

UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

ELEKTROTEHNIKA

- ŠKOLSKA 2025/2026 -

3. MAGNETIZAM

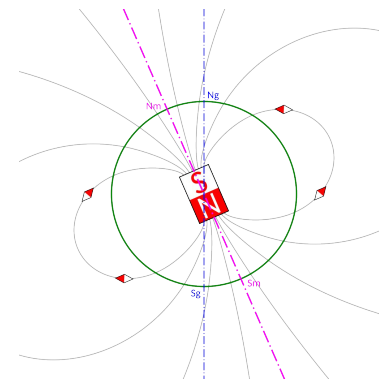
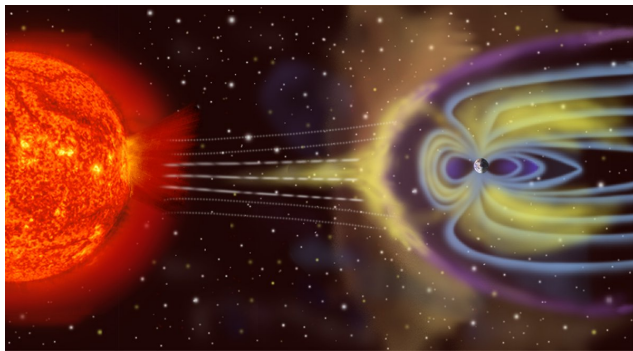
– POLJE , SILA I MOMENT –

OSNOVNI POJMOVI MAGNETNOG POLJA

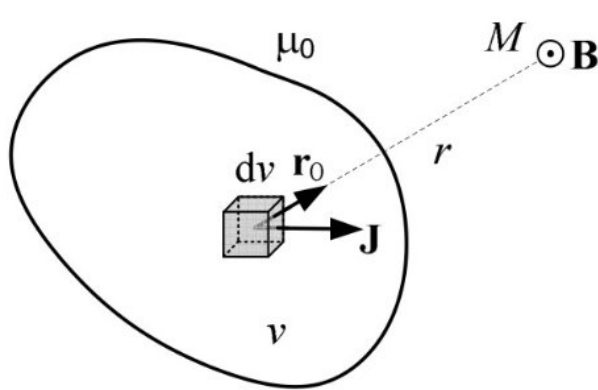
- U okolini naelektrisanja koja se organizovano kreću (na primer kada postoji struja u provodnicima) postoji **magnetno (magnetsko) polje**.
- Magnetno polje deluje na naelektrisanja koja se kreću!
- U okolini svakog provodnika sa strujom postoji magnetno polje.
- Na svaki provodnik sa strujom u magnetnom polju deluje magnetna sila.
- Magnetno polje jednosmernih (stalnih, konstantnih) struja je konstantno.
- Kod promenljivih struja menja se i magnetno polje tokom vremena u okolini provodnika.
- Promenljivo magnetno polje dovodi do pojave **elektromagnetne indukcije**.
- Dakle, promenljivo magnetno polje indukuje u provodnicima promenljivu elektromotornu silu.

OSNOVNI POJMOVI MAGNETNOG POLJA

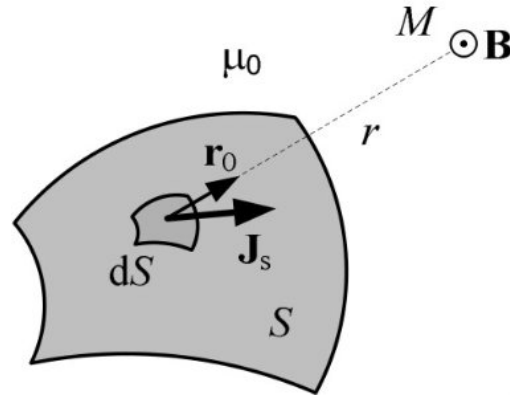
- Magnetno polje ima široke primene u tehnici:
 - Dizalice
 - Vozovi na magnetnom jastuku
 - Motori i generatori, transformatori
 - Releji, brave, zvona, zvučnici, senzori, ...
 - Akceleratori čestica, katodne cevi, ...
 - Računarski diskovi, magnetne kartice i magnetne trake
- Osnova je (uz električno polje) za analizu elektromagnetnih talasa na kojima počivaju značajne oblasti tehnike: kao što su telekomunikacije, mikrotalasna tehnika, optoelektronika i druge.
- Magnetno polje Zemlje ima značajnu uloga i u navigaciji, zaštiti Zemlje od sunčevog vetra, ...



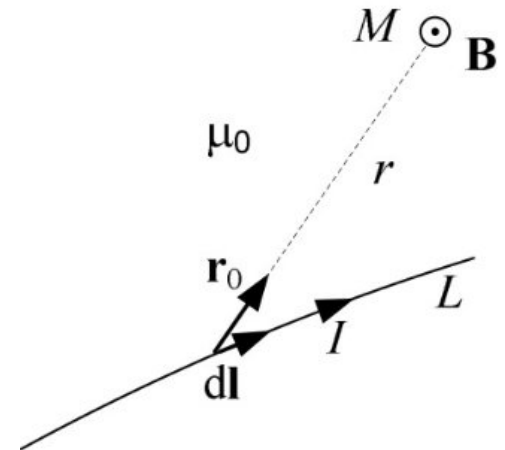
STRUJNI ELEMENTI I BIO-SAVAROV ZAKON



Strujni element
zapremnske struje
 $(\vec{J}d\vec{v})$



Strujni element
površinske struje
 $(\vec{J}_s d\vec{S})$



Strujni element
linijske struje
 $(I d\vec{l})$

- Napomena: vektori na slikama iznad su označeni fontom “**bold**”.
- Bio-Savarov zakon za linijske struje:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

VEKTORI MAGNETNOG POLJA

- **B** je vektor **magnetne indukcije**. Jedinica je **T (Tesla)**.
- **H** je vektor **jačine magnetnog polja** koji ne zavisi od sredine

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

- U **vakuumu** nema atoma koji bi se “namagnetisali”, tako da je

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

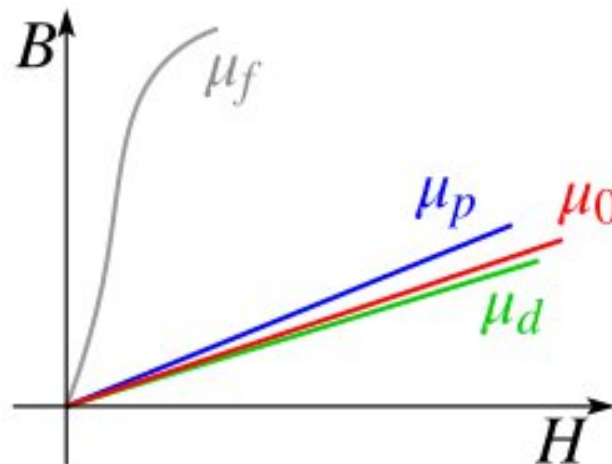
- Ako je **sredina linearna**, tada je (*slično kao i kod dielektriaka u električnom polju*)

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$
$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

- μ_r je broj bez dimenzija! Za vakuum i približno vazduh $\mu_r = 1$.
- $\mu = \mu_0 \mu_r$ je **magnetna permeabilnost** sredine i jedinica je (**H/m**) kao i za μ_0 .

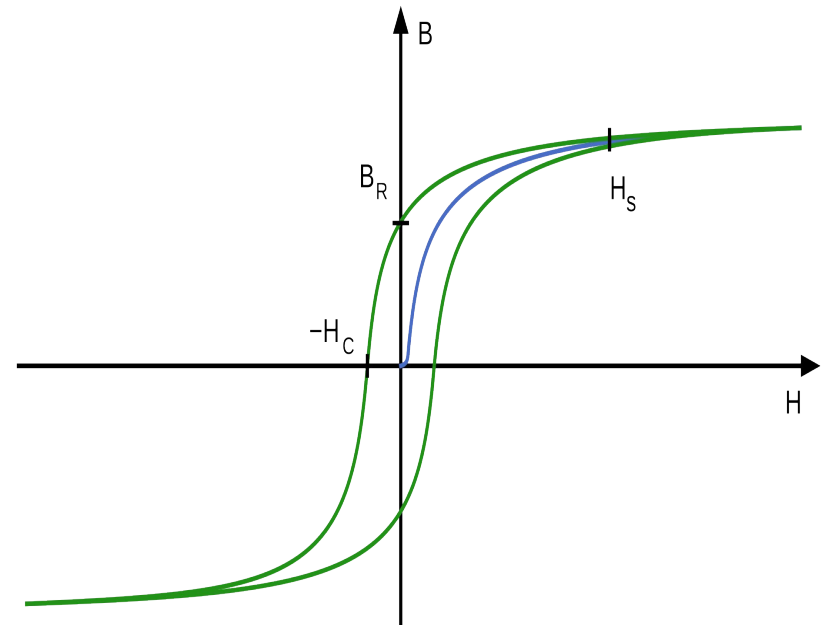
MAGNETNI MATERIJALI

- Magnetni materijali se mogu podeliti u tri kategorije:
 - Dijamagnetici (neznatno umanjuju spoljašnju pobudu $\mu_r < 1$),
 - Paramagnetici (neznatno povećavaju spoljašnju pobudu $\mu_r > 1$),
 - Feromagnetici (značajno povećavaju spoljašnju pobudu $\mu_r \gg 1$).
Kod feromagnetnih materijala zavisnost vektora B i H **nije linearna** (videti sliku ispod).
- Feromagnetici su od posebnog značaja jer se mogu koristiti za realizaciju veoma snažnih elektromagneta.
- Najvažniji feromagnetni materijali su **gvožđe, kobalt i nikal**.



MAGNETNI MATERIJALI

- Grafik magnetne indukcije B pri porastu i opadanju jačine polja H nije isti. Ova pojava naziva se **magnetni histerezis**.
- Pri potpunom ukidanju spoljašnjeg polja ($H=0$) ostaje izvesna magnetizacija, odnosno magnetna indukcija B nije nula, pa se materijal namagnetisao. Ova vrednost se naziva **remanentna (zaostala, preostala) magnetna indukcija**.
- A ako su histerezis i remanentna indukcija veliki, od tih materijala se mogu praviti **stalni magneti**.

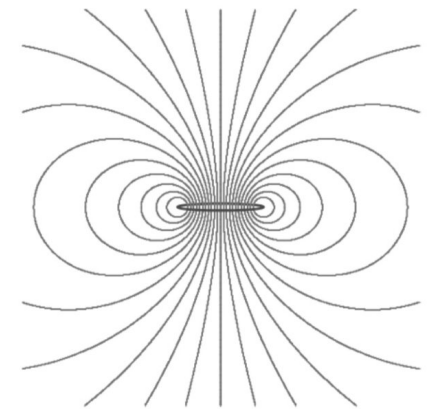
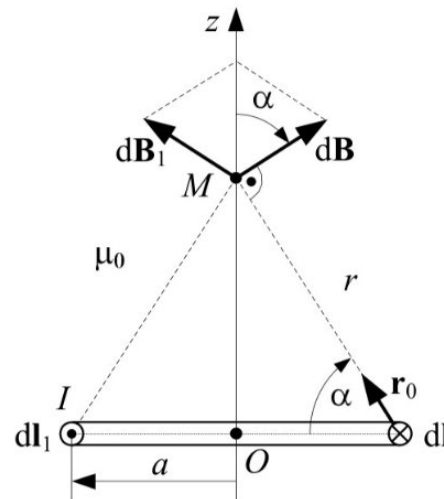
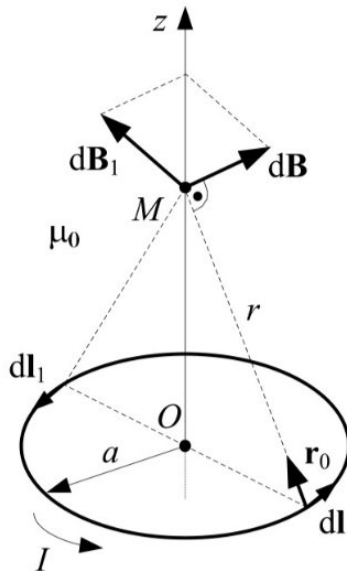
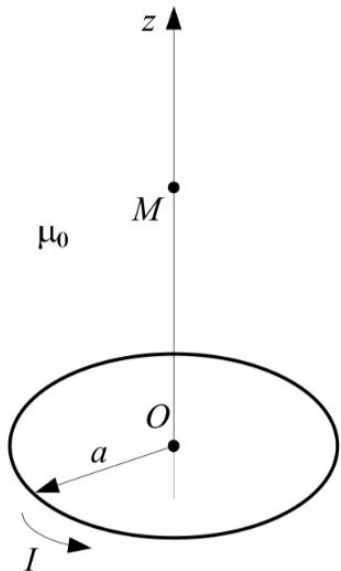


MAGNETNA INDUKCIJA KRUŽNE KONTURE

- Magnetna indukcija kružnog provodnika (konture) poluprečnika a sa strujom I na osi z koja prolazi kroz centar konture O izvodi se na sledeći način. Polazi se od Bio-Savarovog zakona

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

- Vektori $d\vec{l}$ i $\vec{r}_0$ su ortogonalni pa je vektorski proizvod jednak po modulu dl , a vektor $d\vec{B}$ sa osom z zaklapa ugao α kao na slici.



*Linije
magnetnog polja*

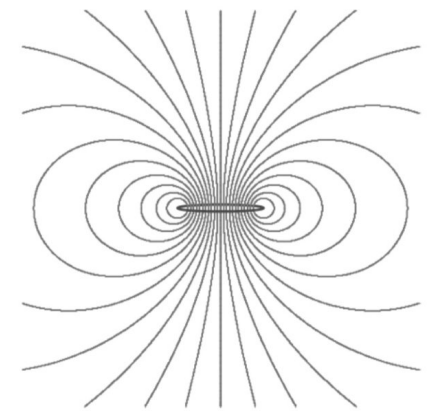
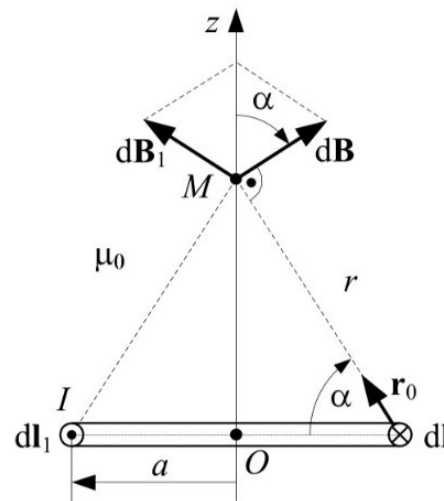
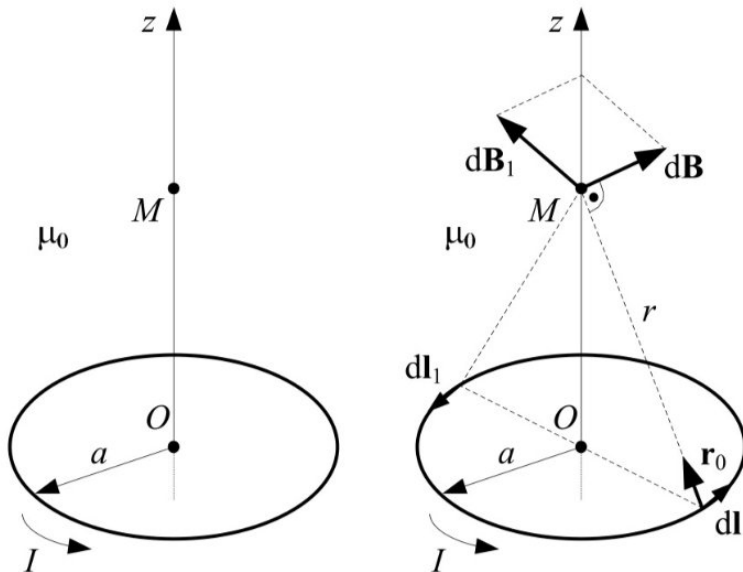
MAGNETNA INDUKCIJA KRUŽNE KONTURE

- Zbog simetrije, horizontalna komponenta vektora $\mathbf{B}$ će biti jednaka 0 pa ostaje samo vertikalna komponenta duž ose z

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos(\alpha)}{r^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{r^3} dl$$

- Integraljenjem po liniji konture se dobija

$$B_z = \int_L dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{r^3} \int_L dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{r^3} \implies B_z = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



Linije
magnetnog polja

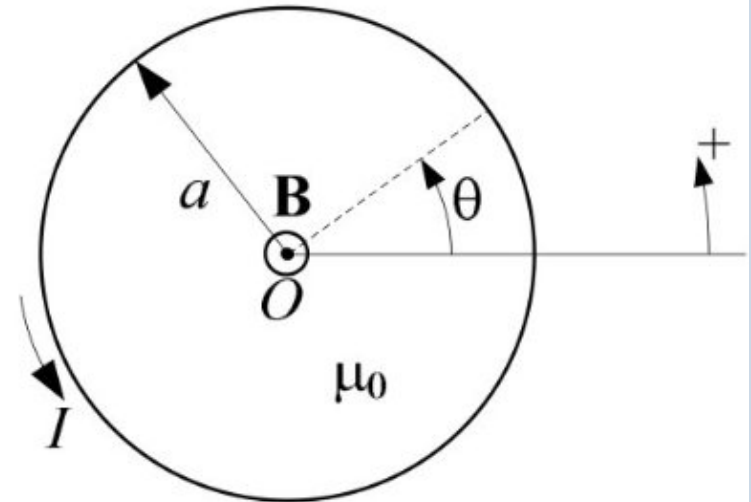
MAGNETNA INDUKCIJA KRUŽNE KONTURE

- Magnetna indukcija kružne konture poluprečnika a sa strujom I u centru konture O je

$$B_0 = B_z(z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

- Pravac vektora B_0 je upravan na konturu, a smer je određen pravilom desne zavojnice.
- U centru konture može se odrediti i magnetna indukcija od dela kružnog provodnika, tj. kružnog luka sa strujom I koji je određen uglom θ

$$B_0(\theta) = \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \frac{\theta}{2\pi}$$

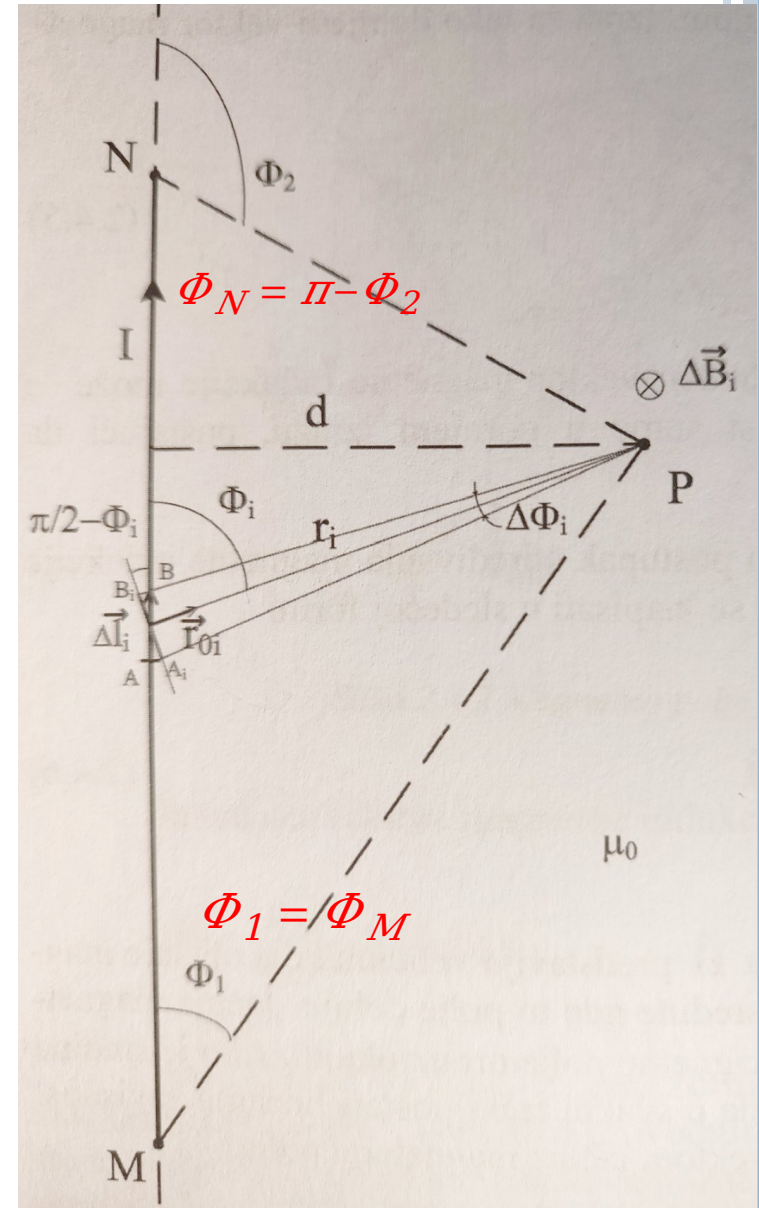


- Polazeći od Bio-Savarovog zakona, sumiranjem tj. integracijom po svim strujnim elementima od M do N se dobija

$$B = \int_M^N dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos(\Phi_1) - \cos(\Phi_2))$$

- Ili još zgodnije za primenu

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos(\Phi_M) + \cos(\Phi_N))$$

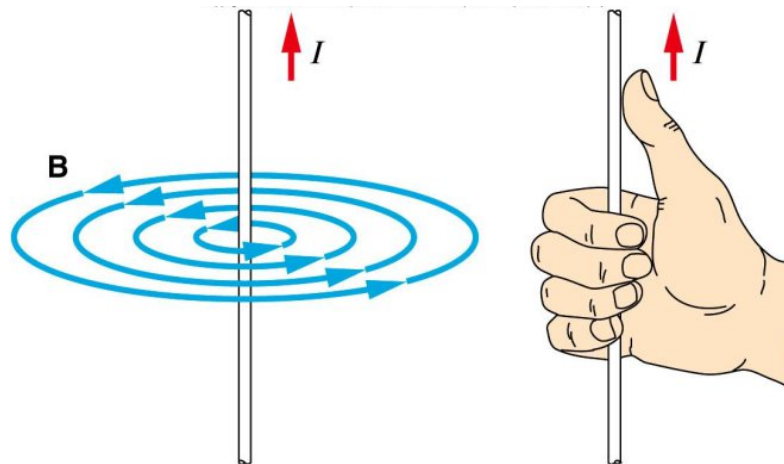


- Za beskonačni pravolinijski provodnik $\Phi_M = \Phi_N = 0$, pa je i $\cos(\Phi_M) = \cos(\Phi_N) = 1$, odnosno intenzitet vektora magnetne magnetne indukcije je

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos(0) + \cos(0))$$

- Odnosno

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$



MAG. SILA PRAVOLINIJSKIH PROVODNIKA

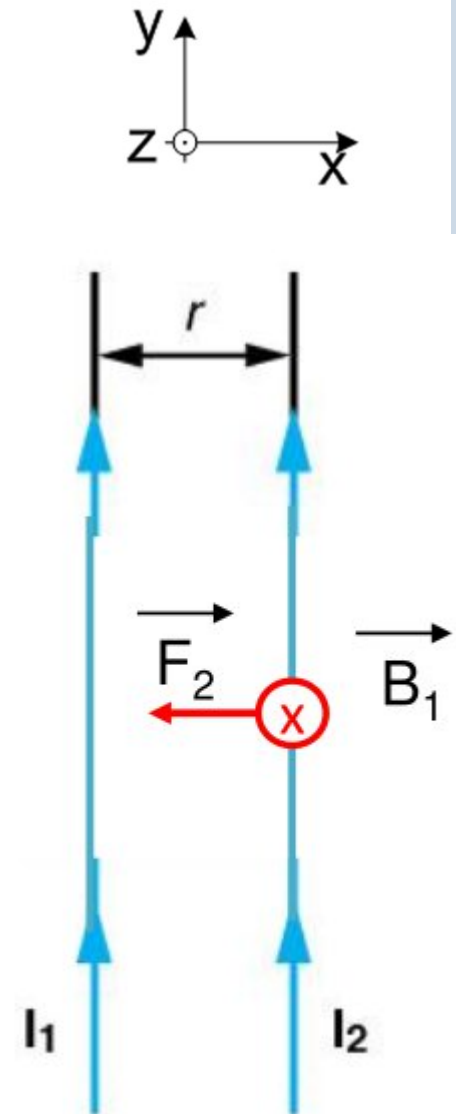
- Za pravolinijski provodnik dužine l sa strujom I u homogenom magnetnom polju čiji je vektor magnetne indukcije $\vec{B}$, magnetna sila koja deluje na provodnik je

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

- Vektor $\vec{l}$ ima pravac provodnika i smer struje u njemu.
- Pravolinijski provodnik sa strujom I_1 deluje na provodnik sa strujom I_2 **podužnom magnetnom silom** (silom po jediničnoj dužini, jedinica N/m)

$$\vec{F}'_2 = I_2 \vec{l}_{20} \times \vec{B}_1$$

- Gde je vektor $\vec{l}_{20}$ ort (jedinični vektor) koji ima pravac provodnika sa strujom I_2 i smer te struje.



MAG. SILA PRAVOLINIJSKIH PROVODNIKA

- Pravolinijski provodnik sa strujom I_1 deluje na provodnik sa strujom I_2 podužnom magnetnom silom (silom po jediničnoj dužini, jedinica N/m)

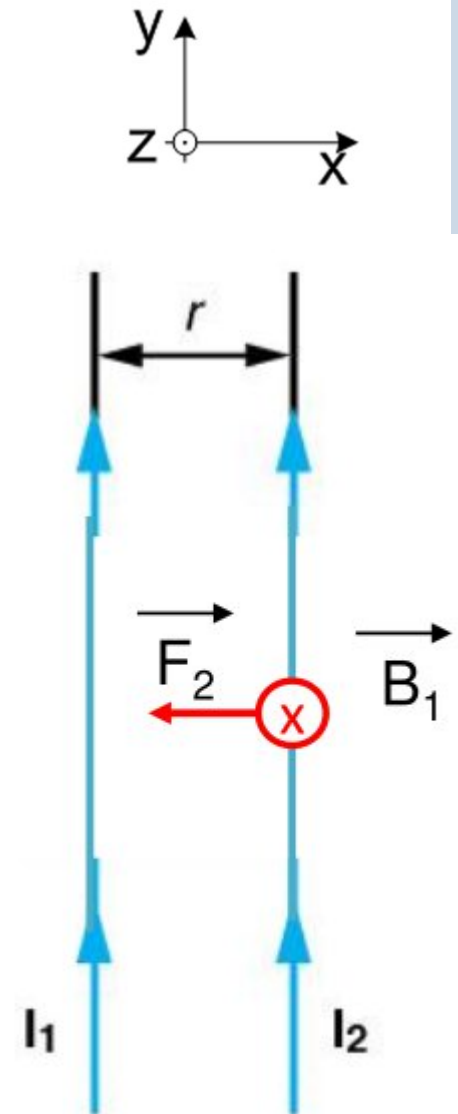
$$\vec{F}'_2 = I_2 \vec{l}_{20} \times \vec{B}_1$$

- Gde je vektor $\vec{l}_{20}$ ort (jedinični vektor) koji ima pravac provodnika sa strujom I_2 i smer te struje,
- A $\vec{B}_1$ je vektor magnetne indukcije provodnika sa strujom I_1 na mestu gde se nalazi provodnik sa strujom I_2 (na rastojanju r)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} (-\vec{k}), \quad \vec{l}_{20} = (\vec{j})$$

- Pa je podužna sila dva “beskonačna” provodnika u vazduhu

$$\vec{F}'_2 = I_2 \vec{l}_{20} \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} (-\vec{i}) \left[\frac{N}{m} \right]$$



FLUKS U MAGNETNOM POLJU

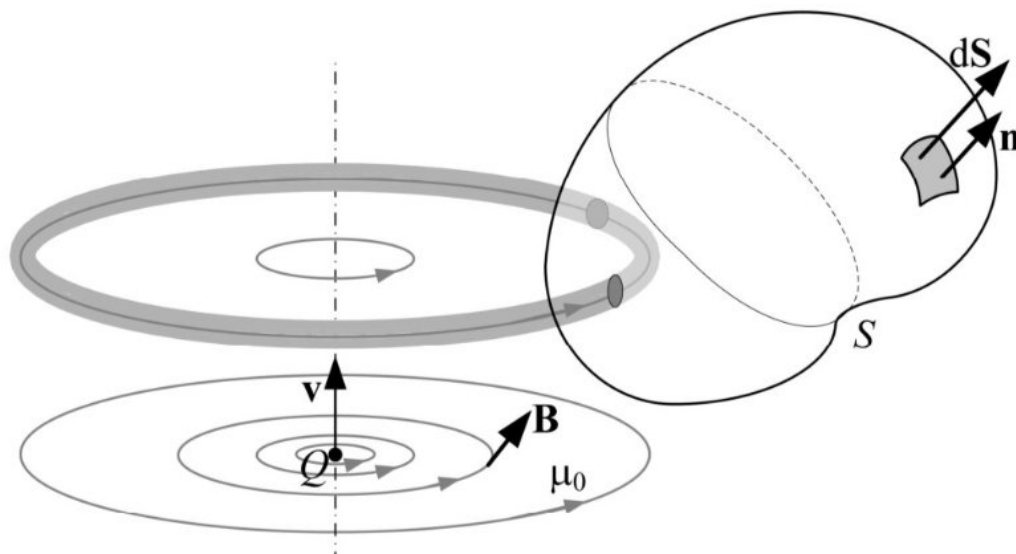
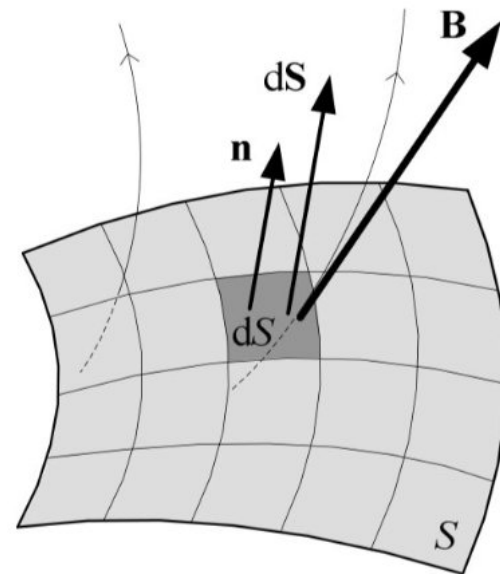
- **Magnetni fluks** se definiše kao fluks vektora magnetne indukcije kroz proizvoljnu površ S

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

- Jedinica za magnetni fluks je **Veber (Wb)**.

- **Kroz zatvorenu površ, magnetni fluks je jednak nuli !**

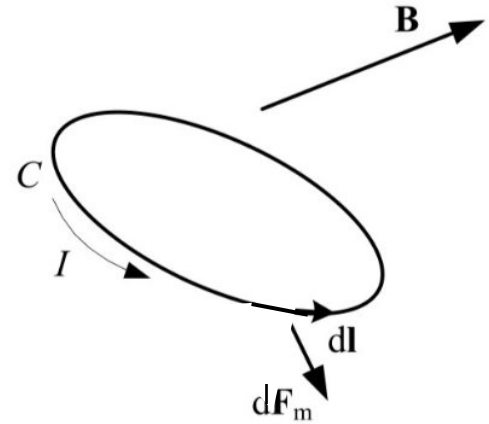
$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



MOMENT MAG. SILA NA KRUTU KONTURU

- Posmatramo **krutu strujnu konturu** C u **homogenom magnetnom polju** indukcije $\vec{B}$.
- Magnetna sila koja deluje na jedan strujni element konture je

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$$



- Rezultujuća sila na konturu jednaka nuli

$$\vec{F}_m = \int_C d\vec{F}_m = \int_C I d\vec{l} \times \vec{B} = I \left(\int_C d\vec{l} \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

MOMENT MAG. SILA NA KRUTU KONTURU

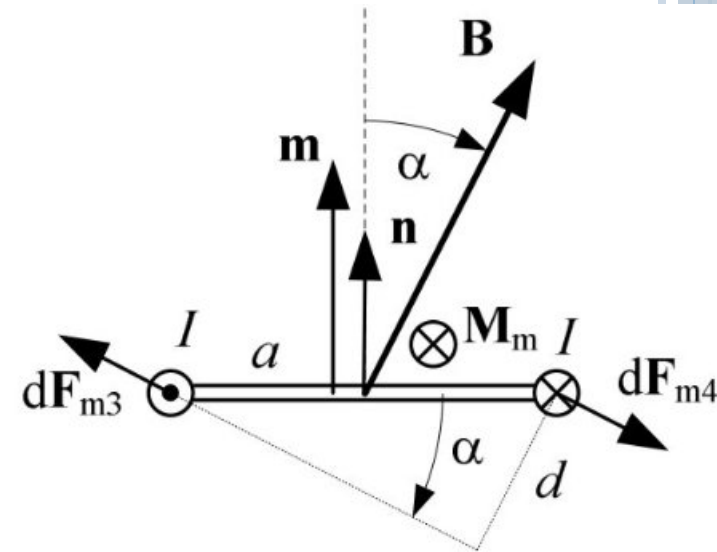
- Postoji speg magnetnih sila koje daju obrtni moment na konturu.
- Moment sila u odnosu koje teže da zarotiraju konturu može se odrediti kao

$$\overrightarrow{M_m} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{B}$$

- Gde je vektor ***m*** magnetni momenat konture, definisan kao

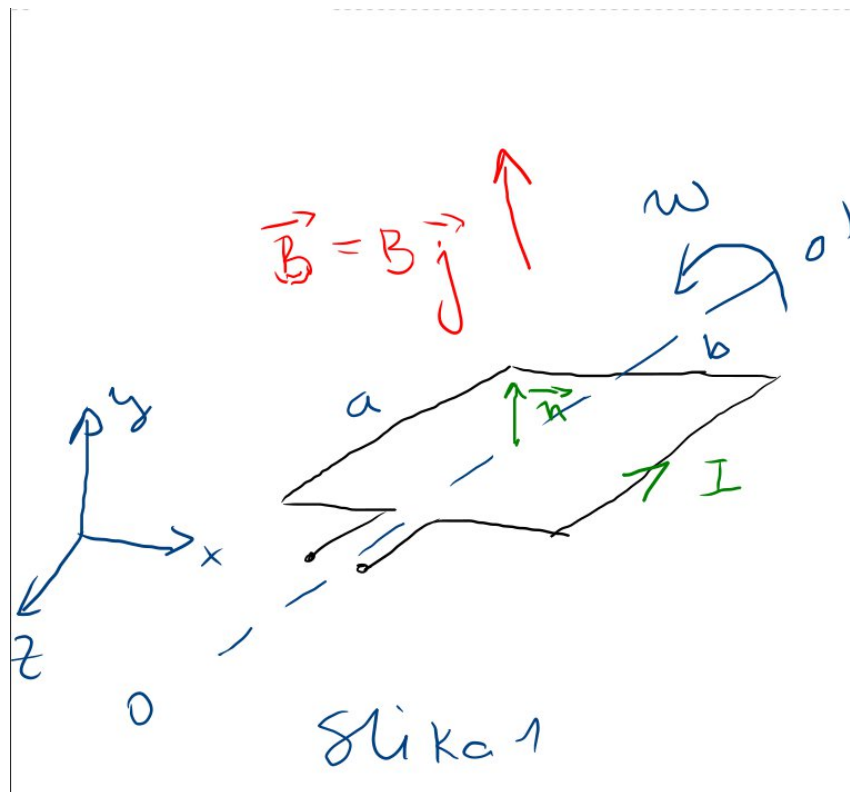
$$\overrightarrow{m} = I\overrightarrow{S} = IS\overrightarrow{n}$$

- ***S*** je vektor površi oslonjene na konturu, kome odgovara normala na površ ***n***, čiji je smer određen strujom po desnoj zavojnici.
- Moment teži da okrene konturu tako da ***m*** i ***B*** budu kolinearni.

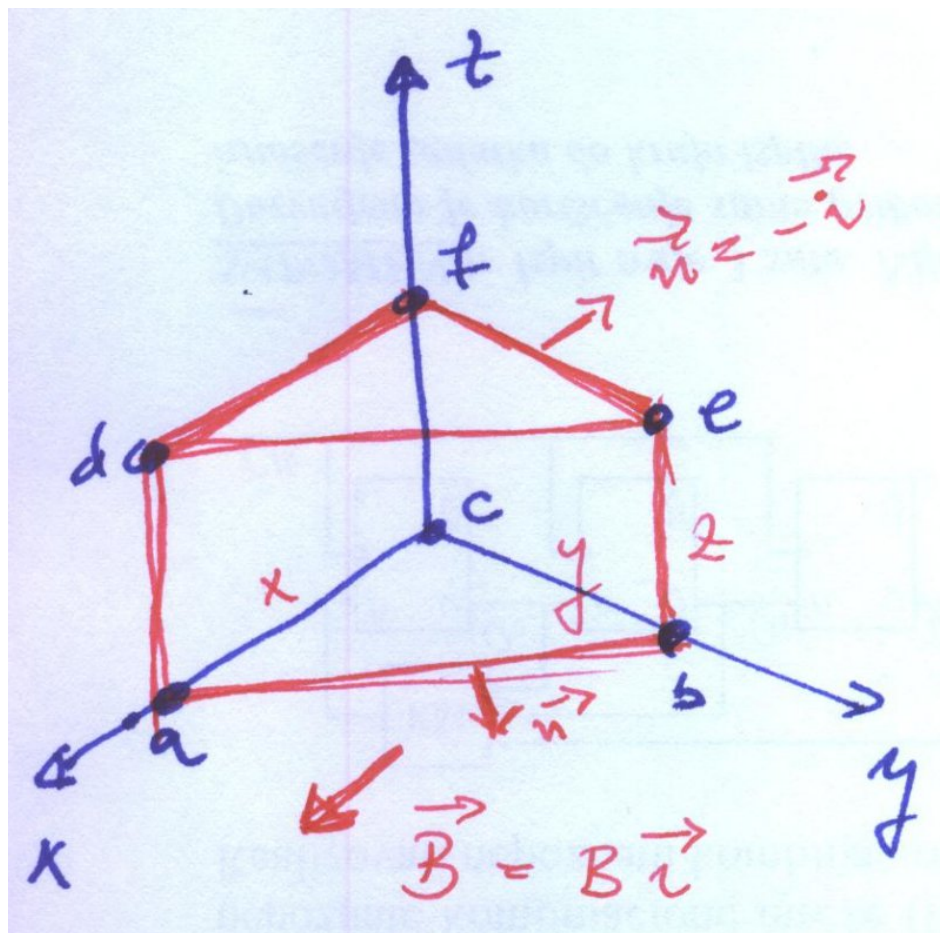


PRIMERI

- ... videti primere sa teorijskih ispita ...
- **Primer 1.** Odrediti magnetni fluks i moment magnetskih sila na pravougaonu konturu stranica a i b u homogenom magnetnom polju indukcije $\mathbf{B}$ (videti sliku). Pri tome vektor magnetne indukcije i ravan konture zahvataju proizvoljan ugao θ . Posebno prodiskutovati slučajeve kada je ugao jednak $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.



- **Primer 2.** Odrediti magnetni fluks kroz stranicu prizme (a-b-e-d) u homogenom magnetnom polju $\vec{B}$ (videti sliku).



- **Primer 3.** Odrediti magnetni fluks vektora $\mathbf{B}$ kroz polusferu S_1 u homogenom magnetnom polju (videti sliku).

