М1. АВГУСТ 2020.

(1) $$z^6 = \frac{2}{i-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i = e^{-\frac{5\pi i}{6}}$$

$$z = e^{\frac{2k\pi - \frac{5\pi}{6}}{6} i} = e^{\frac{12k-5}{36}\pi i} \quad \text{за } k \in \{0,1,\dots,5\}$$

(2) $$\Sigma: \begin{cases} (m+2)x + \boxed{y} + (m-3)z = -3 \\ (m-4)x - 2y + 6z = -2 \\ (m-2)x + (m-1)y + 3z = -1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} (m+2)x + \boxed{y} + (m-3)z = -3 \\ 3mx + 2mz = -8 \\ -m^2 x - (m^2-4m)z = 3m-4 \;/3 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} (m+2)x + \boxed{y} + (m-3)z = -3 \\ 3mx + 2mz = -8 \\ -m(m-12) = m-12 \end{cases}$$

1. $m=0 \Rightarrow \Sigma \sim \begin{cases} 2x + \boxed{y} - 3z = -3 \\ 0 = -8 \\ 0 = -12 \end{cases}$ систем је немогућ

2. $m=12 \Rightarrow \Sigma \sim \begin{cases} 14x + \boxed{y} + 9z = -3 \\ 36x + \boxed{24z} = -8 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Систем је једноструко [illegible] неодређен.

$x = 2\alpha \Rightarrow z = -\frac{1}{3} - 3\alpha \Rightarrow y = -\alpha$

$$R = \{(2\alpha, -\alpha, -\tfrac{1}{3} - 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

---

3. $m \notin \{0, 12\} \Rightarrow z = -\frac{1}{m} \Rightarrow x = -\frac{2}{m} \Rightarrow y = \frac{1}{m}$

Систем има јединствено решење

$$R = \{(-\tfrac{2}{m}, \tfrac{1}{m}, -\tfrac{1}{m})\}$$

③

$$A = \begin{bmatrix} a+5 & 2 & \boxed{1} \\ 3a+5 & a+4 & 2 \\ -5 & -2 & a-1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \end{matrix} \; (1-a) \sim \begin{bmatrix} a+5 & 2 & \boxed{1} \\ a-5 & a & 0 \\ -a^2-4a & -2a & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} a+5 & 2 & \boxed{1} \\ a-5 & a & 0 \\ -a^2-2a-10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-a^2-2a-10 \neq 0$$

$a \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

$a = 0 \Rightarrow r(A) = 2$

Za $a=1$ je $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det(A) = 13$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -10 & 5 & -4 \\ 9 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

$AX = B \; / A^{-1}$ sa lijeva.

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A) \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -10 & 5 & -4 \\ 9 & 2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -12 \\ 55 \end{bmatrix}$$

4.1. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} x} - 1 + 1 - \sqrt[3]{\cos(2x)}}{\left(\frac{\ln(1+3x)}{3x}\right)^2 \cdot 9x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\ln(1+3x)}{3x}\right)^2} \frac{1}{9} \left(\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \operatorname{tg} x} - 1}{x^2} - \lim_{x \to 0} \frac{(\cos 2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{x \operatorname{tg} x} - 1}{x \operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) + \lim_{x \to 0} \left(\frac{(\cos 2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos 2x - 1} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{9} \left(\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) + \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \left(1 \cdot \frac{1}{\cos 0} + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \right) = \frac{5}{3^3}$$

4.2. $x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x}$

$$(x^{x^2})' = (e^{x^2 \ln x})' = e^{x^2 \ln x} (x^2 \ln x)' = x(2\ln x + 1) x^{x^2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{x^2} - x}{\ln x} = L$$

L је облика „$\frac{0}{0}$", па су задовољени услови Лопиталове теореме.

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{(x^{x^2} - x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \to 1} \frac{x(2\ln x + 1) x^{x^2} - 1}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1(2\cdot\ln 1 + 1)\, 1^{1^2} - 1}{\frac{1}{1}} = 0$$

4.3 $$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{n}{n^2 - n + 1}\right)^{3n-1} + \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{3^n\left(4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{n}{n^2 - n + 1}\right)^{\frac{n^2 - n + 1}{n}}\right)^{\frac{3n^2 - n}{n^2 - n + 1}} +$$

$$+ \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = e^3 + \frac{0 - 1}{4 - 0} = e^3 - \frac{1}{4}$$

5

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \ln\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(0)=0 \\ f'(x) &= \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(0)=0 \\ f''(x) &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0)=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_2(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$f'''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$ С обзиром да је $f'''(0)=0$, биће

$M_2(x)=M_3(x)$, а тиме и $R_2(x)=R_3(x)$.

$$f^{IV}(x)=\frac{-6(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4}$$

$$|R_3(x)|=\frac{|f^{IV}(c)|}{4!}|x|^4$$ за неко c између 0 и x.

$x\in\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right] \Rightarrow c\in\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]$.

$$|R_3(x)|=\frac{1}{4}\left|\underbrace{\frac{c^4-6c^2+1}{(1+c^2)^4}}_{g(c)}\right||x|^4$$

$g(-c)=g(c)$ и $g(c)>0$ за $\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]$ па је довољно наћи минимум и максимум функције $g(c)$ на $\left[0,\frac{1}{10}\right]$. Ако је $m=\min g(c)$ на $\left[0,\frac{1}{10}\right]$

$M=\max g(c)$ на $\left[0,\frac{1}{10}\right]$,

онда је $m\le|g(c)|\le M$ за $c\in\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]$

Ако је још и $0\le m$, онда важи

$$|g(c)|\le M \quad \text{за } c\in\left[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right]$$

$$g'(c) = \frac{-4c\,(c^4 - 10c^2 + 5)}{(1+c^2)^5}.$$

На $\left(0, \frac{1}{10}\right)$ је $g'(c) < 0$, па је $g(c)$ опадајућа на $\left(0, \frac{1}{10}\right)$.

$$g\left(\frac{1}{10}\right) \leq g(c) \leq g(0) \quad \text{за } c \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$$

$$g\left(\frac{1}{10}\right) > 0 \Rightarrow \quad |g(c)| \leq g(0) \quad \text{за } c \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$$

$$\left|\frac{c^4 - 6c^2 + 1}{(1+c^2)^4}\right| \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|R_3(x)| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^4}}$$

---

6. $f(x) = (x-1)^{3/2} e^{-x}$

1. $D = [1, +\infty)$
2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\quad N = (1, 0)$ једина нула ф-је.

За $x > 1$ је $f(x) > 0$

3. f није ни парна ни непарна (домен није симетричан)
   f није периодична (домен је ограничен одоздо)
   f је непрекидна на целом домену
4. f нема В.А. (због облика домена)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^{3/2}}{e^x} = 0 \Rightarrow$$

ПРАВА $y = 0$ је Х.А. (са десне стране)

5. $f'(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)\sqrt{x-1}\, e^{-x}$

	1		5/2	
f'		+	0	−
f		↗		↘

$M_1 = (1, f(1)) = (1, 0) = N$ је лок. минимум.

$M_2 = \left(5/2, f(5/2)\right) = \left(5/2, \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} e^{-5/2}\right)$ је локални максимум.

6. $f'' = \dfrac{4x^2 - 20x + 19}{4e^x \sqrt{x-1}}$ $\qquad x_{1/2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{6}}{2}$

	1		$\frac{5-\sqrt{6}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{6}}{2}$	
f''		+	0	−	0	+
f		∪	P_1	∩	P_2	∪

$$P_1 = \left(\frac{5-\sqrt{6}}{2}, \left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)^{3/2} e^{-\frac{5-\sqrt{6}}{2}}\right)$$
$$P_2 = \left(\frac{5+\sqrt{6}}{2}, \left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)^{3/2} e^{-\frac{5+\sqrt{6}}{2}}\right)$$

превојне тачке

7.