



UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

ELEKTROTEHNIKA

- ŠKOLSKA 2025/2026 -

4. NAIZMENIČNENE STRUJE

- DEO 1 -

- U kolima naizmeničnih struja (NS) naponi i struje su prostoperiodične veličine (sinusne ili kosinusne).
- Parametri prostoperiodične veličine

$$\mathbf{u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)}$$

- Amplituda $\mathbf{U_m}$ ili efektivna vrednost $\mathbf{U = U_m / \sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = U_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \theta) dt} \\ &= U_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\theta)}{2} dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Perioda $\mathbf{T}$ ili učestanost (frekvencija) $\mathbf{f = \frac{1}{T}}$ ili kružna učestanost

$$\mathbf{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

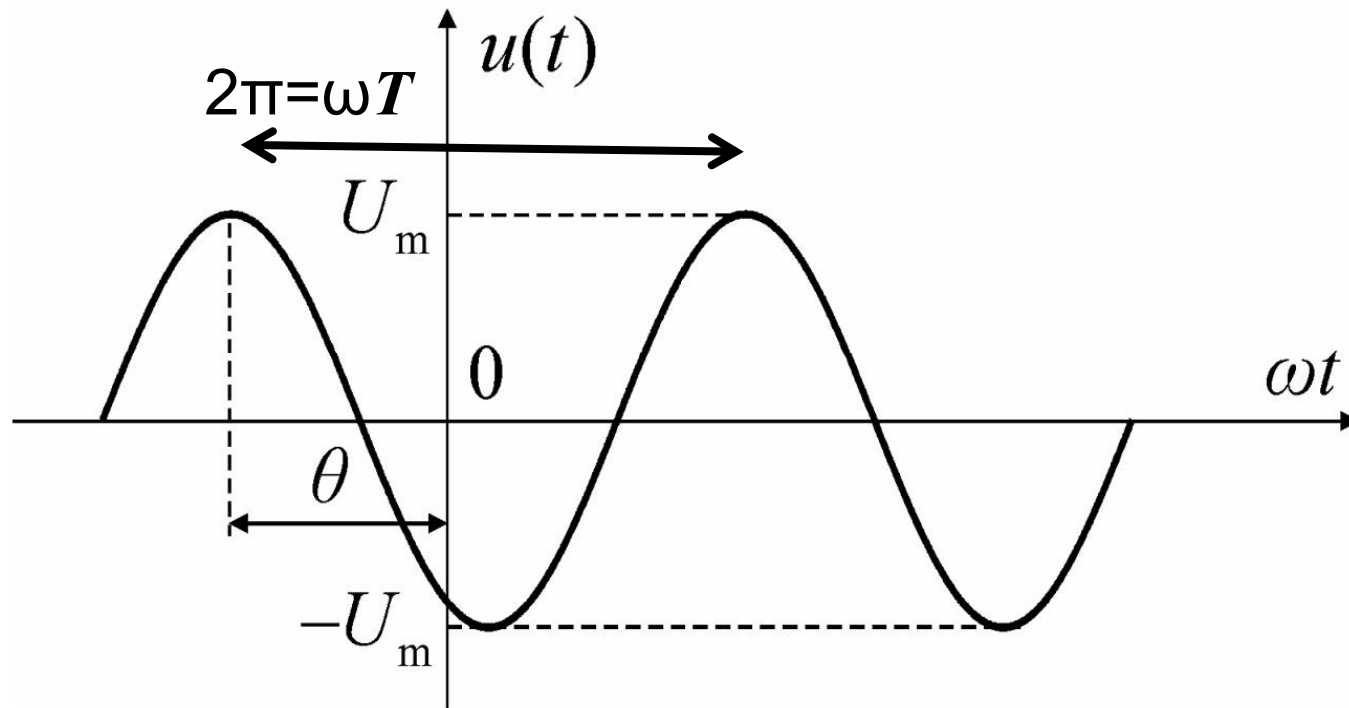
- Početna faza $\mathbf{\theta}$.

PARAMETRI SINUSNE FUNKCIJE

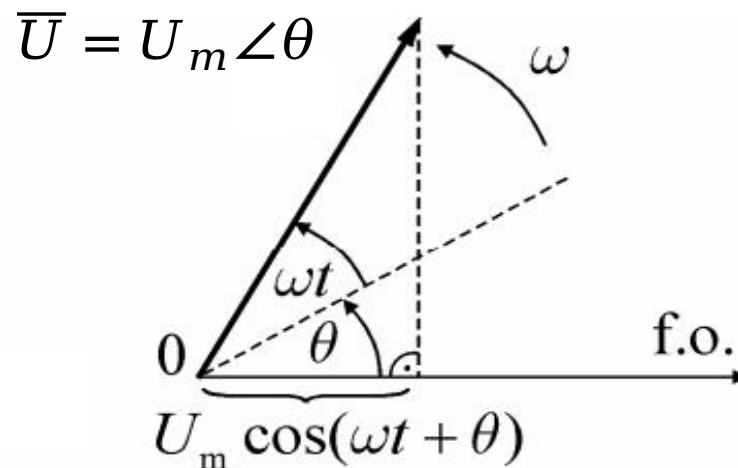
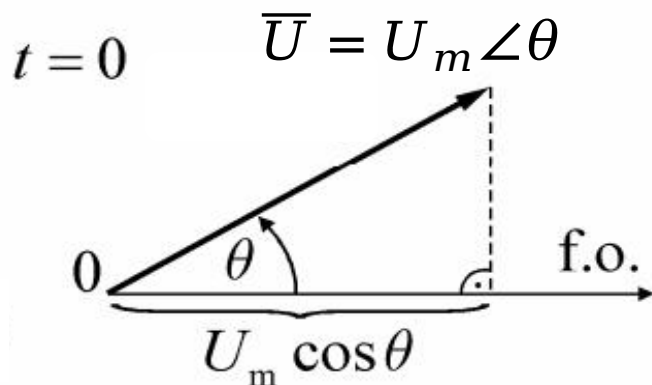
- Parametri prostoperiodične veličine

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$

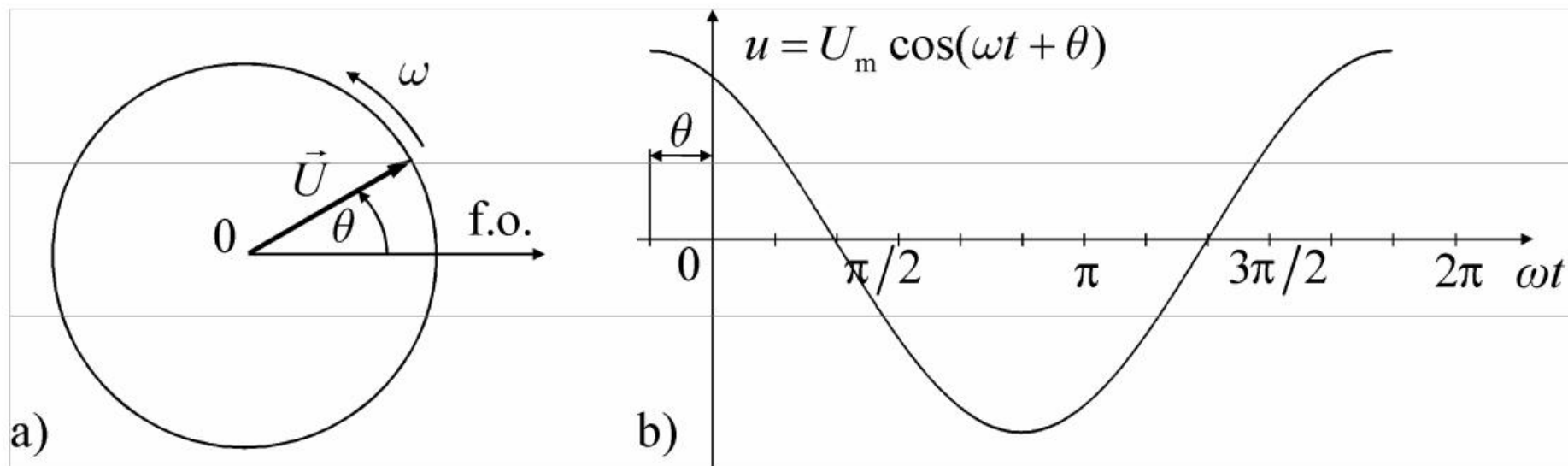
- Amplituda U_m ili efektivna vrednost, $U = U_m / \sqrt{2}$,
- Perioda T ili učestanost $f = \frac{1}{T}$ ili kružna učestanost $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$,
- Početna faza θ .



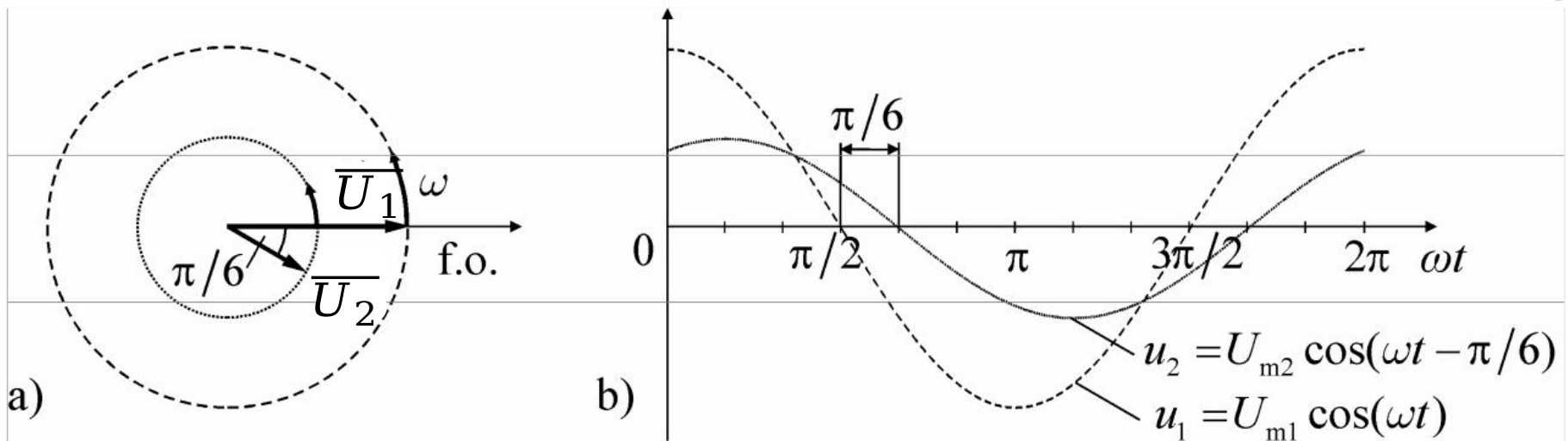
- Prostoperiodična veličina $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}_m \cos(\omega t + \theta)$ može se predstaviti kao projekcija na apscisnu osu vektora amplitude $\mathbf{U}_m$ i početne faze θ koji rotira ugaonom brzinom ω .
- Ovakvi rotirajući vektori se nazivaju **fazorima**.
- Fazori se crtaju usvajajući neki fiksni početni trenutak, na primer $t = 0$: $u(0) = U_m \cos(\theta)$ i označavaju sa $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_m \angle \theta$.
- U predstavljanju naizmeničnih napona i struja najčešće se umesto amplitude $\mathbf{U}_m$ koristi efektivna vrednost $\mathbf{U} = \mathbf{U}_m / \sqrt{2}$, pa fazor postaje $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \angle \theta$.



- Projekcija rotirajućeg vektora (fazora) na apscisnu osu (tj. faznu osu) daje prostoperiodičnu veličinu: **$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$** .
- Projekcija fazora na oordinatnu osu (tj. osu upravnu na faznu osu) daje prostoperiodičnu veličinu: **$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$** .
- Fazorima mogu predstavljati bilo **sinusne** ili **kosinusne** funkcije, **po unapred usvojenom dogovoru**.
- Na predavanjima će se koristiti **kosinusne** funkcije.



- Pošto svi fazori koji predstavljaju naizmenične napone i struje u jednom kolu rotiraju istom ugaonom brzinom ω , njihov **međusobni položaj (fazna razlika) ostaje isti** u svakom trenutku vremena.
- Zato se može usvojiti da je $t=0$ i kolo analizirati pomoću fazora koji su “zaustavljeni” u početnom trenutku, bez gubitka opštosti analize.



- Rotirajući vektori mogu se predstaviti i kompleksnim brojevima.
- Za kompleksni broj koji predstavlja naizmenični napon važi

$$\overline{U_m(j\omega)} = U_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$U_m e^{j(\omega t + \theta)} = U_m \cos(\omega t + \theta) + jU_m \sin(\omega t + \theta)$$

- Kompleksni predstavnik $\overline{U_m(j\omega)}$ u kompleksnoj ravni rotira, kao i fazor u faznoj ravni, ugaonom brzinom ω .
- Projekcija na realnu osu daje kosinusni napon
$$u(t) = \operatorname{Re}(\overline{U_m(j\omega)}) = U_m \cos(\omega t + \theta)$$
- Projekcija na imaginarnu osu daje sinusni napon
$$u(t) = \operatorname{Im}(\overline{U_m(j\omega)}) = U_m \sin(\omega t + \theta)$$
- Ako u kolu postoji samo jedna kružna učestanost ω , tada može da se usvoji da se kompleksni broj “zamrzne” u trenutku $t=0$, kao i fazor.

- Ako se još i umesto amplitude U_m koristi efektivna vrednost $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ i ako se usvoji predstavljanje prostoperiodičnih napona pomoću kosinusnih funkcija, tada je

$$\overline{U} = U e^{j\theta} \Leftrightarrow u(t) = U \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

- Preslikavanje iz vremenskog u kompleksni oblik i obrnuto je jednoznačno!
- Ako se kao fazna osa poklopi sa realnom osom, tada se fazori mogu smatrati ekvivalentni kompleksnim predstavnicima, što ćemo u ovom predmetu koristiti!
- NAPOMENA: Na ovom kursu se od 2024/25 godine koristiti kosinusna funkcija, a u knjizi sa Saobraćajnog fakulta i primerima od prethodnih godina u dodatnim materijalima na predmetu koristi se sinusna funkcija! Svi primeri se mogu koristiti, potrebno je samo **sin()** zameniti sa **cos()**.

- Za napon i struju na otporniku važi

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta) = RI\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

- Važi Omov zakon i za efektivne vrednosti

$$U = RI$$

- A napon i struja su u fazi

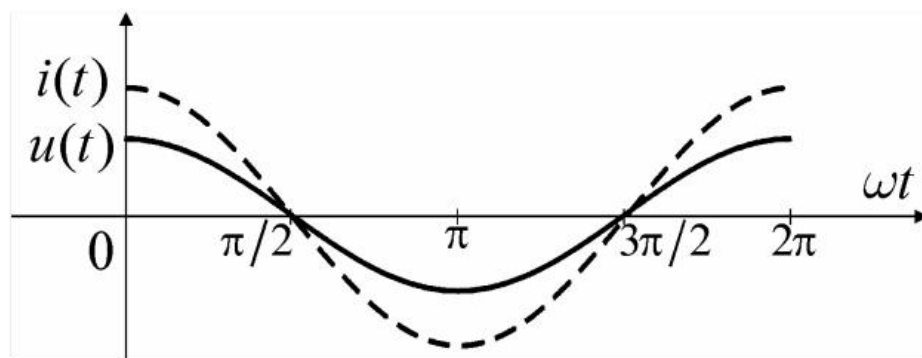
$$\theta = \psi$$

- U kompleksnom domenu je impedansa otpornika

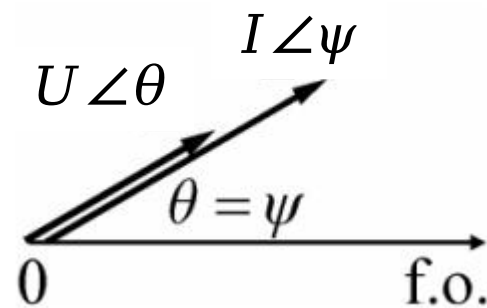
$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{j\theta}}{I e^{j\psi}} = \frac{R I e^{j\psi}}{I e^{j\psi}} = R \quad (R \text{ je } \textit{rezistansa})$$

- Kompleksna admitansa je

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} = G \quad (G \text{ je } \textit{konduktansa})$$



Usvojeno: $\theta = \psi = 0$



Usvojeno: $\theta = \psi \neq 0$

- Za napon i struju kalema važi

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$= -\omega L I \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

$$= \omega L I \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi + \pi/2)$$

- Za efektivne vrednosti važi

$$U = \omega L I$$

- A struja kasni za naponom (ili napon prednjači) za $\pi/2$

$$\theta = \psi + \pi/2$$

- U kompleksnom domenu je impedansa kalema:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{j\theta}}{I e^{j\psi}} = \frac{\omega L I e^{j(\psi + \pi/2)}}{I e^{j\psi}}$$

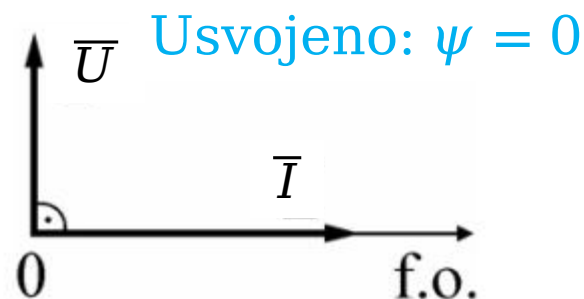
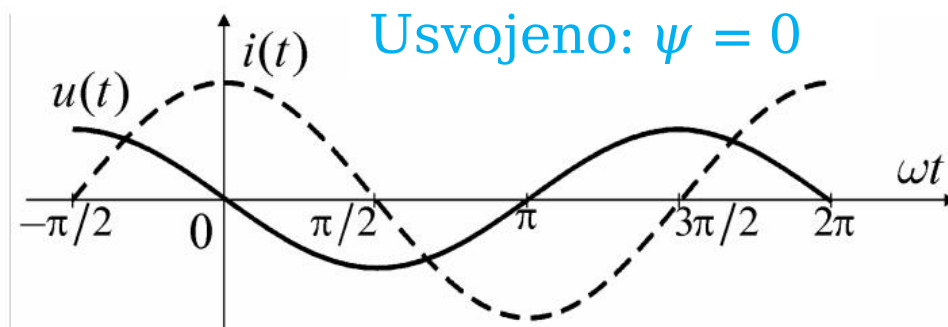
$$\bar{Z} = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L$$

$$\bar{Z} = jX, \text{ (*reaktansa*: } X = \omega L > 0 \text{)}$$

- Kompleksna admitansa je:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$$

$$\bar{Y} = jB, \text{ (*susceptansa*: } B = -\frac{1}{\omega L} < 0 \text{)}$$



- Za napon i struju kalema važi

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

$$= -\omega CU\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$= \omega CU\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta + \pi/2)$$

- Za efektivne vrednosti važi

$$I = \omega CU$$

- A napon kasni za strujom (ili struja prednjači) za $\pi/2$

$$\psi = \theta + \pi/2$$

- U kompleksnom domenu je impedansa kondenzatora:

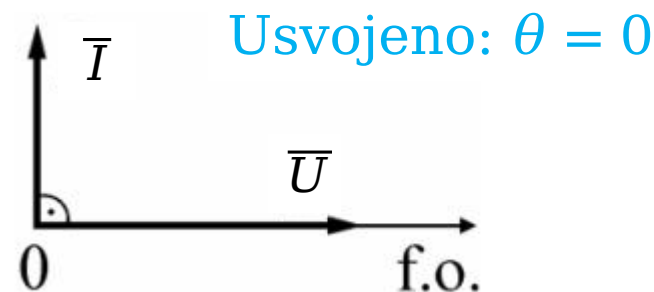
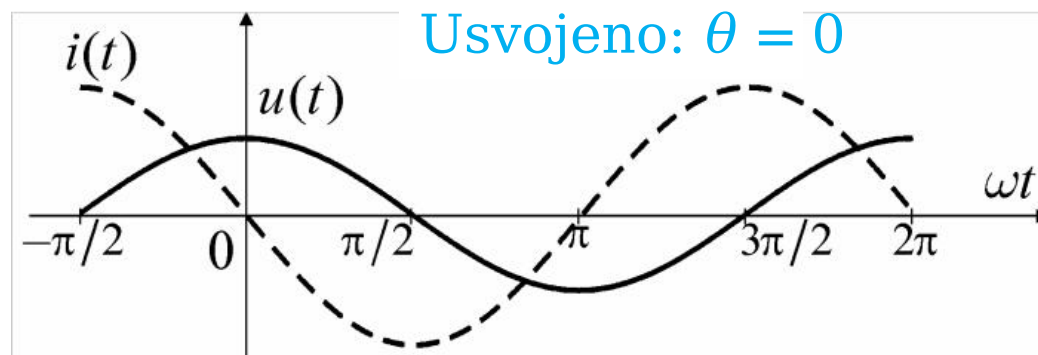
$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{j\theta}}{I e^{j\psi}} = \frac{U e^{j\theta}}{\omega C U e^{j(\theta + \pi/2)}}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = -j \frac{1}{\omega C}$$

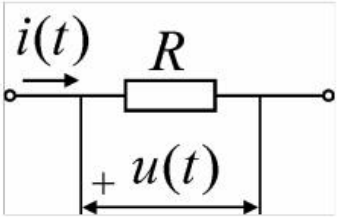
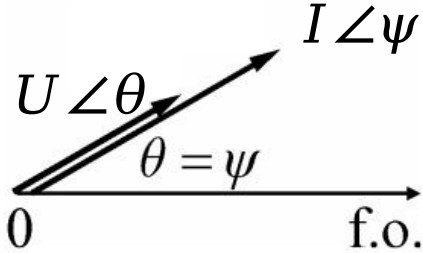
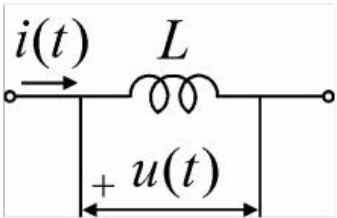
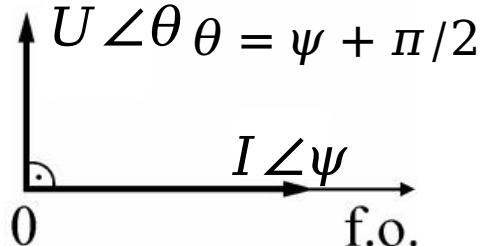
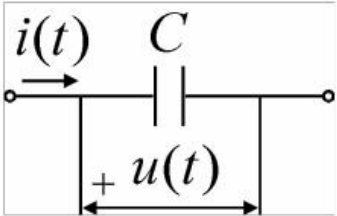
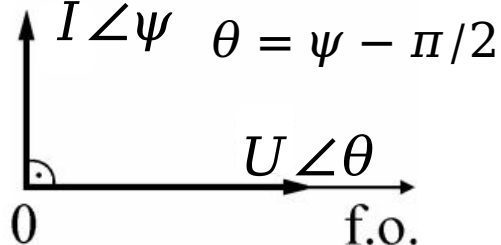
$$\bar{Z} = jX, \quad (\text{reaktansa: } X = -\frac{1}{\omega C} < 0)$$

- Kompleksna admitansa je:

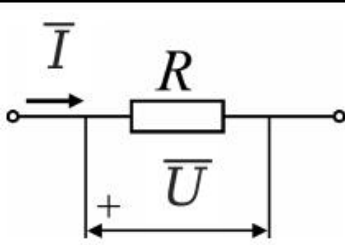
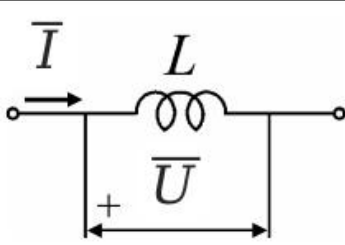
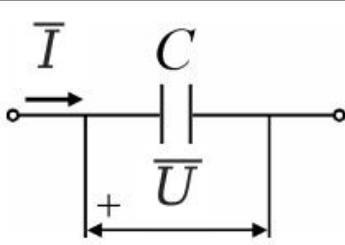
$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = j\omega C = jB, \quad (\text{susceptansa: } B = \omega C > 0)$$



R, L, C U KOLIMA NS - FAZORI NAPONA I STRUJA

Prijemnici	Osnovna relacija	$Z = \frac{U}{I}$	$\varphi = \theta - \psi$	Fazorski dijagram
	$u = Ri$	R	$\varphi = 0$	
	$u = L \frac{di}{dt}$	ωL	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	
	$i = C \frac{du}{dt}$	$\frac{1}{\omega C}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	

R, L, C U KOLIMA NS - KOMPLEKSNI PREDSTAVNICI

Element	Impedansa: $\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$	Z	φ	Admitansa: $\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}}$
	R	R	0	$G = \frac{1}{R}$
	$j\omega L$	ωL	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{j\omega L}$
	$\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$	$\frac{1}{\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$	$j\omega C$

- **Kompleksna impedansa** prijemnika (potrošača) se u opštem obliku može predstaviti kao

$$\overline{Z} = R + jX = Z e^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \varphi = \arctg(X/R)$$

- **R - rezistansa, X - reaktansa.**
- Impedansa se može posmatrati kao redna veza otpornika otpornosti R i reaktivnog elementa (kalema ili kondenzatora) reaktivne otpornosti $|X|$, ali pri tome treba voditi računa da je impedansa kompleksan broj i da se “sabiranje otpornosti” ove redne veze mora izvršiti u kompleksnom domenu (R je realan broj a X imaginaran), tako da je

$$\overline{Z} = (R + j0) + (0 + jX) = R + jX$$

$$\overline{Z} = R + jX = Z e^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \varphi = \operatorname{arctg}(X/R)$$

- Reaktansa X može biti:
 - pozitivna veličina ako je prijemnik **pretežno induktivan** ($X = \omega L$) ili
 - negativna ako je prijemnik **pretežno kapacitivan** ($X = -1/(\omega C)$).
- Fazna razlika φ je:
 - pozitivna ako je prijemnik **pretežno induktivan** ili
 - negativna ako je prijemnik **pretežno kapacitivna**.

- **Kompleksna admitansa** prijemnika (potrošača) se u opštem obliku može predstaviti kao:

$$\bar{Y} = Y e^{j\alpha} = G + jB = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = \frac{1}{R + jX}$$

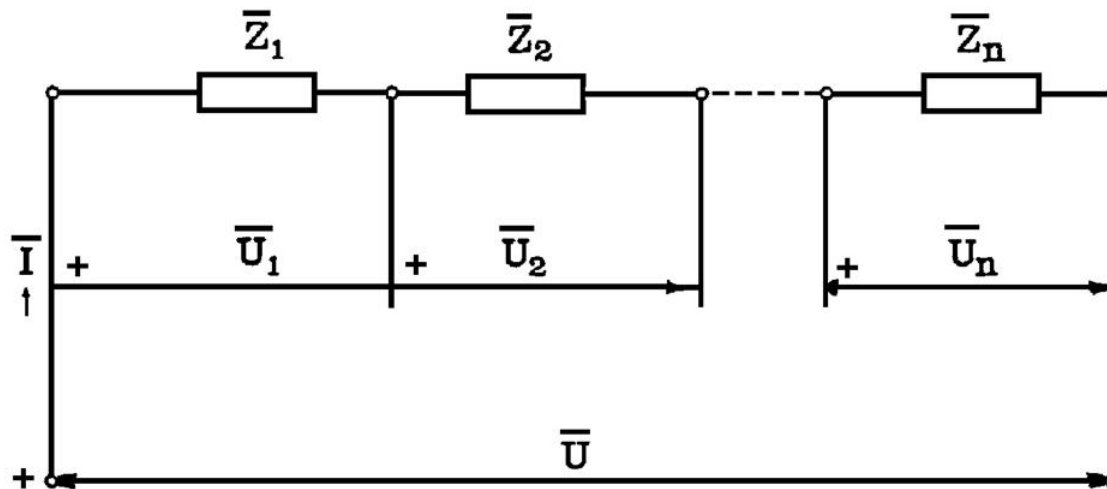
$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \alpha = \arctg(B/G)$$

- **G - konduktansa, B - susceptansa.**
- Admitansa se može posmatrati kao paralelna veza otpornika provodnosti G i reaktivnog elementa (kalema ili kondenzatora) reaktivne provodnosti $|B|$, ali pri tome treba voditi računa da je impedansa kompleksan broj i da se “sabiranje otpornosti” ove redne veze mora izvršiti u kompleksnom domenu (G je realan broj a B imaginaran), tako da je

$$\bar{Y} = (G + j0) + (0 + jB) = G + jB$$

- Važe sledeće relacije koje povezuju impedansu i admitansu:
 - Ugao admitanse je suprotnog znaka od ugla impedanse
$$\alpha = -\varphi$$
 - Moduo admitanse je $Y = 1/Z$, $Z = 1/Y$
 - Konduktansa $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$
 - Susceptansa $B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$
 - Rezistansa $R = \frac{G}{G^2 + B^2}$
 - Reaktansa $X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$
 - Susceptansa B je uvek suprotnog znaka od reaktanse (pozitivna ako je prijemnik pretežno kapacitivan i negativna ako je prijemnik pretežno induktivan).

- Formule važe samo za **KOMPLEKSNE** impedanse/admitanse!!!



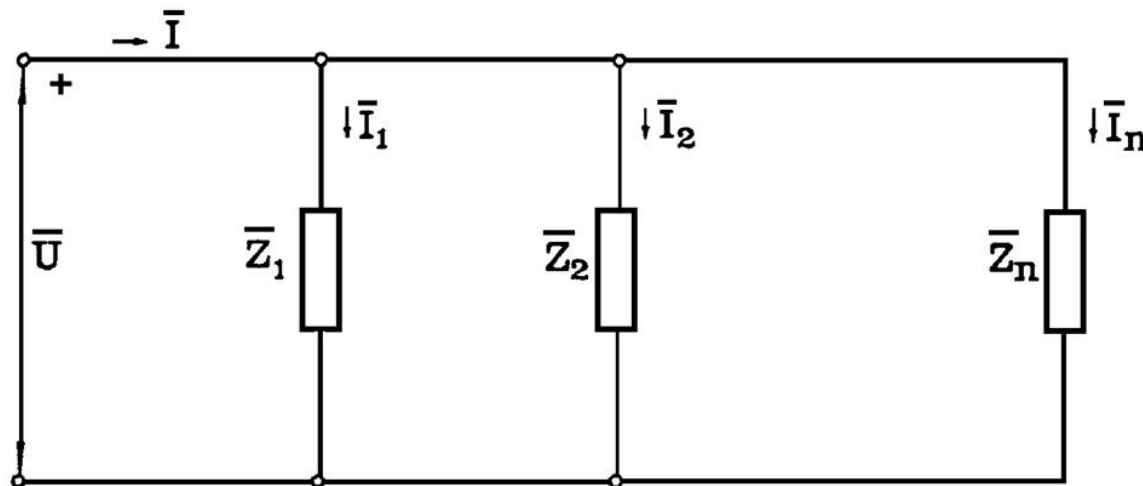
$$\bar{U} = \sum_{k=1}^n \bar{U}_k = \bar{I} \sum_{k=1}^n \bar{Z}_k$$

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \sum_{k=1}^n \bar{Z}_k$$

$$\frac{1}{\bar{Y}_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{Y}_k}$$

PARALELNA VEZA PORTOŠAČA

- Formule važe samo za **KOMPLEKSNE** impedanse/admitanse!!!



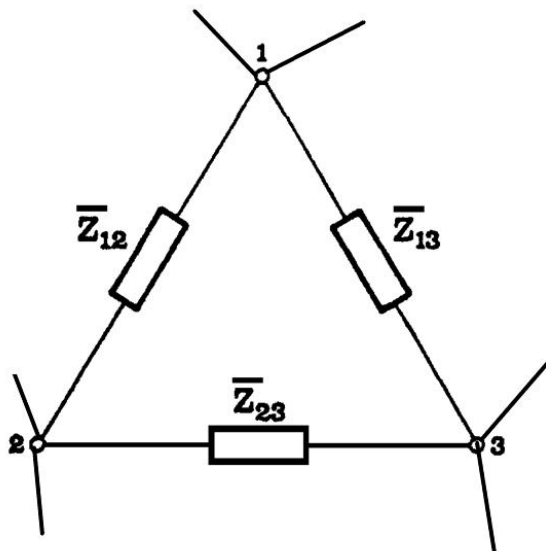
$$\bar{I} = \sum_{k=1}^n \bar{I}_k = \bar{U} \sum_{k=1}^n \bar{Y}_k$$

$$\bar{Y}_e = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \sum_{k=1}^n \bar{Y}_k$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_k}$$

TRANSORNACIJA: TROUGAO - ZVEZDA

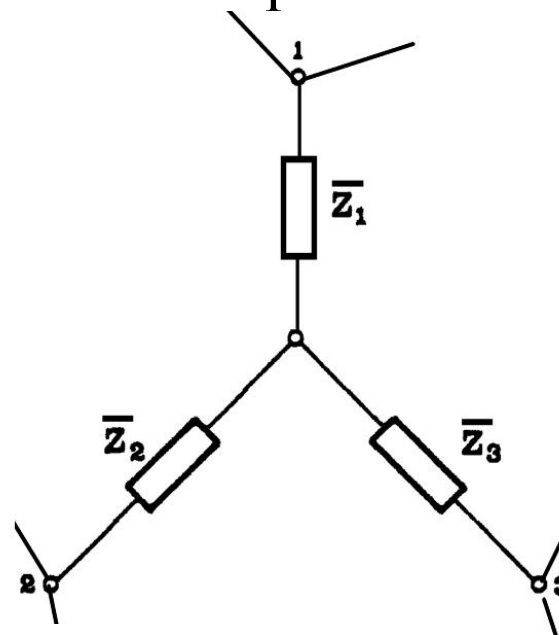
- Formule važe samo za **KOMPLEKSNE** impedanse/admitanse!!!



$$\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_3}$$

$$\bar{Z}_{13} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2}$$

$$\bar{Z}_{23} = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \frac{\bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1}$$



$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{13}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{13} + \bar{Z}_{23}}$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_{12} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{13} + \bar{Z}_{23}}$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_{13} \cdot \bar{Z}_{23}}{\bar{Z}_{12} + \bar{Z}_{13} + \bar{Z}_{23}}$$

- *... videti dodatne primere sa teorijskih ispita ...*
- **Primer 1.** Odrediti kompleksni predstavnik za napon $u(t) = 10\cos(314t + \pi/4)$ V.
- **Primer 2.** Odrediti talasni (vremenski) oblik napona čiji je kompleksni predstavnik $\bar{U} = -5\sqrt{2} - j5\sqrt{2}$ V, $f=100$ Hz, ako se za predstavljanje vremenskog oblika prostoperiodične veličine koristi kosinusna funkcija.
- **Primer 3.** Odrediti talasni (vremenski) oblik struje čiji je kompleksni predstavnik $\bar{I} = -10\sqrt{3} + j10$ A, $\omega=314$ rad/s, ako se za predstavljanje vremenskog oblika prostoperiodične veličine koristi kosinusna funkcija.
- **Primer 4.** Odrediti kompleksnu impedansu $\bar{Z}$, ako je poznato da je vremenski oblik napona na impedansi $u(t) = 30\cos(314t - 15^\circ)$ V i $i(t) = 15\cos(314t + \pi/12)$ A .

- **Primer 5.** Na red su povezani otpornik otpornosti 20Ω , kapacitivni prijemnik rezistanse 5Ω i reaktivne otpornosti 150Ω i induktivni prijemnik rezistanse 25Ω i reaktivne otpornosti 100Ω . Odrediti impedansu i admitansu, kao i kompleksnu impedansu i admitansu ove redne veze prijemnika. Da li je redna veza prijemnika pretežno induktivna ili kapacitivna?
- ***NAPOMENA:** voditi računa da se u materijalima iz prethodnih godina (pre školske 2024/25) za predstavljanje prostoperiodičnih napona i struja koristila sinusna funkcija!*