

UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

ELEKTROTEHNIKA

- ŠKOLSKA 2025/2026 -

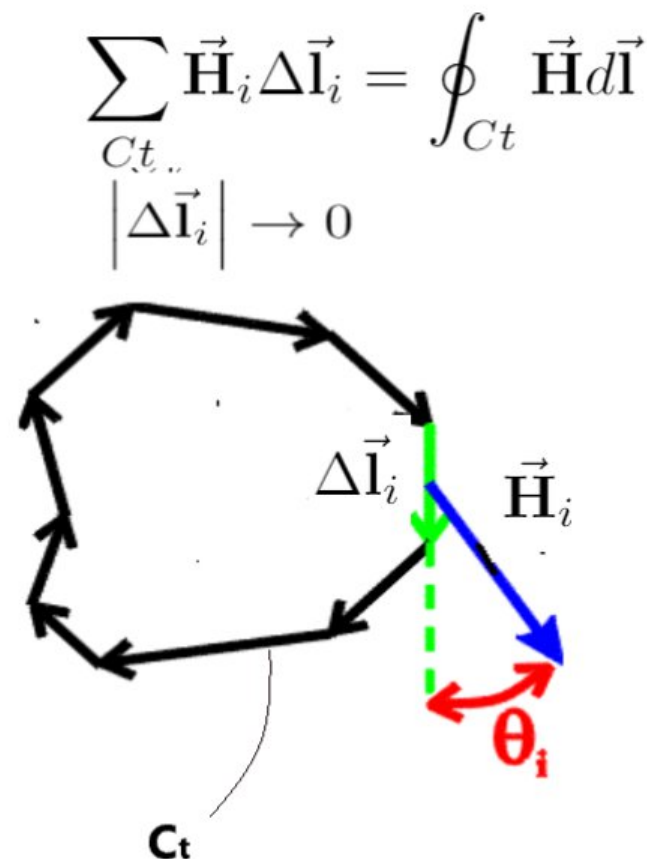
3. MAGNETIZAM
– MAG. KOLA, INDUKTIVNOST, ENERGIJA –

AMPEROV ZAKON (UKUPNE STRUJE)

- Cirkulacija vektora jačine magnetnog polja H po zatvorenoj konturi C_t jednaka je ukupnoj struji koja koja prodire kroz površ naleglu na tu konturu.
- Pozitivan znak za struje uzima se po pravilu desne zavoynice.

$$\oint_{C_t} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k$$

(kroz površ
naleglu na C_t)



PRIMER PRIMENE AMPEROVOG ZAKONA

- Primenom Amperovog zakona, odrediti vektor jačine magnetnog polja $\vec{H}$ beskonačnog pravolinijskog provodnika. Zatim, odrediti odgovarajući vektor magnetne indukcije $\vec{B}$. Provodnik se nalazi u sredini relativne magnetne permeabilnosti μ_r .

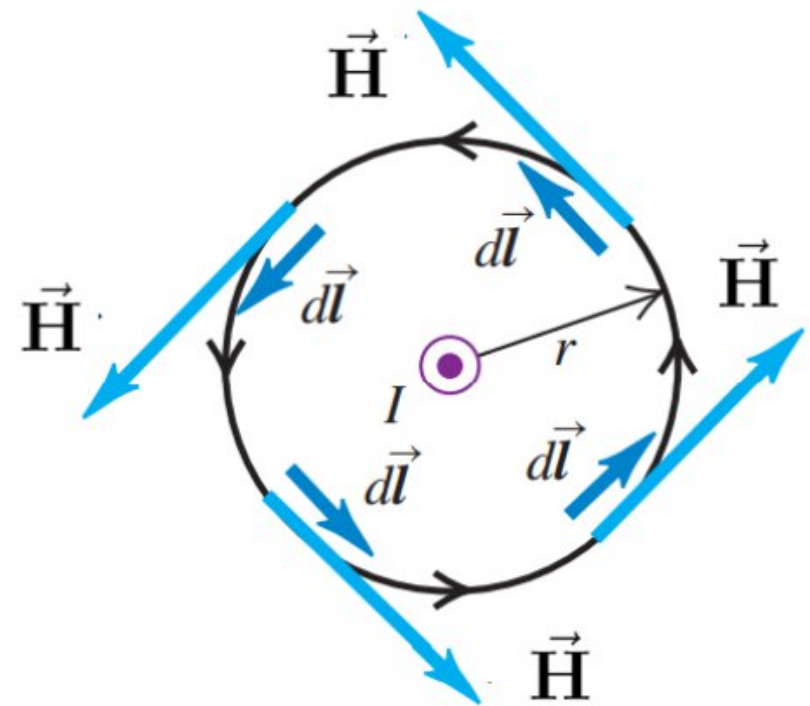
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$H \oint dl = I$$

$$H \cdot 2\pi r = I$$

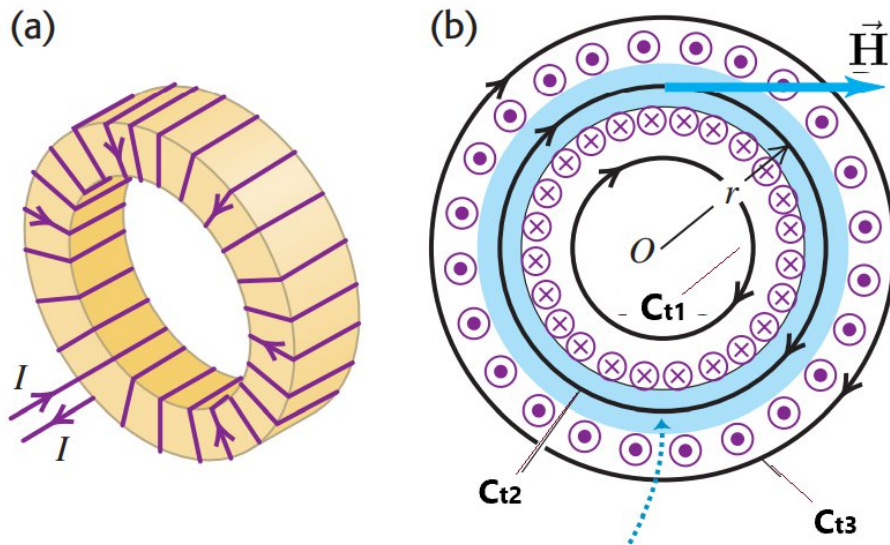
$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

- Dobija se naravno isti rezultat kao i iz Bio-Savarovog zakona.



MAGNETNA KOLA

- Magnetno kolo je tipično torus od feromagnetnog materijala (**jezgro**) na koga je namotano N navojaka (**namotaj**) provodnika sa strujom I .



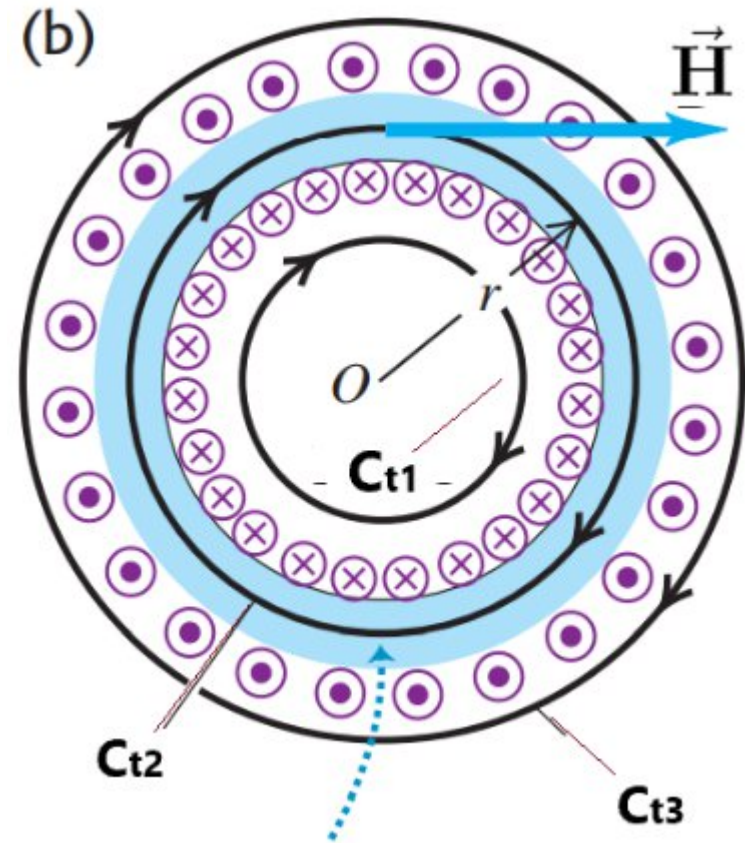
Magnetno polje postoji u plavo obojenoj zapremini prema Amperovom zakonu

MAGNETNA KOLA – AMPEROV ZAKON

- Primenom Amperovog zakona na konturu C_{t1} i C_{t3} dobija se da je intenzitet vektora jačine magnetnog polja jednak 0!
- Magnetno polje (u idealnom slučaju) postoji samo u feromagnetnom materijalu i prema Amperovom zakonu jačina polja za konturu C_{t2} je

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

- Smer linija polja H u torusu i smer prolaska struje I kroz površ naslonjenu na C_{t2} povezan je desnom zavojnicom.



MAGNETNA KOLA – AMPEROV ZAKON

- U praksi se često razmatra približan račun kada je **jezgro tanko**.
- Poluprečnik r konture C_{l2} se malo menja, pa se uzima kontura koja prolazi kroz sredinu torusa (**srednja linija - l**), a polje u celom torusu se smatra konstantnim po intenzitetu

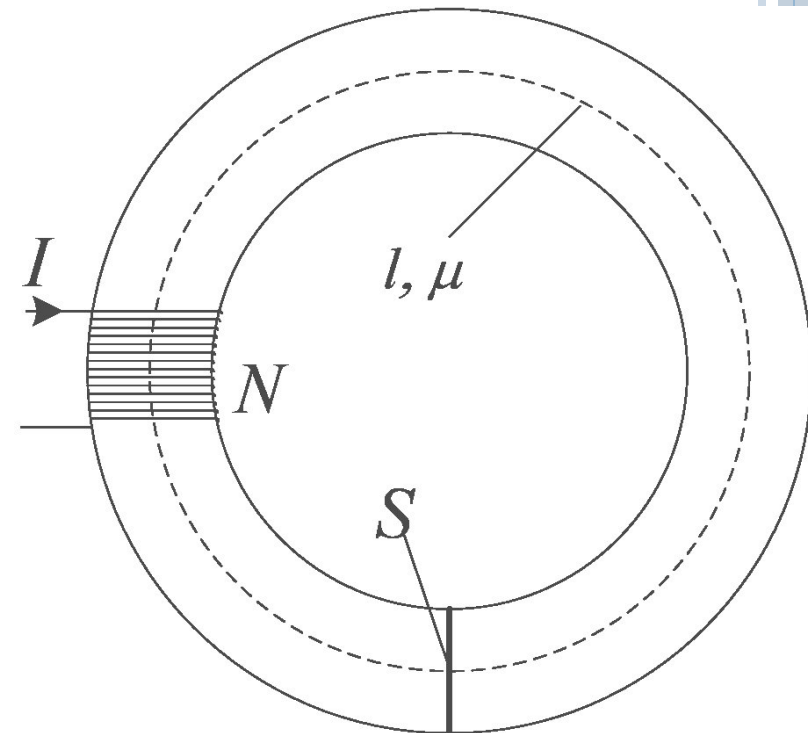
$$H = \frac{NI}{2\pi r} \approx \frac{NI}{l}$$

- Ako je torus od materijala sa permeabilnošću μ , tada je indukcija

$$B = \mu H = \frac{\mu NI}{l}$$

- A fluks kroz poprečni presek jezgra

$$\Phi = BS = \frac{\mu NIS}{l}$$

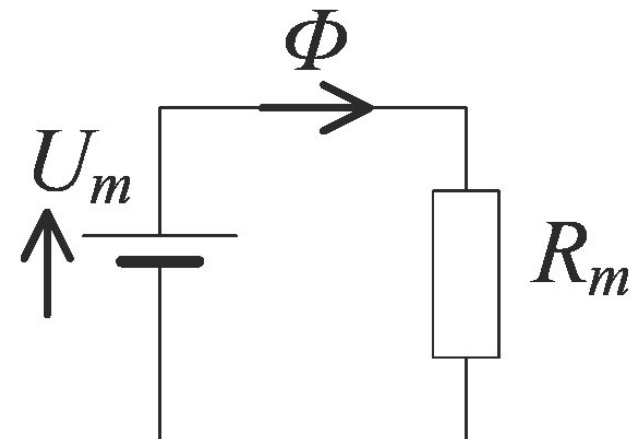
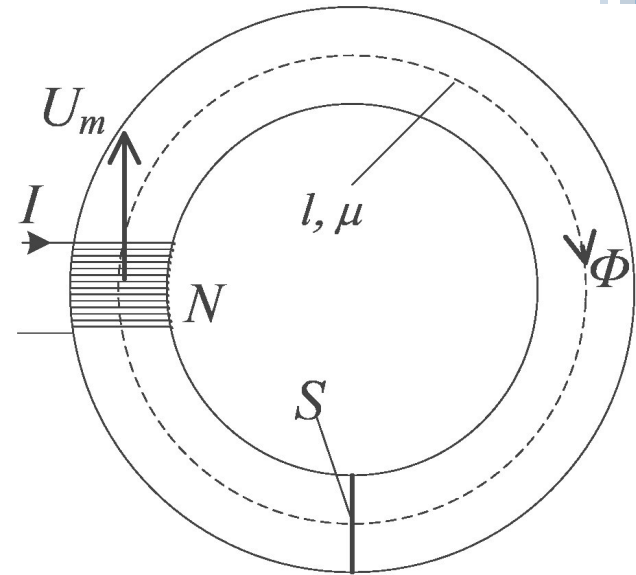


- Izraz za fluks polja kroz torusno jezgro može da se napiše u obliku

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S}} = \frac{U_m}{R_m}$$

- $U_m = NI$ je **magnetopobudna sila**. U ekvivalentnom električnom kolu magnetopobudna sila se ponaša kao i elektromotorna sila sa istim smerim.
- $R_m = \frac{l}{\mu S}$ je **magnetna otpornost** ili **reluktansa**. U ekvivalentnom električnom kolu reluktansa se ponaša kao otpornik.
- Φ je ekvivalentan struji, pa je

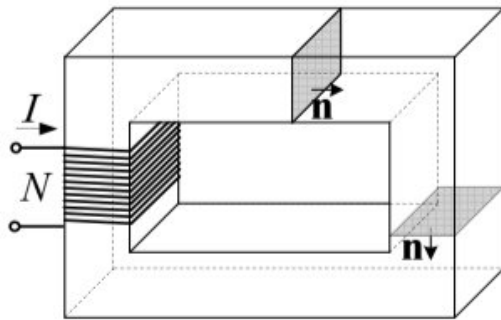
$$\Phi = U_m / R_m$$



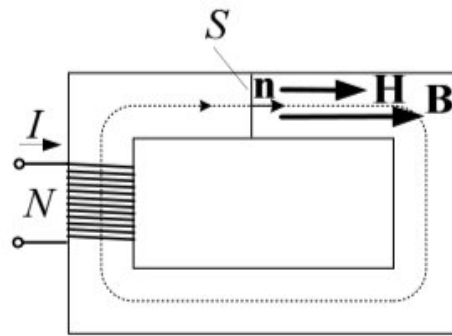
MAGNETNA KOLA – EKVIVALENTNO ELEKTRIČNO KOLO

8

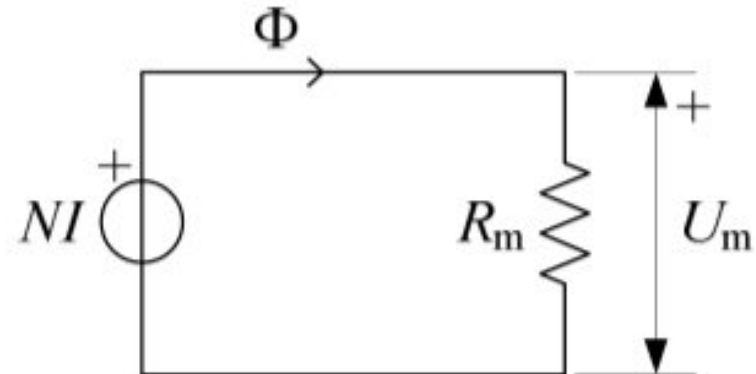
- Magnetna jezgra često nisu torusnog oblika, već imaju oštre pravougaone oblike.
- U tom slučaju primenjuje se isti račun, koji važi samo **približno**.
- Najznačajnije odstupanje nastaje na ivicama jezgra gde se grane magnetnog kola “savijaju” pod pravim uglom.
- Kao i kod torusnih jezgara, koristi se ista ekvivalencija sa električnim kolima.



Magnetno kolo



Ekvivalentno električno kolo



SOPSTVENA INDUKTIVNOST

- Fluks namotaja Ψ od N navojaka je N puta veći od fluksa jezgra Φ

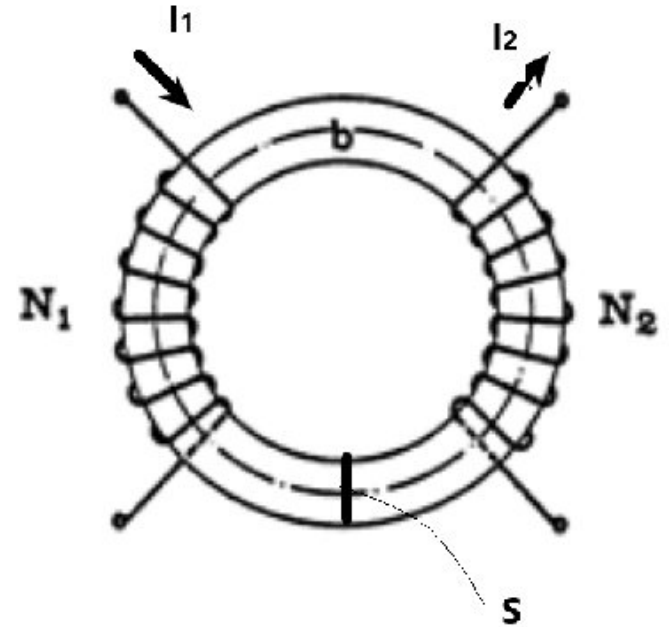
$$\Psi = N\Phi$$

- Sopstvena induktivnost prvog namotaja (meri se fluks prvog namotaja koji potiče od struje istog namotaja, pri $I_2=0$)

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{N_1\Phi_1}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \cdot \frac{N_1 I_1}{R_m} = \frac{N_1^2}{R_m}$$

- Sopstvena induktivnost drugog namotaja (meri se fluks drugog namotaja koji potiče od struje istog namotaja, pri $I_1=0$)

$$L_{22} = \frac{\Psi_{22}}{I_2} = \frac{N_2\Phi_2}{I_2} = \frac{N_2}{I_2} \cdot \frac{N_2 I_2}{R_m} = \frac{N_2^2}{R_m}$$



$$R_m = \frac{b}{\mu S}$$

- Međusobna induktivnost dva namotaja (meri se fluks drugog namotaja koji potiče od struje prvog namotaja, pri $I_2=0$)

$$|L_{21}| = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \Phi_1}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \cdot \frac{N_1 I_1}{R_m} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

- Ili obrnuto (meri se fluks prvog namotaja koji potiče od struje drugog namotaja, pri $I_1=0$)

$$|L_{12}| = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi_2}{I_2} = \frac{N_1}{I_2} \cdot \frac{N_2 I_2}{R_m} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

- Očigledno zbog simetrije, mora da važi

$$|L_{12}| = |L_{21}|$$

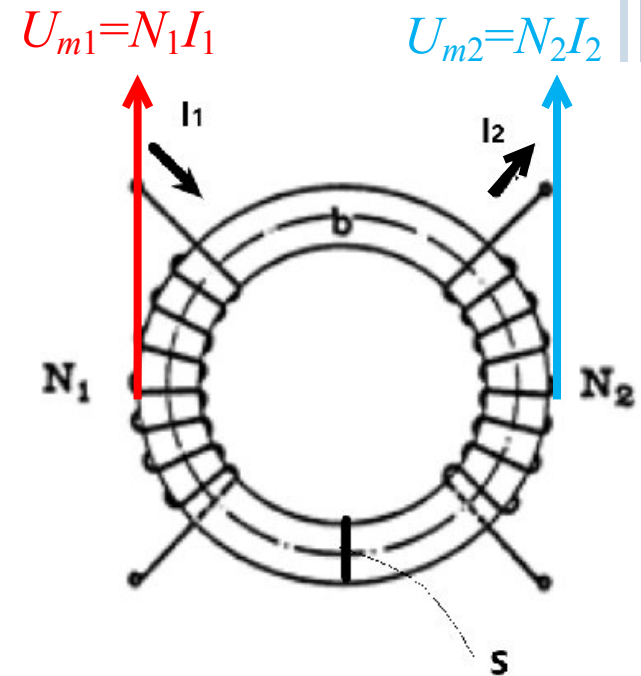
- Koeficijent sprege namotaja

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{|L_{21}|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

- Ukoliko je sprega dva kalema idealna $k=1$.

ZNAK MEĐUSOBNE INDUKTIVNOSTI

- Znak međusobne induktivnosti dva namotaja zavisi od usvojenih referentnih smerova struja kroz namotaje i načina motanja namotaja.
- Ako magnetopobudne sile imaju iste smerove međusobni fluks je pozitivan pa samim tim i međusobna induktivnost $L_{12/21}$. U suprotnom, međusobna induktivnost je negativna.
- U slučaju sa slike desno $L_{12} < 0$ jer su magnetopobudne sile U_{m1} i U_{m2} suprotno usmerene kroz jezgro.



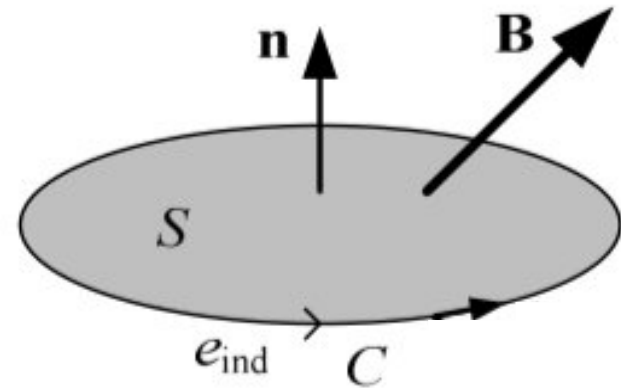
$$R_m = \frac{b}{\mu S}$$

- Faradejev zakon

$$e_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

- Indukovana ems ima smer konture koji je sa smerom normale na naleglu površ S vezan pravilom desne zavojnice, a fluks je

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot S \cdot \vec{n}$$

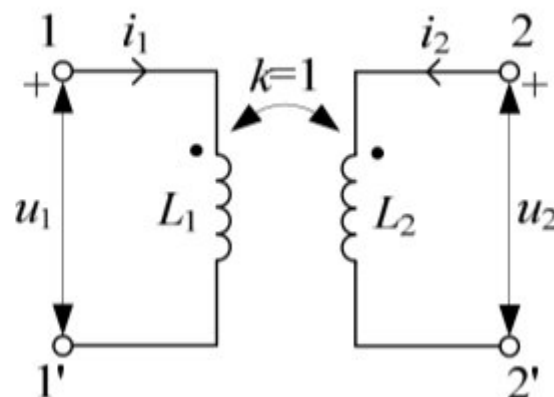
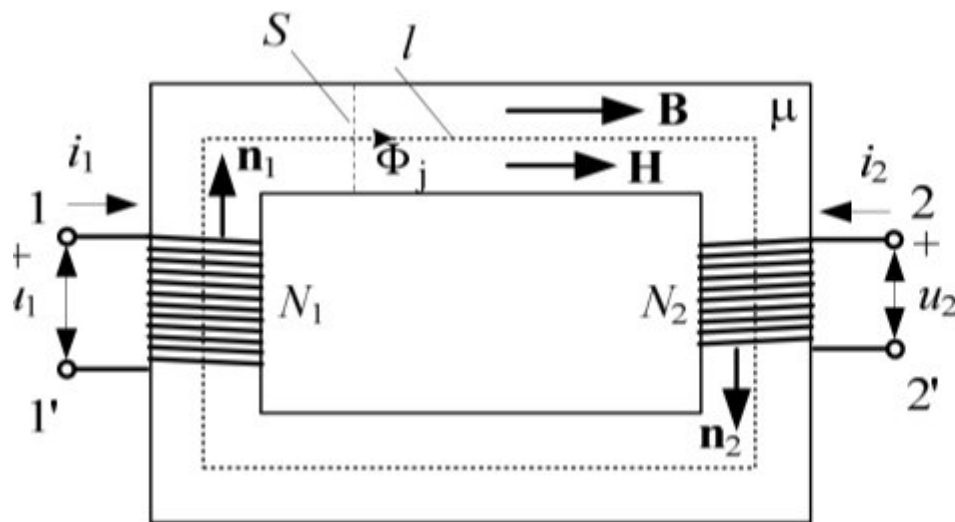


- Postoje dva (tri) tipa indukcije:
 - **Statička** – kada kontura stoji, a magnetno polje je promenljivo;
 - **Dinamička** – kada je polje konstantno (nepromenljivo) a kontura se kreće ili deformiše;
 - (**Mešovita** – koja obuhvata oba prethodna tj. kontura se kreće ili deformiše u promenljivom magnetnom polju.)

TRANSFORMATOR

- Koristi se za povećanje ili smanjenje napona i galvansko razdvajanje. Odnosom broja navojaka na primaru i sekundaru se kontroliše odnos napona. Transformator se sastoji od dva (ili više) jako spregnuta namotaja ($k \approx 1$) na zajedničkom jezgru.
- Ako je $k = 1$, napon primara je $u_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$ a napon sekundara je $u_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$, pa pošto je fluks isti u svakom delu jezgra, važi da je

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$



- Za magnetno kolo sa slike važi

$$u(t) - Ri(t) - \frac{d\phi(t)}{dt} = 0$$

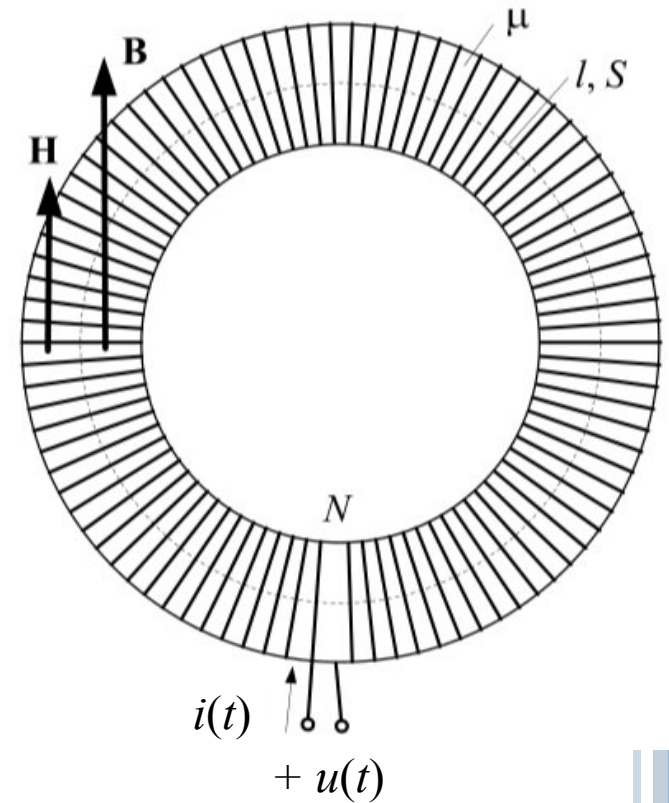
$$u(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$L = \frac{N^2}{R_m}, \quad R_m = \frac{l}{\mu S}$$

- Ako se pomnože obe strane jednačine sa $i(t)dt$ dobija se

$$u(t)i(t)dt - Ri^2(t)dt - Li(t)di(t) = 0$$

$$dW_{\text{generatora}} - dW_{\text{gubitaka}} - dW_{\text{mag. polja}} = 0$$



ENERGIJA MAGNETNOG POLJA KALEMA

- Elementarna energija koja se skladišti u kalemu je

$$dW_{mag. polja} = Li \cdot di$$

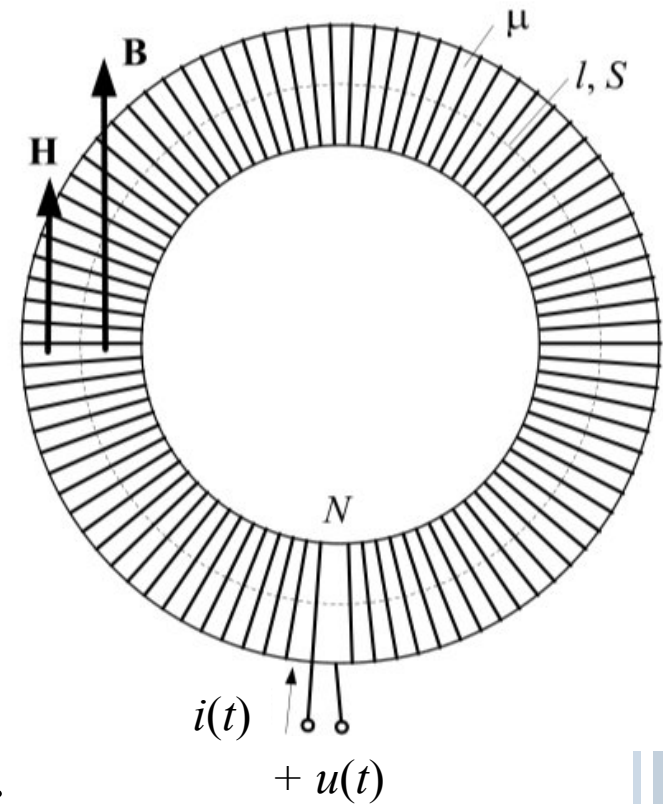
- Ukupna akumulirana energija u magnetnom polju kalema

$$W_{mag. polja} = \int_0^I Li \cdot di = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I$$

$$W_{mag. polja} = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} BSHl = \frac{1}{2} BHV,$$

- gde je $V=Sl$ - zapremina torusa (približno).
- Zapreminska gustina magnetskog polja je

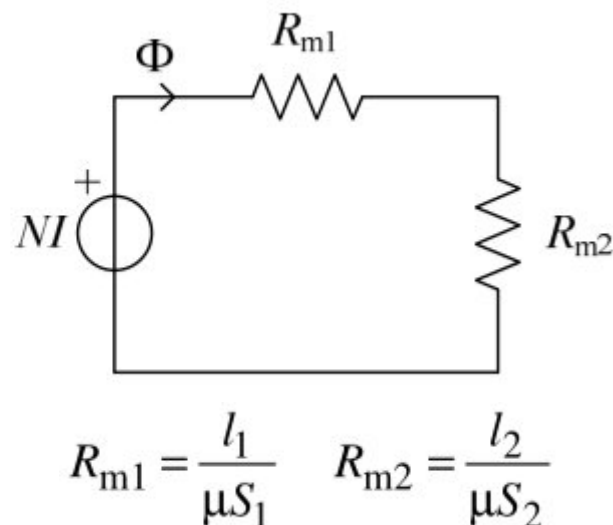
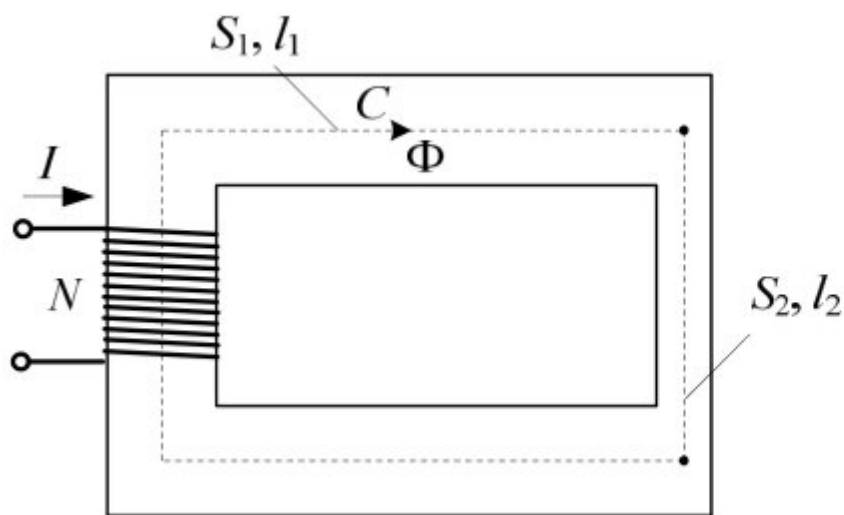
$$w_{mag. polja} = W_{mag. polja} / V = \frac{1}{2} BH$$



PRIMERI

- Primer 4.** Nacrtati ekvivalentno električno kolo magnetnom kolu sa slike i odrediti izraz za fluks jezgra i sopstvenu induktivnost.

Magnetno kolo sa dve grane različitih preseka

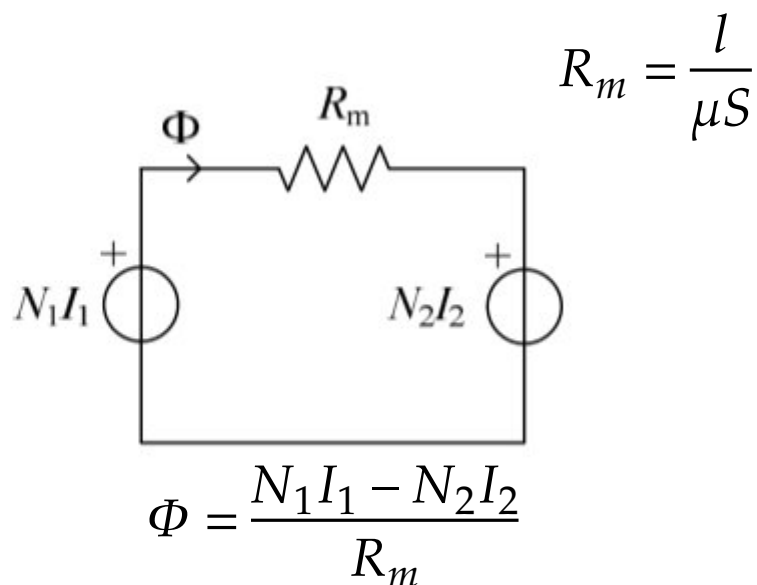
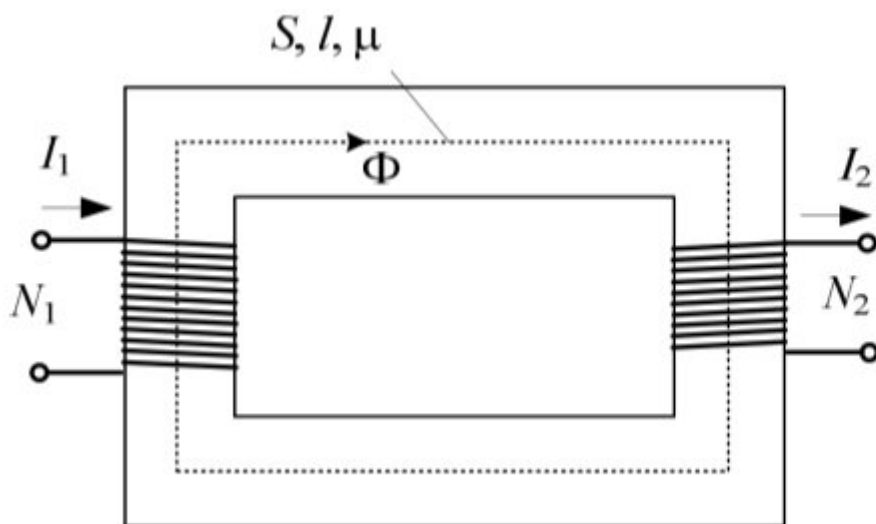


$$\Phi = \frac{NI}{R_{m1} + R_{m2}}$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{N^2}{R_{m1} + R_{m2}}$$

- Primer 5.** Nacrtati ekvivalentno električno kolo magnetnom kolu sa slike i odrediti izraz za fluks jezgra, sopstvene i međusobne induktivnosti.

Magnetno kolo sa dva namotaja



$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \Phi(za \ I_2 = 0)}{I_1} = \frac{N_1^2}{R_m}$$

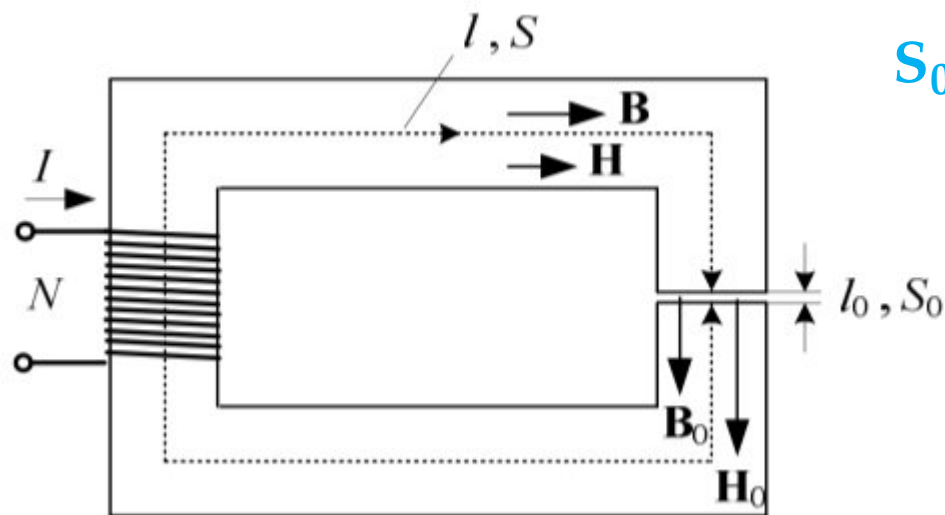
$$L_{22} = \frac{\Psi_{22}}{I_2} = \frac{N_2 (-\Phi(za \ = 0)) I_1}{I_2} = \frac{N_2^2}{R_m}$$

$$L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \Phi(za \ I_1 = 0)}{I_2} = - \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

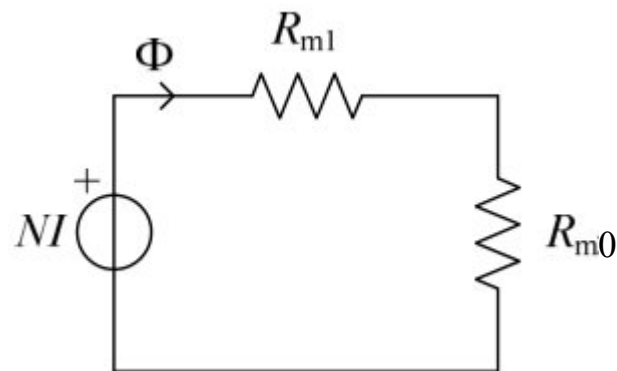
PRIMERI

- Primer 6.** Nacrtati ekvivalentno električno kolo magnetnom kolu sa slike i odrediti izraz za fluks jezgra, intenzitet magnetne indukcije i jačine magnetnog polja u feromagnetu i zazoru.

Magnetno kolo sa vazdušnim zazorom (procepom)



$$S_0 \approx S$$



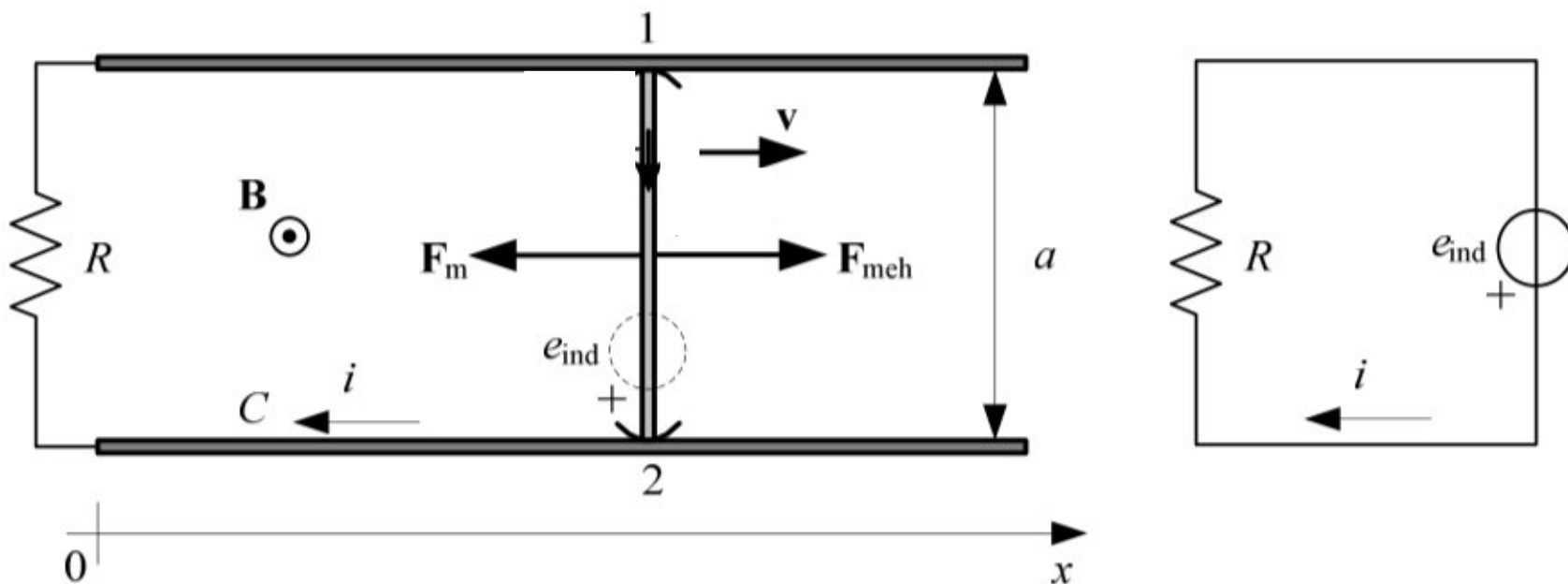
$$R_{m0} = \frac{l_0}{\mu_0 S_0} \approx \frac{l_0}{\mu_0 S}, \quad R_{m1} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$\Phi = \frac{NI}{R_{m0} + R_{m1}}$$

$$B_0 \approx B = \frac{\Phi}{S}$$

$$H_0 = \frac{B}{\mu_0}, \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

- **Primer 7.** Dinamička indukcija – linearni generator
- Šipka dužine a se vuče konstantnom brzinom v preko šina (zanemarljivih otpornosti i beskonačne dužine).
- Šipka se nalazi u homogenom konstantnom magnetnom polju indukcije B .
- Jedan kraj šina je zatvoren otpornikom R .
- Odrediti intezitet i smer indukovane elektromotorne sile.



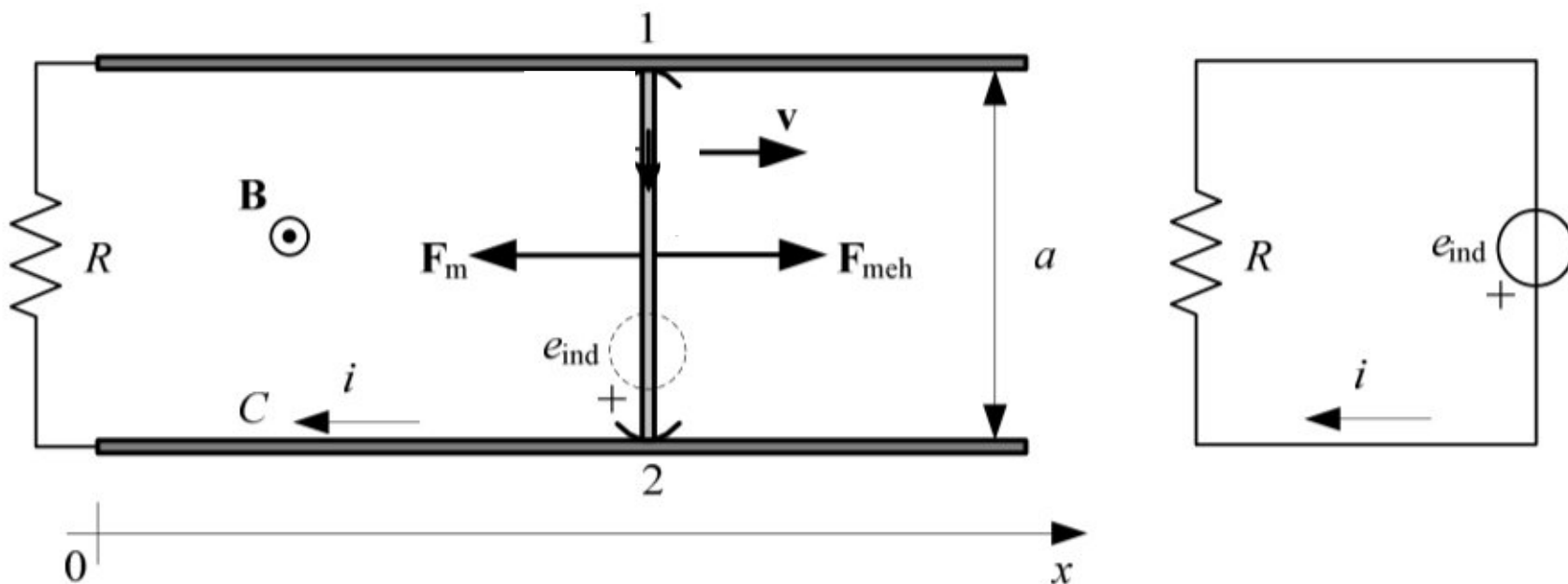
- Intenzitet indukovane ems u smeru sa slike je

$$e_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdS}{dt} = \frac{Bavdt}{dt} = avB$$

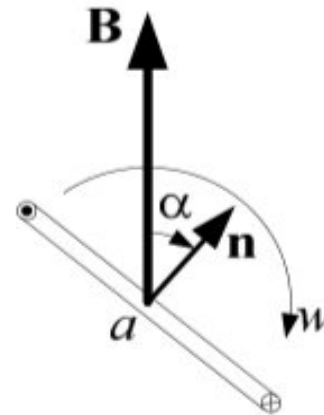
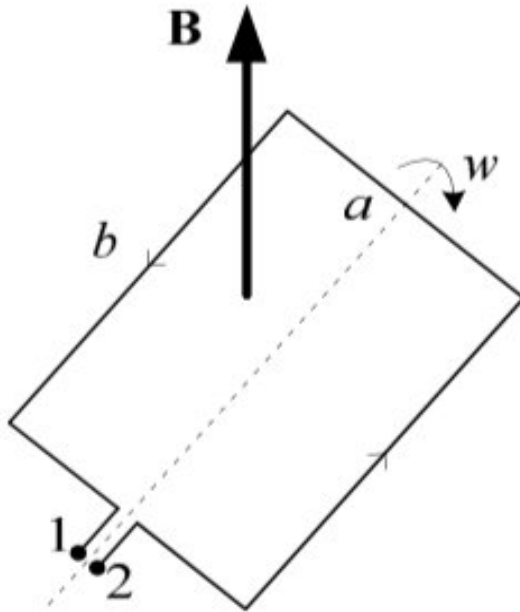
- Alternativno, može se koristiti i sledeći izraz za određivanje ems

$$e_{ind} = \vec{a} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

- Struja u kolu je jednosmerna (konstantna): $I = e_{ind}/R = avB/R$.
- Magnetna sila $\vec{F}_m = I \cdot \vec{a} \times \vec{B}$ se suprotstavlja kretanju šipke.



- **Primer 8.** Dinamička indukcija – obrtni generator (alternator).
- Pravougaona kontura stranica a i b okreće se konstantnom ugaonom brzinom ω oko svoje ose.
- Kontura se nalazi u homogenom konstantnom magnetnom polju indukcije $\mathbf{B}$, koja je normalna na osu obrtanja.
- Odrediti intezitet indukovane elektromotorne sile između priključaka 1 i 2 konture.



- Fluks kroz konturu je

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cdot \cos(\alpha) = Bab \cdot \cos(\alpha), \alpha(t) = \omega t$$

$$\phi(t) = Bab \cdot \cos(\omega t)$$

$$e_{ind} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bab \cdot \cos(\omega t)) = Bab\omega \cdot \sin(\omega t)$$

$$e_{ind} = E_m \cdot \sin(\omega t)$$

- Naizmenične struje** (engl. *alternating current*).

