



UNIVERZITET U BEOGRADU  
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

# ELEKTROTEHNIKA

## - ŠKOLSKA 2025/2026 -

### 4. NAIZMENIČNENE STRUJE

#### - DEO 2 -

U kolima naizmenične struje može se razlikovati nekoliko tipova snage:

- Trenutna (jedinica je vat - W):  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$
- **Prividna (volt-amper - VA)** - za prijemnike se može posmatrati kao ukupna snaga koja se troši na rezistivnim elementima i razmenjuje u reaktivnim elementima

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = |\bar{S}| = ZI^2 = YU^2$$

- **Aktivna (vat - W)** - srednja vrednost trenutne snage tj. za prijemike je to snaga koja se troši na rezistivnim elementima:

$$P = S \cos(\varphi) = RI^2 = GU^2$$

- **Reaktivna (volt-amper reaktivni - VAr ili var)** - za prijemike je to snaga koja se razmenjuje na reaktivnim elementima (istog je znaka kao i reaktansa)

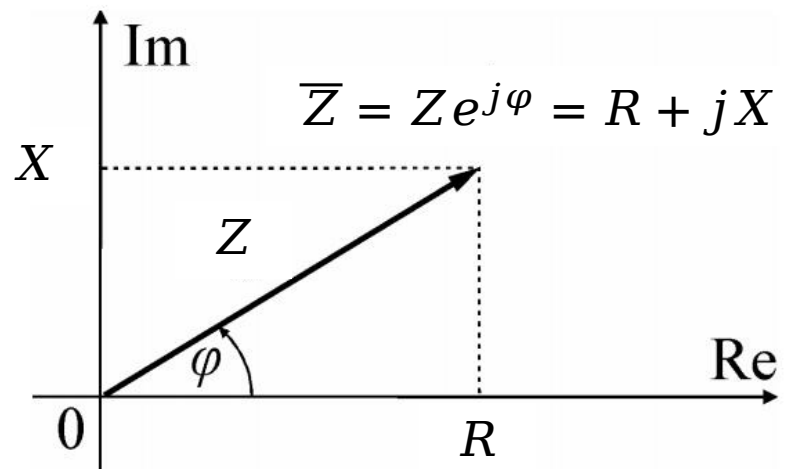
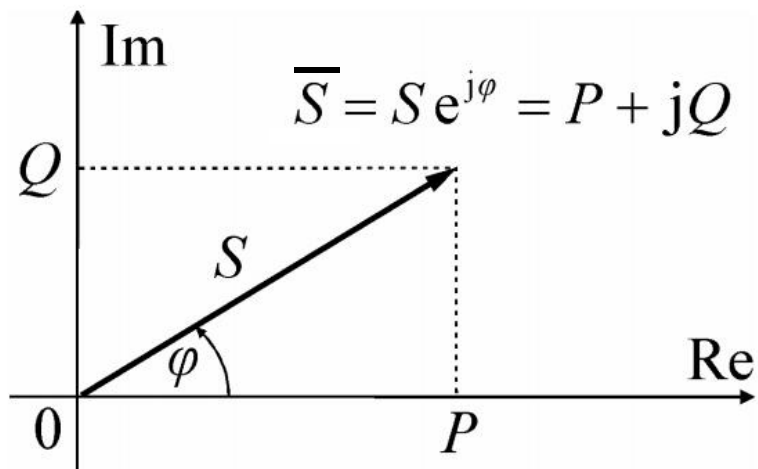
$$Q = S \sin(\varphi) = XI^2 = -BU^2$$

- **Kompleksna prividna (volt-amper - VA)** - ukupna snaga u kompleksnom obliku:

$$\bar{S} = S e^{j\varphi} = UI e^{j(\theta-\psi)} = U e^{j\theta} \cdot I e^{-j\psi} = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

$$\bar{S} = P + jQ = \bar{Z} I^2 = (R + jX) I^2 = \bar{Y}^* U^2 = (G - jB) U^2$$

| snaga                | izraz                                  | jedinica |
|----------------------|----------------------------------------|----------|
| trenutna             | $p(t) = u(t)i(t)$                      | W        |
| srednja (aktivna)    | $P = UI \cos \varphi$                  | W        |
| reaktivna (jalova)   | $Q = UI \sin \varphi$                  | VAr      |
| kompleksna           | $\bar{S} = \bar{U} \bar{I}^* = P + jQ$ | VA       |
| prividna (nominalna) | $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$            | VA       |



- U elektrodistributivnim sistemima, korisna snaga je samo  $P$ , dok je reaktivna snaga  $Q$  je nepoželjna.
- Snaga  $Q$  predstvalja razmenu energije između generatora i reaktivnih potrošača koja se ne pretvara u aktivni rad.
- Ovu snagu elektrodistribucija “ne naplaćuje”, ali mora obezbediti da svi elementi distributivnog sistema (provodnici, transformatori i slično) mogu da podnesu prenos kompletne prividne snage  $S$ , a koja obuhvata ne samo aktivnu snagu  $P$  već i  $Q$ .
- Ako provodnici koji povezuju generatore i potrošače imaju gubitke, deo snage se nepotrebno troši na ovu razmenu reaktivne energije.
- Zbog toga se teži da **faktor snage,  $\cos(\varphi)$** , teži ka jedinici:

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} \rightarrow 1$$

- **Otpornik** ima samo aktivnu snagu
  - $\overline{Z} = R + j0,$
  - $\overline{Y} = G + j0,$
  - $\overline{S} = P + j0,$
  - $S = UI = P,$
  - $P = RI^2 = GU^2,$
  - $Q = 0,$
  - $\cos(\varphi) = 1$

- **Kalem** ima samo reaktivnu snagu koja je pozitivna
  - $\bar{Z} = 0 + jX = 0 + j\omega L,$
  - $\bar{Y} = G + jB = 0 - j\frac{1}{\omega L}$
  - $\bar{S} = 0 + jQ,$
  - $S = UI = Q,$
  - $P = 0,$
  - $Q = XI^2 = \omega LI^2 = -BU^2 = \frac{U^2}{\omega L},$
  - $\cos(\varphi) = 0$

- **Kondenzator** ima samo reaktivnu snagu koja je negativna
  - $\bar{Z} = 0 + jX = 0 - j\frac{1}{\omega C},$
  - $\bar{Y} = G + jB = 0 + j\omega C$
  - $\bar{S} = 0 + jQ,$
  - $S = UI = |Q|,$
  - $P = 0,$
  - $Q = XI^2 = -\frac{I^2}{\omega C} = -BU^2 = -\omega CU^2,$
  - $\cos(\varphi) = 0$

Kola NS se mogu rešavati korišćenjem tri moguća pristupa.

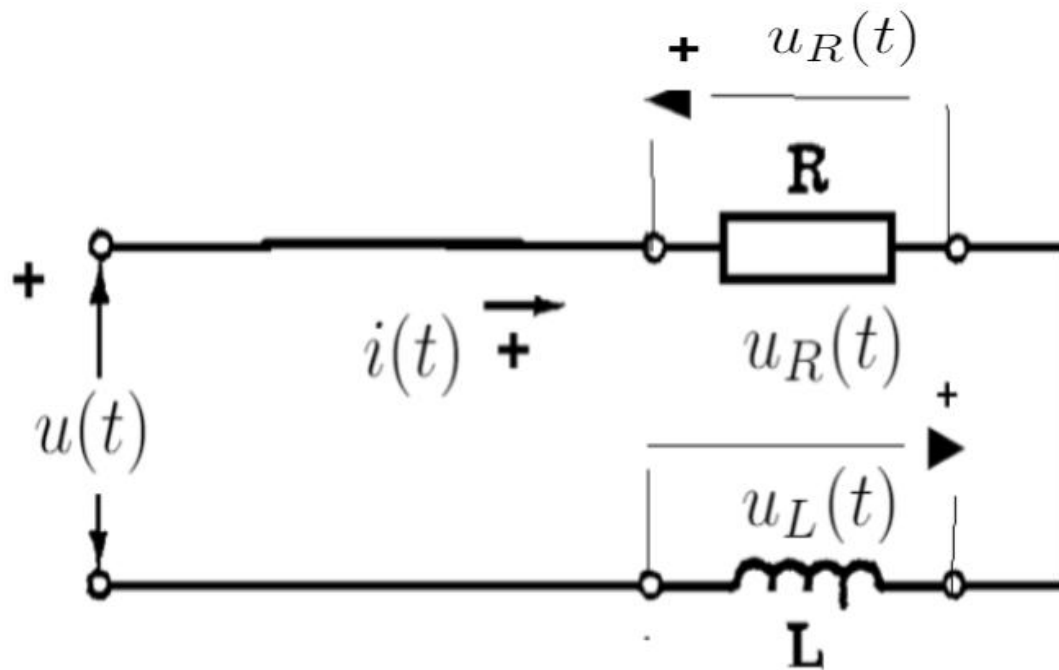
**1. Rešavanje u vremenskom domenu**, korišćenjem vremenskih izraza za napone i struje, diferencijalnih veza napona i struja na reaktivnim elementima, kao i trigonometrijskih relacija. Ovakav pristup je praktično neprihvatljiv za bilo koja složenija kola jer se dobijaju složeni sistemi diferencijalnih jednačina.

**2. Rešavanje kola korišćenjem fazorskih dijagrama**. Koriste se relacije između efektivnih vrednosti napona i struja i uglovi koji zaklapaju fazori napona i struja na osnovnim elementima R, L i C. Sabiranje fazora se mora obavljati vektorski (grafički) ili analitički razlaganjem vektora. Ovakvim pristupom mogu se rešavati relativno složena kola, ali on i dalje nije praktičan za veoma složena kola sa puno elemenata.

**3. Rešavanje kola korišćenjem kompleksnog računa**. Uvođenjem pojmova kompleksne impedanse i admitanse, diferencijalne relacije između napona i struja na reaktivnim elementima postaju analogne Omovom zakonu za otpornike. Mogu se primenjivati sve metode iz JS: KZ, MPČ, MKS, TT, superpozicija, ali se pri tome **obavezno moraju koristiti KOMPLEKSNI PREDSTAVNICI i KOMPLEKSNE impedanse !!!**



# REDNO RL KOLO



Fazori:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L$$

$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_L = \omega L \angle \frac{\pi}{2} \bar{I}$$

Kompleksni račun:

$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I}$$

$$\bar{U}_L = j\omega L \cdot \bar{I}$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L$$

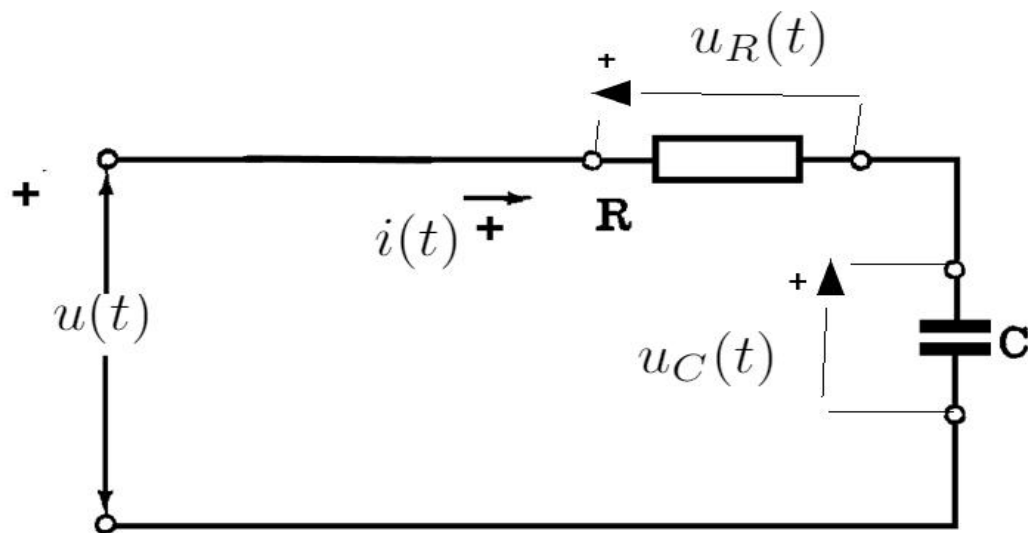
$$\bar{U} = (R + j\omega L) \cdot \bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + j\omega L}$$

$$\bar{U}_R = \frac{R\bar{U}}{R + j\omega L}$$

$$\bar{U}_L = \frac{j\omega L\bar{U}}{R + j\omega L}$$

## Kompleksni račun:



Fazori:  $u(t) = u_R(t) + u_C(t)$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_C$$

$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \bar{I}$$

$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I}$$

$$\bar{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_C$$

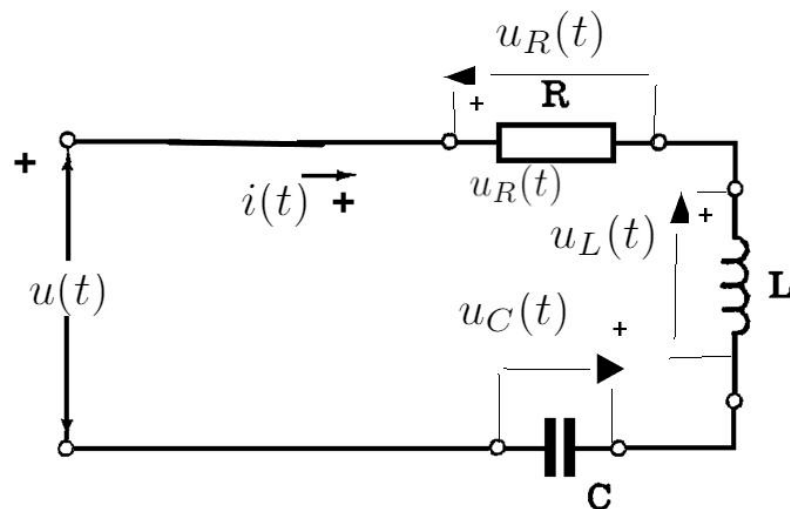
$$\bar{U} = \left( R - j \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R - j \frac{1}{\omega C}}$$

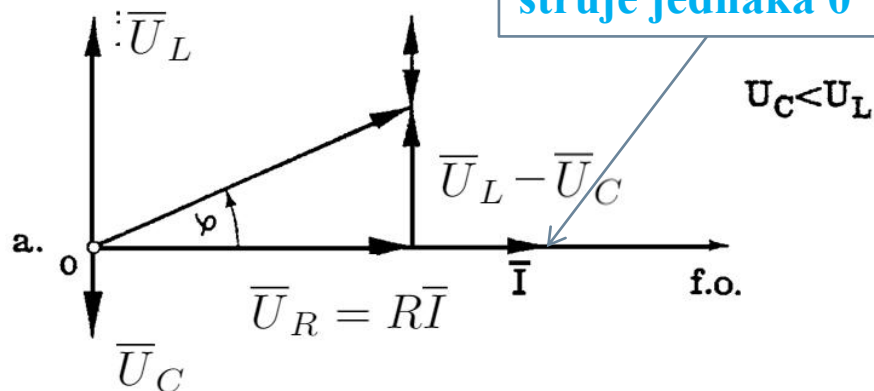
$$\bar{U}_R = \frac{R\bar{U}}{R - j \frac{1}{\omega C}}$$

$$\bar{U}_C = \frac{-j \frac{1}{\omega C} \bar{U}}{R - j \frac{1}{\omega C}}$$

# REDNO RLC KOLO - FAZORI



Pretpostavka da je početna faza struje jednaka 0



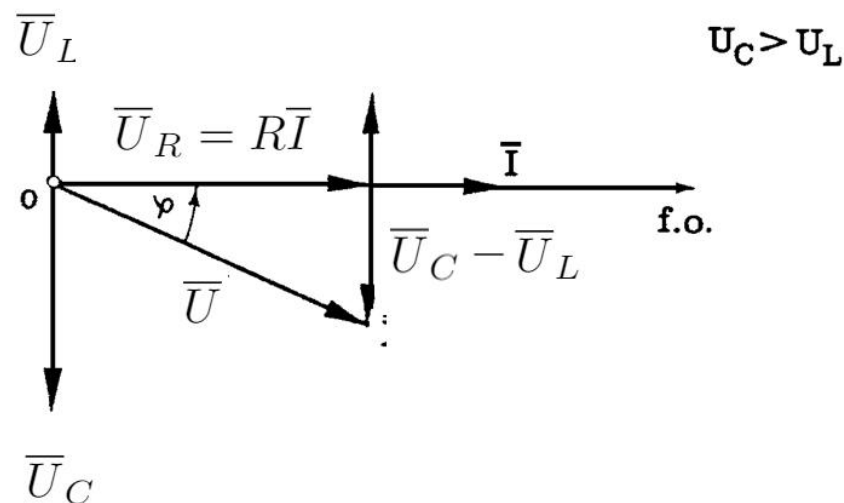
$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$$

$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_L = \omega L \angle \frac{\pi}{2} \bar{I}$$

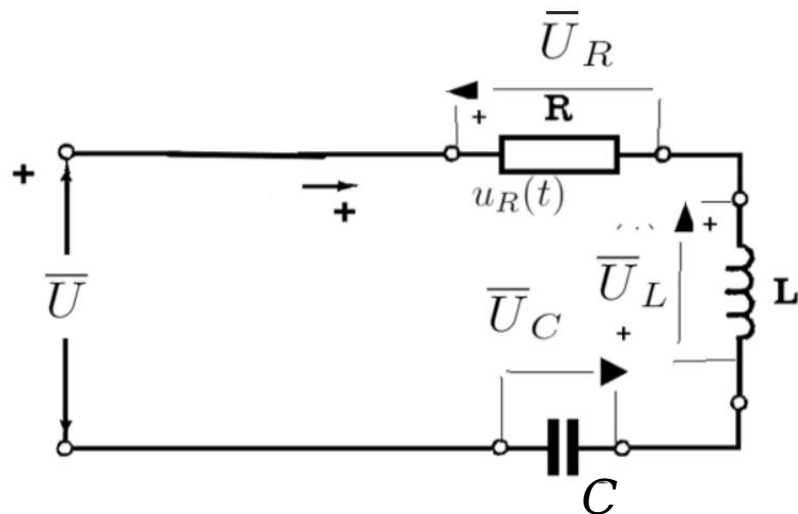
$$\bar{U}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \bar{I}$$



FAZORSKI DIJAGRAM NAPONA I STRUJE U KOLU NAIZMENIČNE STRUJE SA R,L,C REDNO VEZANIM ELEMENTIMA

# REDNO RLC KOLO - KOMPLEKSNI RAČUN

12



$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} \quad \bar{U}_L = j\omega L \cdot \bar{I}$$

$$\bar{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$$

$$\bar{U} = \left( R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \cdot \bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\bar{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad \bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}}$$

$$\bar{U}_R = \frac{R\bar{U}}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

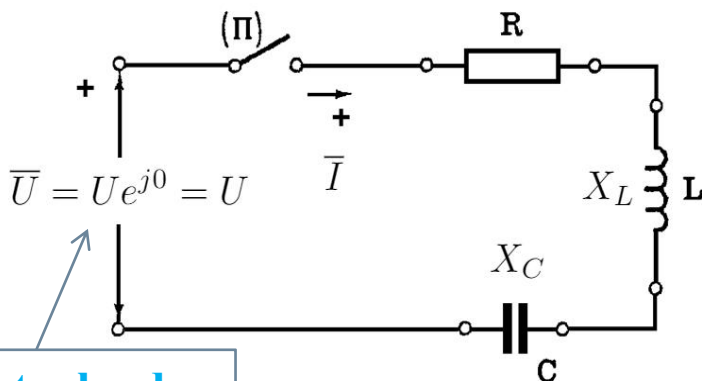
$$\bar{U}_L = \frac{j\omega L\bar{U}}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\bar{U}_C = \frac{-j \frac{1}{\omega C} \bar{U}}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

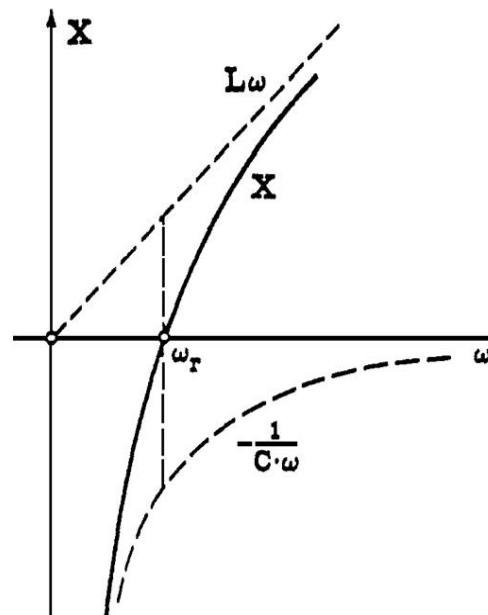
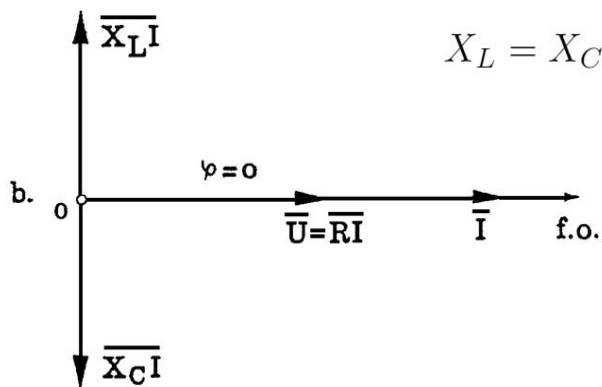
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

# REDNO RLC KOLO - REZONANCIJA

- Rezonancija u rednom RLC kolu nastaje kada je ukupna impedansa minimalna, odnosno struja maksimalna.



Pretpostavka da je početna faza napona 0



$$\bar{I} = \frac{U}{R + j(X_L - X_C)}$$

$$X_L = X_C \Rightarrow \bar{Z} = Z = R$$

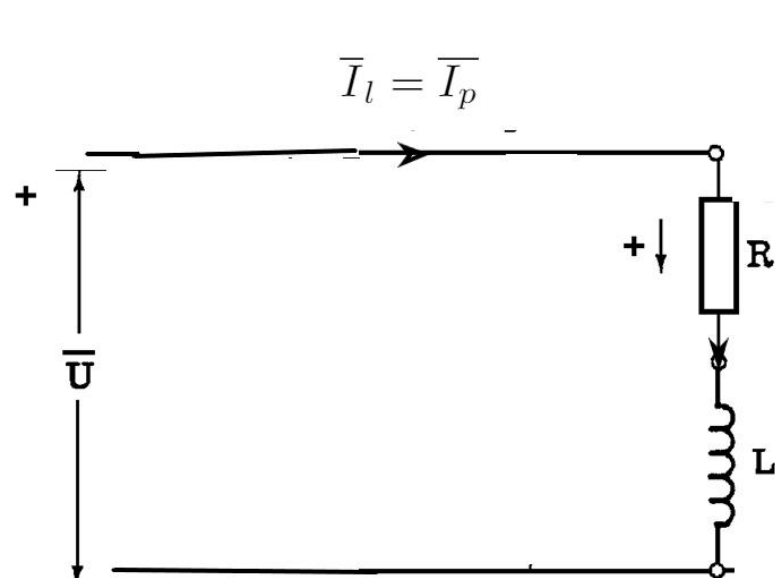
$$\bar{I} = I = \frac{U}{R} = I_{max}$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

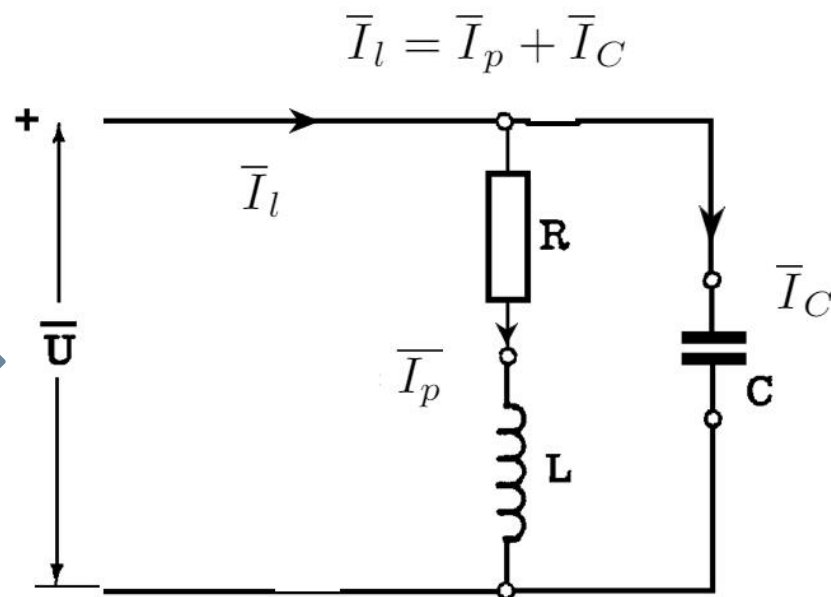
- Popravka faktora snage je problem koji je specifičan za elektrodistributivne sisteme.
- U praksi, prijemnici su retko samo aktivni ili samo reaktivni. Na primer, električni motor je prijemnik koji je aktivan jer se električna energija se pretvara u mehaničku, ali i reaktivan zbog induktivnosti namotaja koji čine motor.
- Za prijemnike velikih snaga teži se da se poveća faktor snage tako da postane blizak jedinici. Da bi se to postiglo, u sistem se dodaju reaktivni elementni koji imaju suprotan znak rektivne snage.
- Dodavanje reaktivnih elemenata da bi se povećao faktor snage naziva se **popravka faktora snage koji bi u idealnom slučaju trebalo da bude jednak jedinici**.
- Najčešći slučaj je da se neki induktivni element (motor) kompenzuje dodavanjem kondenzatora koji se sa priključcima motora vezuje paralelno i ovaj slučaj je dalje detaljnije analiziran.

# POPRAVKA FAKTORA SNAGE

- Na slici levo je električni model motora - induktivni element sa izvesnom otpornošću.
- Na slici desno je se motor kompenzuje dodavanjem kondenzatora koji se sa priključcima motora vezuje paralelno.



Električni model motora  
(pretežno induktivni potrošač)



Električni model motora sa  
kompenzacijom pomoću kondenzatora  
(idealno čist rezistivan potrošač)

- Faktor snage induktivnog potrošača sa slike:

$$P = RI_P^2, Q = XI_P^2 = \omega LI_P^2 = -BU^2 = \frac{\omega LU^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

- Nakon kompenzacije:

$$P_{uk} = P, Q_{uk} = Q + Q_C$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q + Q_C)^2}} = 1 \Rightarrow \mathbf{Q + Q_C = 0}$$

$$Q_C = -Q$$

$$-\omega CU^2 = -\frac{\omega LU^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\mathbf{C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}}$$

- Povezivanjem kondenzatora čija je kapacitivnost određena prethodnom formulom paralelno potrošaču dobija se ukupni faktor snage jednak 1!



- Generator se sastoji od tri namotaja koji su prostorno **pomereni za  $120^\circ = 2\pi/3$  rad** i rotiraju u homogenom magnetnom polju.
- U namorajima se indukuju tri fazno pomereni napona

$$e_1(t) = E_m \cos(\omega t)$$

$$e_2(t) = E_m \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

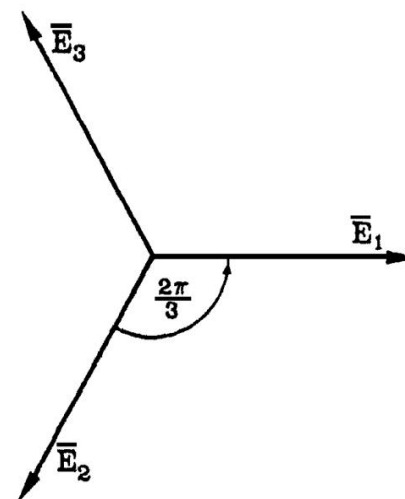
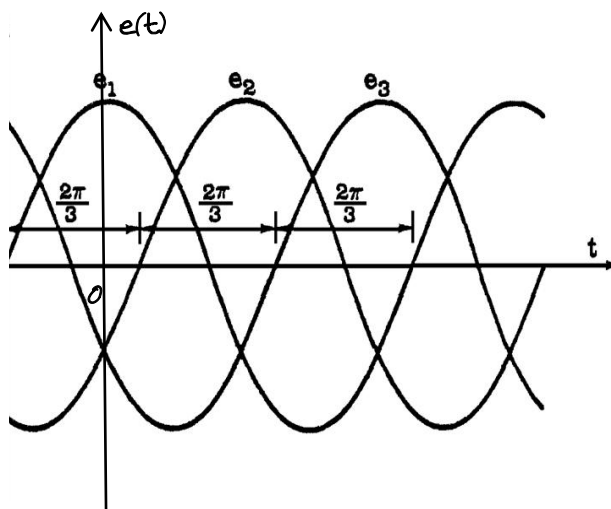
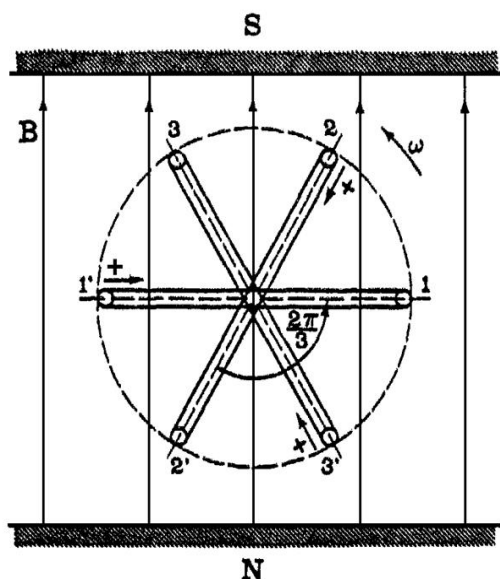
$$e_3(t) = E_m \cos(\omega t - 4\pi/3)$$



$$\bar{E}_1 = E e^{j0}$$

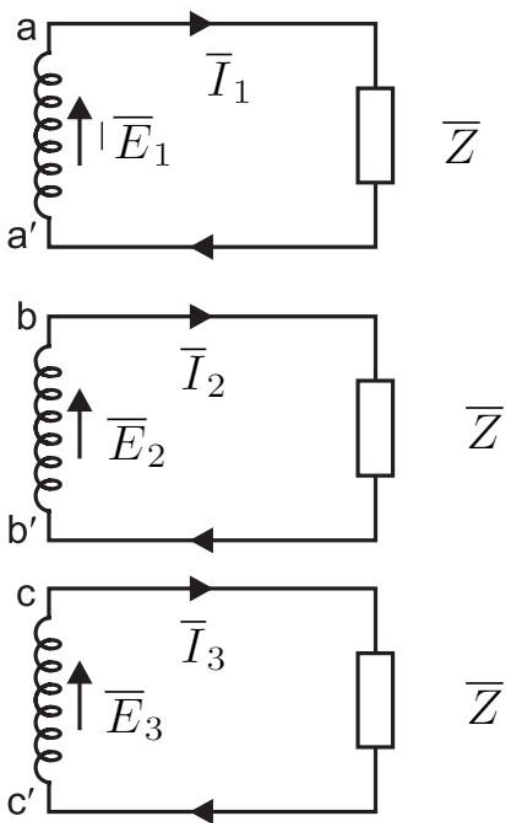
$$\bar{E}_2 = E e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{E}_3 = E e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

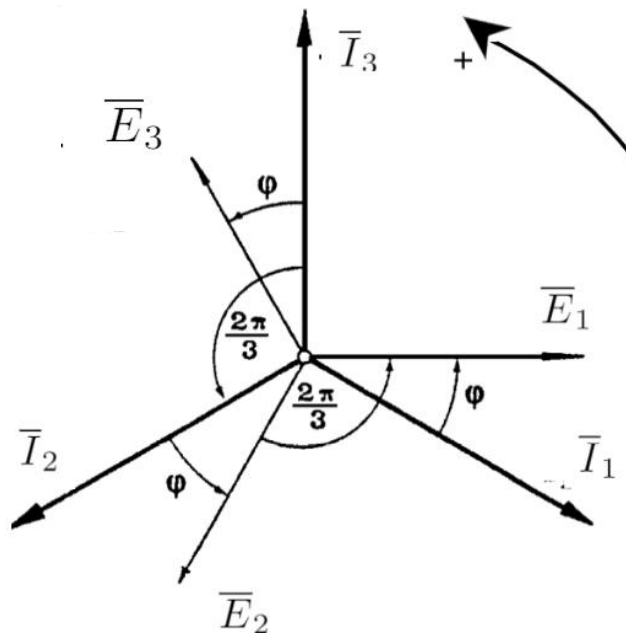


# SOMETRIČNI TROFAZNI SISTEM

- Razmatračemo samo **simetrični trofazni sistem**.
- Svaka **faza** je opterećena identičnom impedansom  $\bar{Z} = Z e^{j\varphi}$ .
- **Fazne struje** su onda takođe međusobno pomerene za  $120^\circ = 2\pi/3$ , a u odnosu na odgovarajuće **fazne napone** za ugao impedanse  $\varphi$ .



$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= E e^{j0} & \bar{I}_1 &= I e^{-j\varphi} \\ \bar{E}_2 &= E e^{-j\frac{2\pi}{3}} & \bar{I}_2 &= I e^{-j\frac{2\pi}{3} - j\varphi} \\ \bar{E}_3 &= E e^{j\frac{2\pi}{3}} & \bar{I}_3 &= I e^{j\frac{2\pi}{3} - j\varphi}\end{aligned}$$



# SIMETRIČNI TROFAZNI SISTEM

- Važi da je

$$\overline{E}_1 = E e^{j0}$$

$$\overline{E}_2 = E e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\overline{E}_3 = E e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

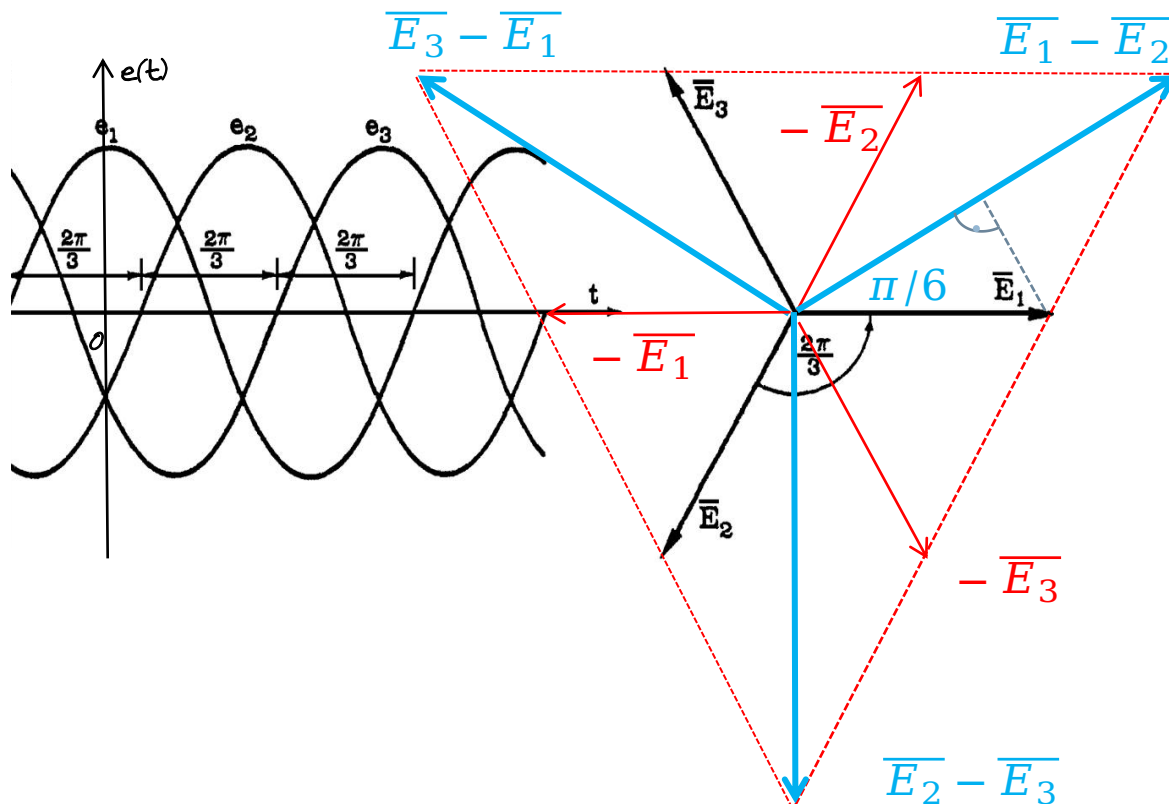
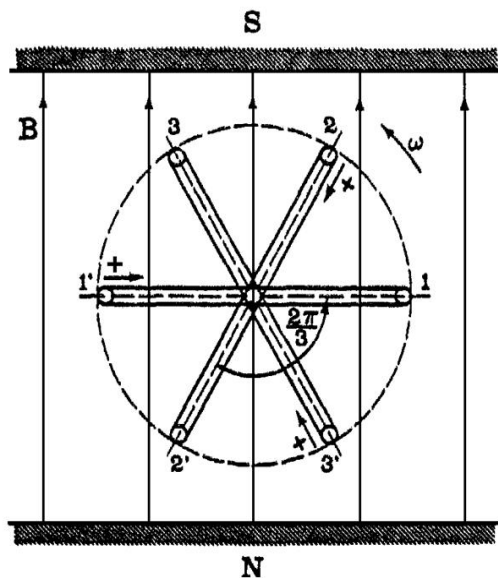


$$\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3 = 0$$

$$\overline{E}_1 - \overline{E}_2 = \sqrt{3} E e^{j\pi/6}$$

$$\overline{E}_2 - \overline{E}_3 = \sqrt{3} E e^{-j\pi/2}$$

$$\overline{E}_3 - \overline{E}_1 = \sqrt{3} E e^{j5\pi/6}$$



# SIMETRIČNI TROFAZNI SISTEM - ZVEZDA

- Simetrični trofazni sistem** gde su **generatori** povezani u **zvezdu**.
- Ka potrošaču idu tri voda sa **linijskim** naponima i strujama ( $U_{l1}, U_{l2}, U_{l3}, I_{l1}, I_{l2}, I_{l3}$ ).
- Naponi i struje generatora nazivaju se **faznim** ( $U_{f1}, U_{f2}, U_{f3}, I_{f1}, I_{f2}, I_{f3}$ ).

$$I_{lY} = I_{fY}$$

$$U_{lY} = \sqrt{3}U_{fY}$$

$$\bar{U}_{f1} = Ue^{j0}$$

$$\bar{U}_{l1} = \bar{U}_{f1} - \bar{U}_{f2}$$

$$\bar{U}_{f2} = Ue^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{U}_{l2} = \bar{U}_{f2} - \bar{U}_{f3}$$

$$\bar{U}_{f3} = Ue^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{U}_{l3} = \bar{U}_{f3} - \bar{U}_{f1}$$

$$\bar{U}_{l1} = \sqrt{3}Ue^{j\pi/6}$$

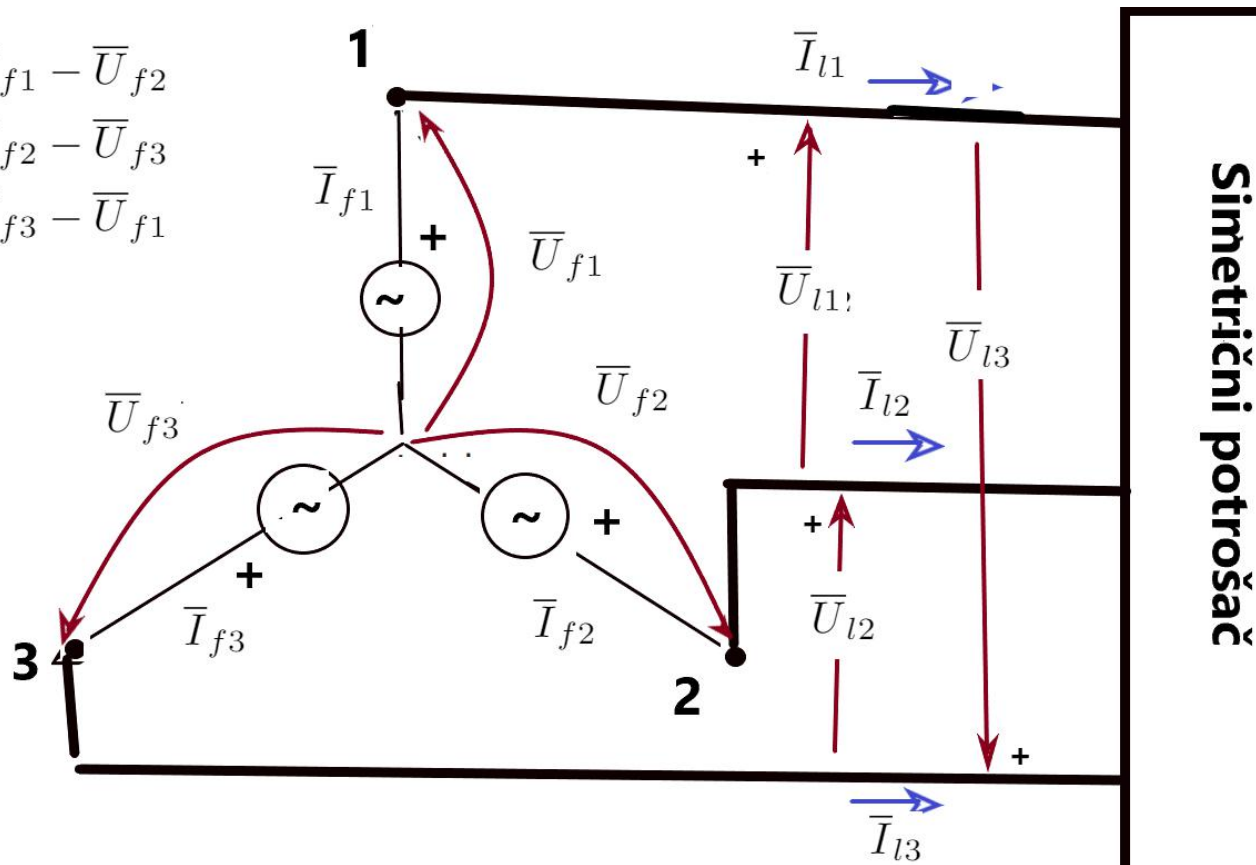
$$\bar{U}_{l2} = \sqrt{3}Ue^{-j\pi/2}$$

$$\bar{U}_{l3} = \sqrt{3}Ue^{j5\pi/6}$$

$$\bar{I}_{l1} = \bar{I}_{f1} = Ie^{-j\varphi}$$

$$\bar{I}_{l2} = \bar{I}_{f2} = Ie^{-j\varphi-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{I}_{l3} = \bar{I}_{f3} = Ie^{-j\varphi+j\frac{2\pi}{3}}$$



# SIMETRIČNI TROFAZNI SISTEM - TROUGAO

- Simetrični trofazni sistem** gde su **generatori** povezani u **trougao**.
- Ka potrošaču idu tri voda sa **linijskim** naponima i strujama ( $U_{l1}, U_{l2}, U_{l3}, I_{l1}, I_{l2}, I_{l3}$ ).
- Naponi i struje generatora nazivaju se **faznim** ( $U_{f1}, U_{f2}, U_{f3}, I_{f1}, I_{f2}, I_{f3}$ ).

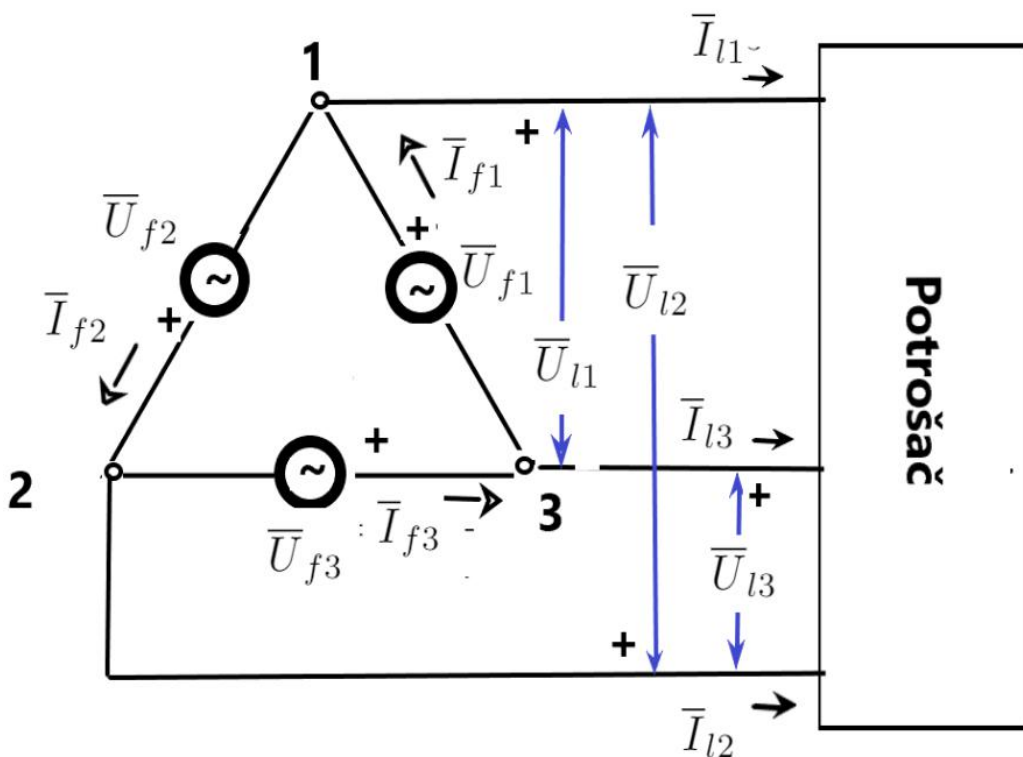
$$I_{l\Delta} = \sqrt{3} I_{f\Delta}$$

$$U_{l\Delta} = U_{f\Delta}$$

$$\bar{I}_{l1} = \bar{I}_{f1} - \bar{I}_{f2} = \sqrt{3} I e^{-j\varphi + \pi/6},$$

$$\bar{I}_{l2} = \bar{I}_{f2} - \bar{I}_{f3} = \sqrt{3} I e^{-j\varphi - \pi/2},$$

$$\bar{I}_{l3} = \bar{I}_{f3} - \bar{I}_{f1} = \sqrt{3} I e^{-j\varphi + 5\pi/6}$$



$$\bar{I}_{f1} = I e^{-j\varphi}$$

$$\bar{I}_{f2} = I e^{-j\varphi - j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{I}_{f3} = I e^{-j\varphi + j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{U}_{l1} = \bar{U}_{f1} = U e^{j0}$$

$$\bar{U}_{l2} = \bar{U}_{f2} = U e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{U}_{l3} = \bar{U}_{f3} = U e^{+j\frac{2\pi}{3}}$$

# SIMETRIČNI TROFAZNI SISTEM - POTROŠAČ

- Za **simetrični trofazni sistem** gde su **potrošači** povezani u **trougao** ili **zvezdu** relacije između linijskih i faznih napona i struja su iste.

- Za **potrošač** vezan u **trougao** važi

$$U_{l\Delta} = U_{f\Delta}, I_{l\Delta} = \sqrt{3}I_{f\Delta}$$

- Za **potrošač** vezan u **zvezdu** važi

$$U_{lY} = \sqrt{3}U_{fY}, I_{lY} = I_{fY}$$

- Za snage na simetričnom trofaznom potrošaču  $\bar{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX$  (bez obzira da li je povezan u trougao ili zvezdu) važi sledeće

$$\bar{S} = 3ZI_f^2 e^{j\varphi} = 3U_f I_f e^{j\varphi} = \sqrt{3}U_l I_l e^{j\varphi}$$

$$S = 3ZI_f^2 = 3U_f I_f = \sqrt{3}U_l I_l$$

$$P = 3RI_f^2 = 3ZI_f^2 \cos(\varphi) = 3U_f I_f \cos(\varphi) = \sqrt{3}U_l I_l \cos(\varphi)$$

$$Q = 3XI_f^2 = 3ZI_f^2 \sin(\varphi) = 3U_f I_f \sin(\varphi) = \sqrt{3}U_l I_l \sin(\varphi)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- *... videti dodatne primere sa teorijskih ispita ...*
- **Primer 6.** Ako kroz prijemnik impedanse  $\bar{Z} = 20 + j10 \, \Omega$ , postoji kompleksna struja  $\bar{I} = 4 + j3 \, \text{A}$ , odrediti kompleksni napon na prijemniku, njegovu kompleksnu (prividnu) snagu, aktivnu snagu, reaktivnu snagu i prividnu snagu.
- **Primer 7.** Za kolo sa jednim poznatim naponskim generatorom  $\bar{E}$  i dve poznate impedanse  $\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$  i  $\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2$ , odrediti sve napone i struje u kolu, ako su svi elementi kola vezani a) redno, b) paralelno.
- **Primer 8.** Induktivni potrošač  $\bar{Z} = 3 + j4 \, \Omega$  je povezan je na napon efektivne vredonsti  $U=10 \, \text{V}$  i učestanosti  $1 \, \text{rad/s}$ . Odrediti struju, aktivnu i reaktivnu snagu i faktor snage potrošača. Koliko treba da iznosi kapacitivnost kondenzatora koji se povezuje paralelno potrošaču da bi ukupni faktor snage bio jednak 1 (kompenzovan potrošač)?

- **Primer 9.** Na trofazni sistem napona  $3 \times 100 \text{ V}$ , povezan je simetričan trofazni potrošač čija je jedna impedansa  $\bar{Z} = 3 + j4 \ \Omega$ . Odrediti linijske i fazne napone i struje i kompleksnu snagu na trofaznom potrošaču, ako je potrošač povezan u a) trougao, b) zvezdu.