ab}}{R_{ab}} = \frac{V_a - V_b + E_{ab}}{R_{ab}}$$

- Jednačine po MPCČ za kolo bez idealnih naponskih generatora se u opštem obliku mogu zapisati kao

$$G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \dots + G_{1(n_{\check{c}}-1)}V_{(n_{\check{c}}-1)} = I_{\check{c}1}$$

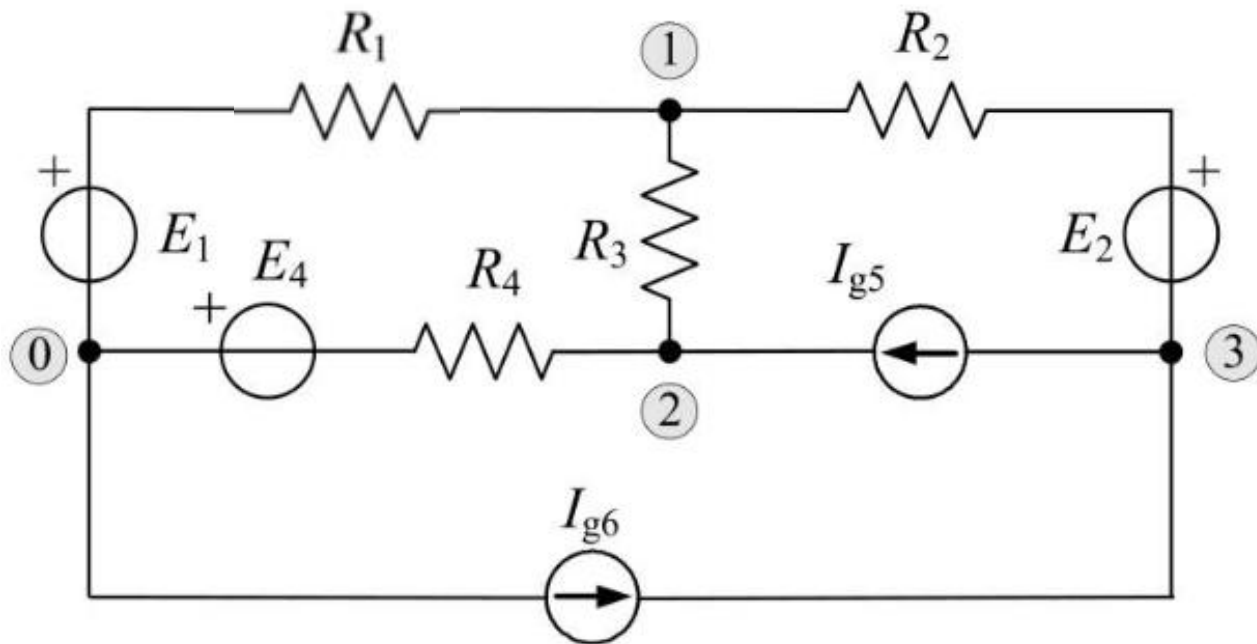
$$G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \dots + G_{2(n_{\check{c}}-1)}V_{(n_{\check{c}}-1)} = I_{\check{c}2}$$

⋮

$$G_{(n_{\check{c}}-1)1}V_1 + G_{(n_{\check{c}}-1)2}V_2 + \dots + G_{(n_{\check{c}}-1)(n_{\check{c}}-1)}V_{(n_{\check{c}}-1)} = I_{\check{c}(n_{\check{c}}-1)}$$

- Gde je $n_{\check{c}}$ broj čvorova u kolu.

- G_{ii} , $i=1,2,\dots,n_{\check{c}}-1$ su **sopstvene provodnosti čvora i** i jednake su zbiru provodnosti svih grana koje se stiču u i -tom čvoru (uzete uvek sa predznakom (+)).
- G_{ij} , $i,j=1,2,\dots,n_{\check{c}}-1$, $i \neq j$ su **međusobne provodnosti čvora i i čvora j** i jednake su zbiru provodnosti svih grana koje direktno povezuju ova dva čvora (uzete uvek sa predznakom (-)). Ukoliko čvorovi i i j nisu direktno povezani ili je u toj grani idealni strujni generator tada je $G_{ij}=0$. Očigledno je $G_{ji}=G_{ij}$.
- $I_{\check{c}i}$, $i=1,2,\dots,n_{\check{c}}-1$ je algebarski zbir struja svih idealnih strujnih generatora i ekvivalentnih realnih strujnih generatora koji se stiču u čvoru i . Ako je strujni generator okrenut prema čvoru **uzima se predznak (+)**, a **predznak (-)** ako je strujni generator okrenut od čvora.

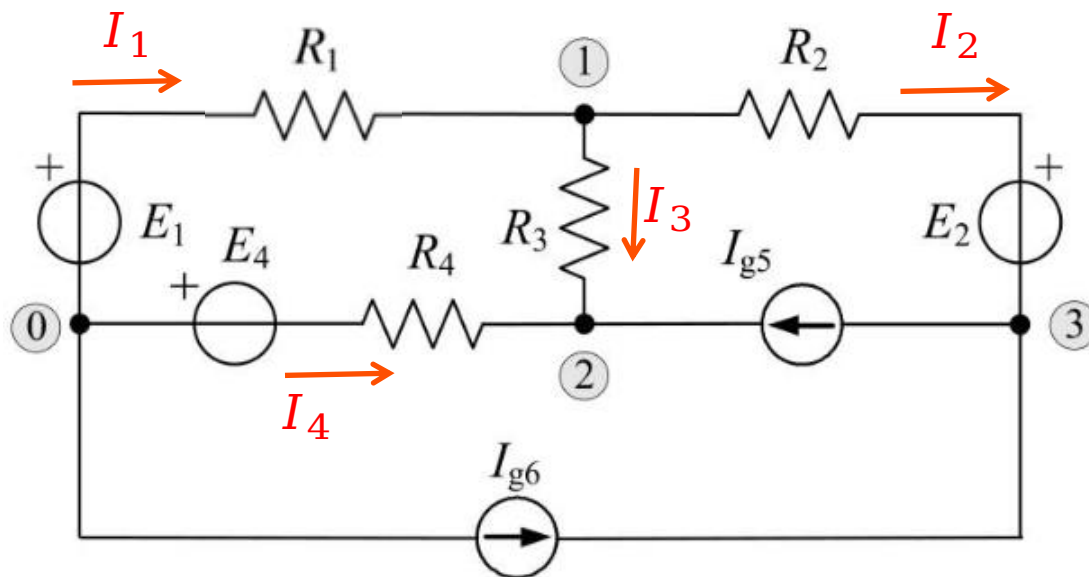


- Jednačine po MPC

$$(1) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_1 - \frac{1}{R_3} V_2 - \frac{1}{R_2} V_3 = + \frac{1}{R_1} E_1 + \frac{1}{R_2} E_2$$

$$(2) - \frac{1}{R_3} V_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) V_2 - 0 \cdot V_3 = - \frac{1}{R_4} E_4 + I_{g5}$$

$$(3) - \frac{1}{R_2} V_1 - 0 \cdot V_2 + \frac{1}{R_2} V_3 = - \frac{1}{R_2} E_2 + I_{g6} - I_{g5}$$



- Struje u granama su

$$I_1 = \frac{U_{R1}}{R_1} = \frac{(E_1 + V_0) - (V_1)}{R_1} = \frac{E_1 - V_1}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{(V_1) - (E_2 + V_3)}{R_2} = \frac{V_1 - E_2 - V_3}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{V_1 - V_2}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{(V_2) - (-E_4 + V_0)}{R_4} = \frac{V_2 + E_4}{R_4}$$

- Kada u kolu postoje idealni naponski generatori, otpornosti tih grana su jednake 0 a odgovarajuće provodnosti grana sa idealnim naponskim generatorima su beskonačne. Zbog toga se **jednačine po metodi MPČ za čvorove u kojima se stiču grane sa idealnim naponskim generatorima ne mogu pisati!**
- Ako postoji **jedan ili više idealnih naponskih generatora koji su svi jednim svojim krajem povezani za referentni čvor**, tada se, slično kao kod MKS, može napisati redukovani skup jednačina.
- Za svaki čvor u kome se stiče grana sa idealnim naponskim generatorom, ne piše se jednačina po MPČ, već se piše jednačina oblika
$$V_i = E_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_E$$
- Gde je n_E broj grana koje sadrže samo idealne naponske generatore, a E_i su elektromotorne sile tih generatora. Ako je generator okrenut prema čvoru **uzima se predznak (+)**, a **predznak (-)** ako je generator okrenut od čvora (tj. prema referentnom čvoru).
- Dimenzija sistema jednačina po MPČ je i dalje $(n_{\check{c}} - 1)$ i postoji isto toliko potencijala čvorova, samo se ne pišu sve jednačine sistema, već se umesto njih pišu jednačine oblika $V_i = E_i$.

METODA POTENCIJALA ČVOROVA - PRIMER SA E

36

- Kolo sa slike ima **idealni naponski generator** između čvorova 0 i 1.
- Dimenzija sistema je $n_{\check{c}} - 1 = 4 - 1 = 3$, jer toliko ima nezavisnih potencijala, ali se jednačina za čvor 1 ne piše po MPC

$$1: V_1 = E_1$$

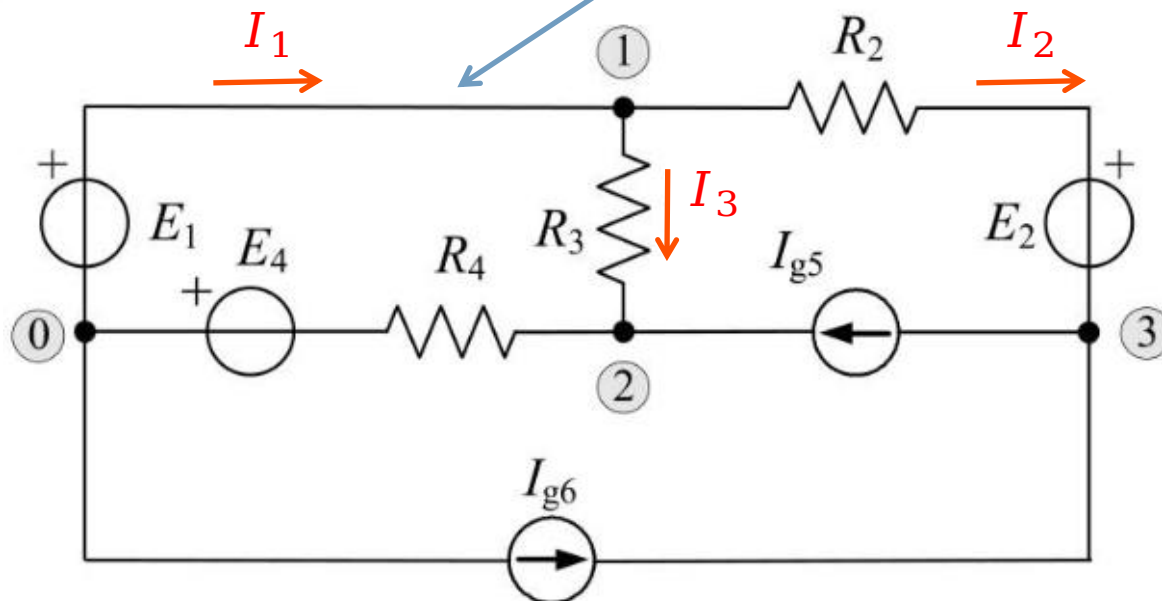
$$2: -\frac{1}{R_3}V_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 = -\frac{E_4}{R_4} + I_{g5},$$

$$3: -\frac{1}{R_2}V_1 + \frac{1}{R_2}V_3 = -\frac{E_2}{R_2} - I_{g5} + I_{g6}.$$

Kako izračunati struju kroz E_1 ?

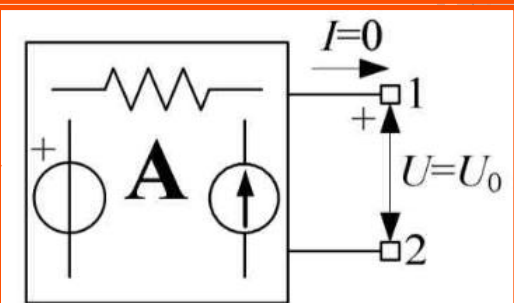
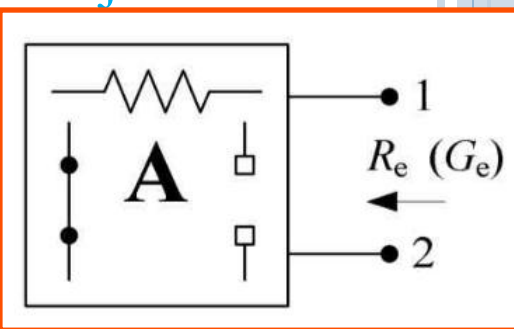
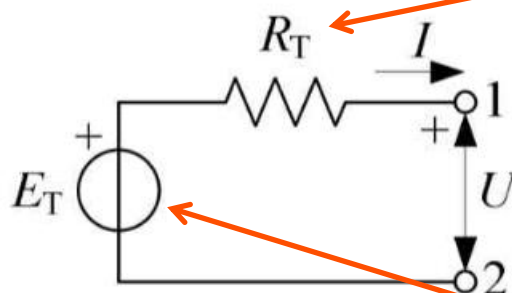
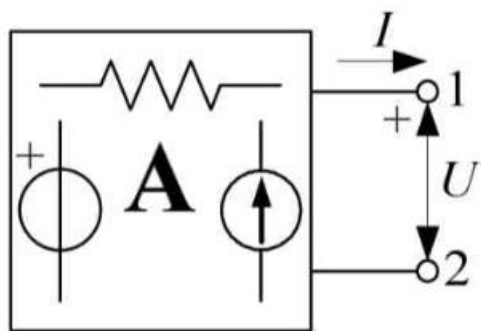
$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{V_1 - (E_2 + V_3)}{R_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_3}$$



TEVENENOVA TEOREMA

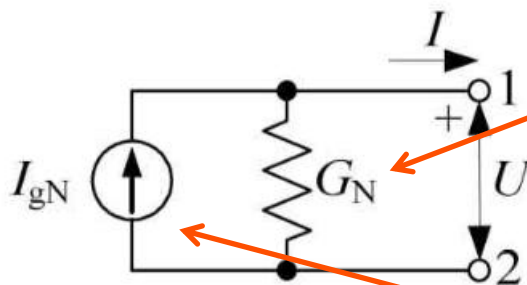
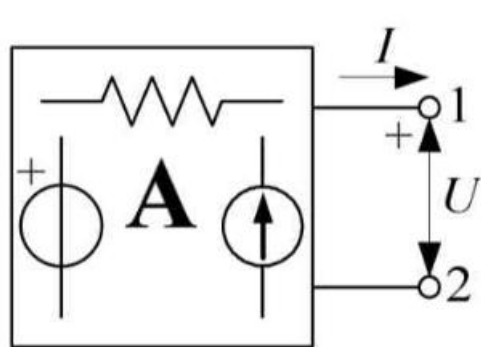
- Deo linearnog kola između dva čvora se može zameniti
 - realnim naponskim generatorom - Tevenenova teorema ili
 - realnim strujnim generatorom - Nortonova teorema.
- **Tevenenova teorema:** Mreža A između priključaka 1 i 2 se može zameniti realnim naponskim generatorom, čija je
 - elektromotorna sila jednaka naponu između otvorenih priključaka 1 i 2: $E_T = U_0$,
 - unutrašnja otpornost je jednaka ekvivalentnoj otpornosti između priključaka 1 i 2: $R_T = R_e$, kada su svi generatori isključeni.



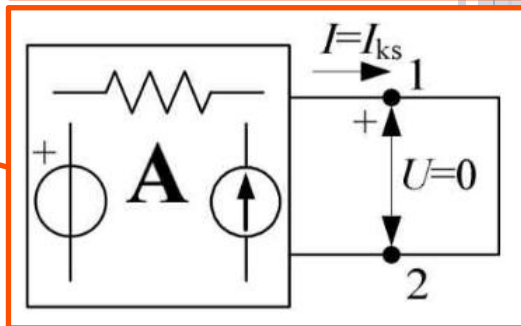
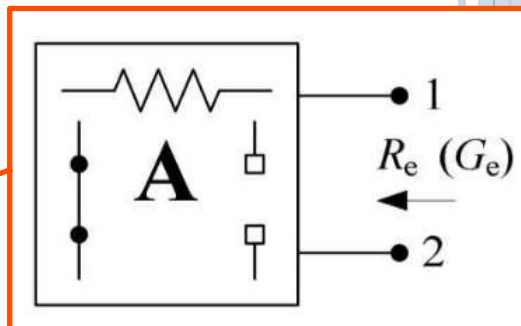
Pazi na referentne smerove!!!

TEVENENOVA TEOREMA

- **Nortonova teorema**: Mreža A između priključaka 1 i 2 se može zameniti realnim strujnim generatorom čija je
 - struja jednaka struji kratkog spoja priključaka 1 i 2: $I_{gN} = I_{KS}$,
 - unutrašnja provodnost je jednaka ekvivalentnoj provodnosti između priključaka 1 i 2: $G_T = G_e$, kada su svi generatori isključeni.
- Nortonova i Thevenenova teorema su **dualne**.
 - Thevenenov generator se može transformisati u strujni Nortonov generator: $I_{gN} = E_T / R_T$, $G_N = 1 / R_T$.
 - Važi i obrnuto: $E_T = I_{gN} / G_N$, $R_T = 1 / G_N$.

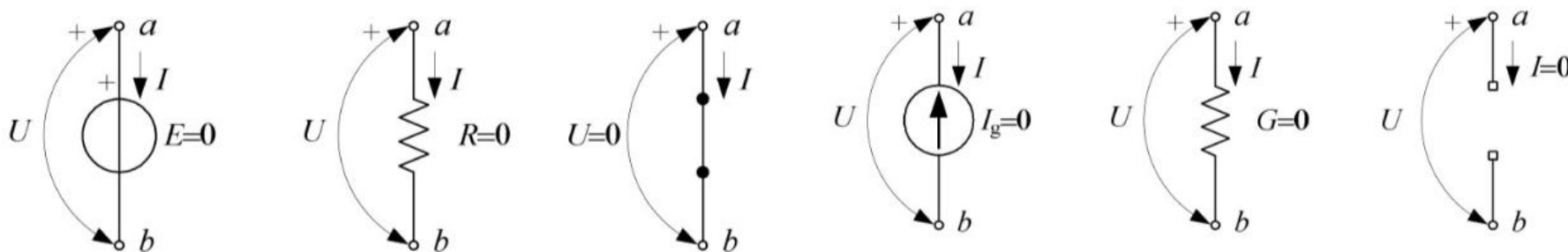


Pazi na referentne smerove!!!



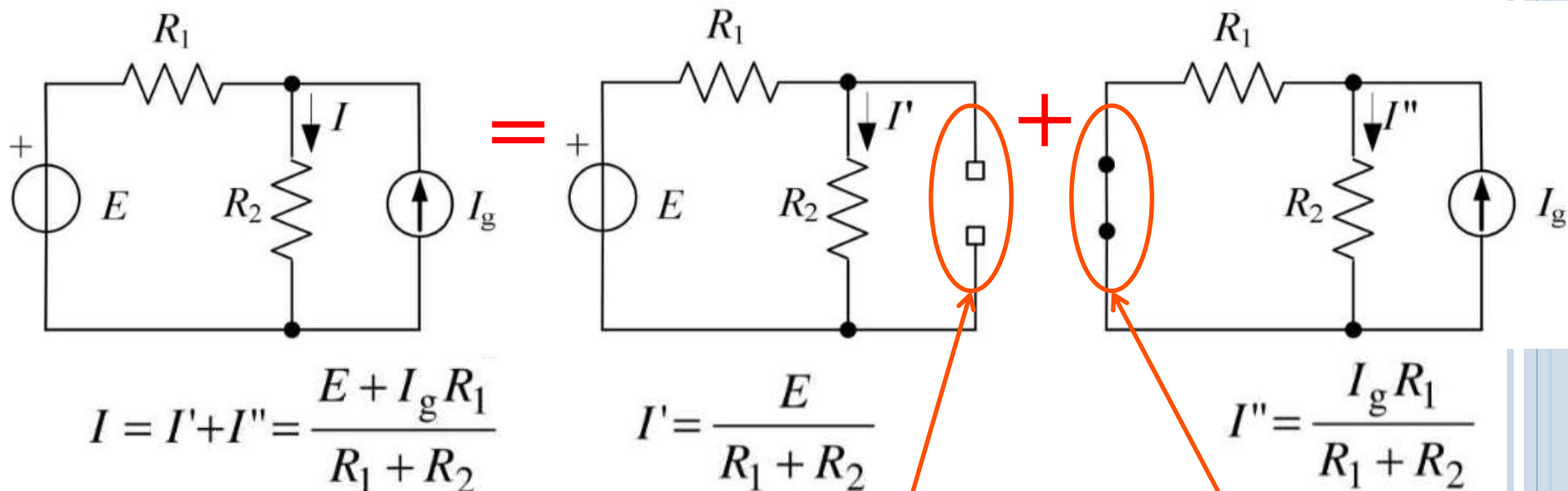
TEOREMA SUPERPOZICIJE

- **Teorema superpozicije:** Bilo koji odziv kola (napon između bilo koja dva čvora ili struja bilo koje grane) se može dobiti kao zbir (superpozicija) odziva na svaku pojedinačnu pobudu.
- Primjenjuje se na linearno kolo u kome deluje više pobuda (naponskih ili strujnih generatora).
- Ima smisla ako se kola sa jednom pobudom jednostavno rešavaju.
- Da bi se odredio odziv na samo jednu pobudu, sve ostale pobude se moraju anulirati:
 - za idealni naponski generator $E=0 \Rightarrow$ **kratak spoj**, ako je generator realni i ima R_u ova otpornost ostaje.
 - za idealni strujni generator $I_g=0 \Rightarrow$ **otvorena veza**, ako je generator realni i ima G_u ova provodnost ostaje.



TEOREMA SUPERPOZICIJE - PRIMER

- U kolu sa slike odrediti struju I u grani sa otpornikom R_2 .

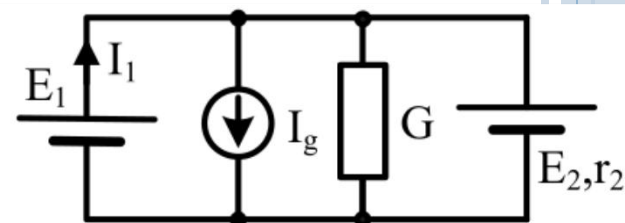


Ukidanje
strujnog
generatora

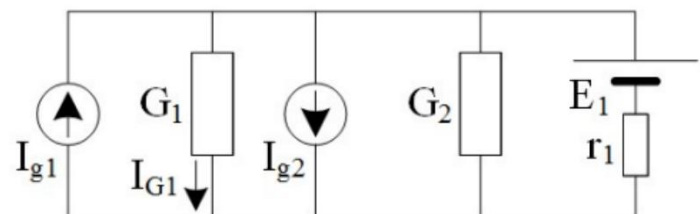
Ukidanje
naponskog
generatora

- ... videti primere sa teorijskih ispita ...

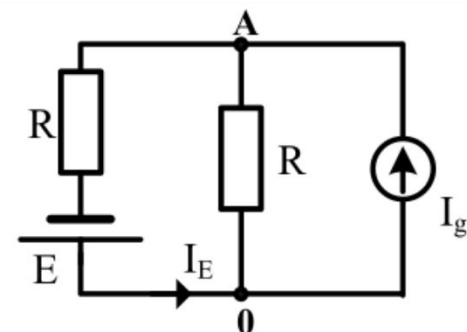
4. (7 poena) U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E_1 , I_g , G , E_2 i r_2 . Odrediti struju I_1 kroz generator E_1 .



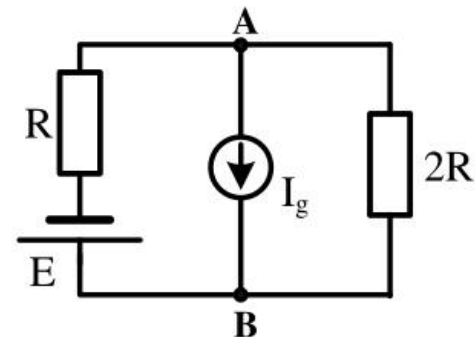
4. (7 poena) U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E_1 , I_{g1} , I_{g2} , G_1 , G_2 i r_1 . Odrediti struju I_{G1} .



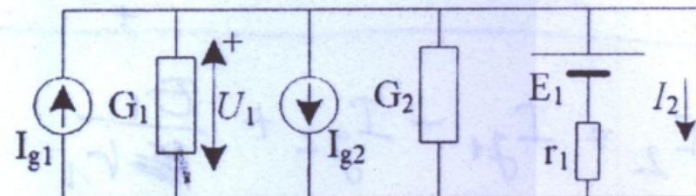
3. U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E , I_g i R . Primenom metode potencijala čvorova, odrediti najpre izraz za potencijal čvora A, a zatim i izraz za struju I_E koja protiče kroz generator E u smeru označenom na slici. (6 poena)



3. U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E , I_g i R . Primenom metode konturnih struja, odrediti najpre struju kroz otpornik $2R$, a zatim odrediti snagu koja se razvija na ovom otporniku. (6 poena)



4. (7 poena) U električnom kolu poznati su i prikazani na slici parametri svih elemenata. Odrediti napon U_1 i intenzitet struje I_2 .

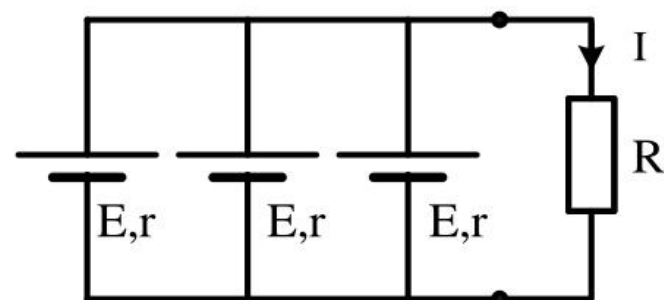


4. Tri identična realna naponska generatora, poznatih parametara E i r , povezana su paralelno, a zatim je na njih povezan potrošač poznate otpornosti R .

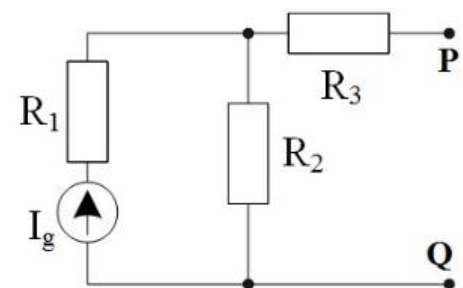
a) Primenom metode potencijala čvorova odrediti struju kroz potrošač.

(5 poena)

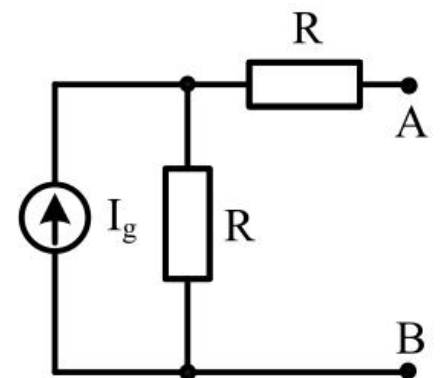
b) Odrediti izraz za struju potrošača, ako je paralelno povezano N identičnih generatora. (2 poena)



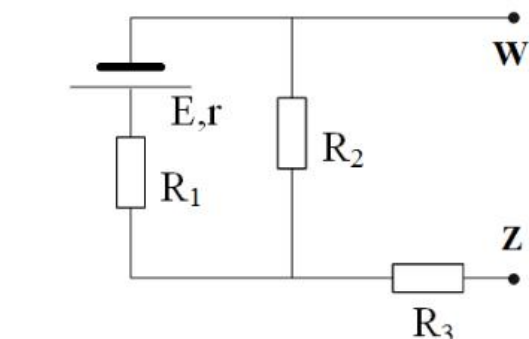
3. (6 poena) Za kolo na slici, između tačaka P i Q, nacrtati ekvivalentni Thevenenov generator i odrediti njegove parametre. Poznate su vrednosti parametara: I_g , R_1 , R_2 i R_3 .



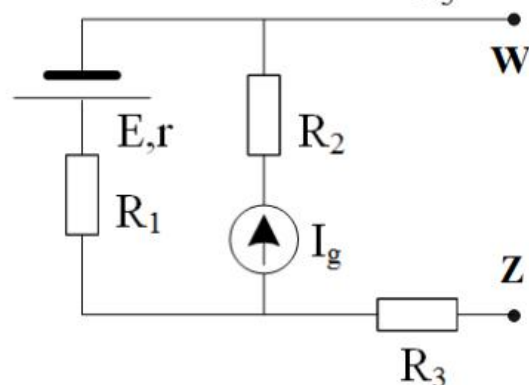
3. (6 poena) Za kolo na slici, primenom Thevenenove teoreme, odrediti parametre ekvivalentnog realnog naponskog generatora između tačaka A i B. Poznate su vrednosti parametara: I_g i R .



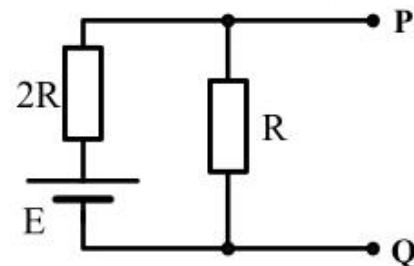
3. (6 poena) Za kolo na slici, između tačaka W i Z, nacrtati ekvivalentni Thevenenov generator i odrediti njegove parametre. Poznate su vrednosti parametara: E , r , R_1 , R_2 i R_3 .



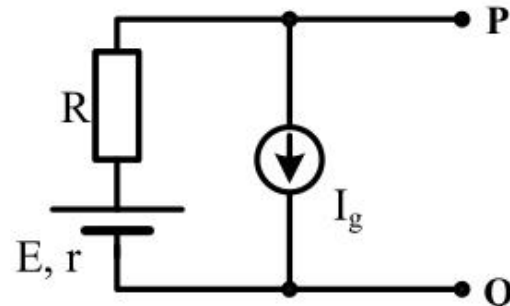
3. Za kolo na slici, između tačaka W i Z, nacrtati ekvivalentni Nortonov generator i odrediti njegove parametre I_N i G_N . Poznate su vrednosti parametara: E , r , I_g , R_1 , R_2 i R_3 . **(6 poena)**



3. Za kolo na slici, između tačaka P i Q, nacrtati ekvivalentni Nortonov generator i odrediti njegove parametre. Poznate su vrednosti parametara: E i R . **(6 poena)**

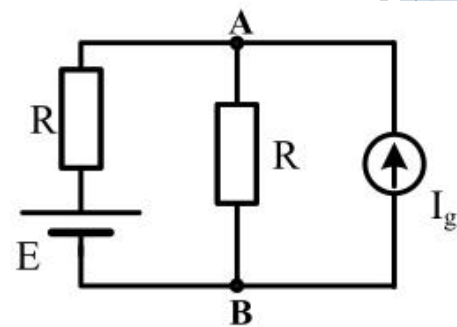


4. Za kolo na slici, između tačaka P i Q, nacrtati ekvivalentni Nortonov generator i odrediti njegove parametre I_N i G_N . Poznate su vrednosti parametara: E , r , I_g i R . **(7 poena)**



- ... videti primere sa teorijskih ispita ...

4. U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E , I_g i R .
Primenom **teoreme superpozicije**, odrediti napon U_{AB} . (7 poena)



4. (7 poena) U električnom kolu na slici poznate su vrednosti parametara: E , I_g , R_1 i R_2 . Primenom metode superpozicije odrediti intenzitet struje I_X .

