

M1sept12020

Thursday, September 10, 2020 8:27 PM



M1sept12020

Писмени испит из Математике 1, 11. септембар 2020.

1 [13] Међу свим комплексним бројевима таквим да је

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |z + 1|$$

наћи онај који има најмањи имагинарни део па за њега израчунати $(\bar{z} + 1)^3$.

2 [15] У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ решити систем једначина

$$-ax - y + 2z = a - 3$$

$$x + y + z = 1$$

$$x + ay + 3z = a + 1$$

$$(a + 1)x + 2y + az = 3.$$

3 [12] Решити матричну једначину $AXB = C + AX$ ако су дате

матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

4 [23] Одредити следеће лимесе:

(1) [8] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos^2 x}}{\ln(1 + 3x \operatorname{tg} x)}$

(2) [10] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

(3) [5] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n) \cdot \cos(n^2)}{n} + \frac{3^n - 4^n}{2 \cdot 5^n + 6}$.

5 [17] Дата је функција $g(x) = x + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x}$.

(1) [9] Одредити домен и асимптоте дате функције.

(2) [8] Одредити Тејлоров полином другог степена око тачке $x_0 = 1$.

6 [20] Испитати функцију $f(x) = (x + 1) \ln^2(x + 1)$ и нацртати њен график.

1. $|z| = \frac{1}{|z|} = |z+1| \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x^2 + y^2 = 1$

$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 8

$(z+1)^3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 = -1$ 5

2.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 & a+1 & \\ -a & -1 & 2 & a-3 & \\ a+1 & 2 & a & 3 & \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 & a & \\ 0 & a-1 & a+2 & 2a-3 & \\ 0 & 1-a & -1 & 2-a & \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & a-1 & 2 & a & \\ 0 & 0 & a & a-3 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \end{array} \right] \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} /-a \\ /-a \end{array}$$
 10

$\bar{I} \quad a \neq -3 \quad r(A) = 3 < 4 = r(A_p) \quad \text{H.P.} \quad 2$

$\bar{II} \quad a = -3 \quad r(A) = 3 = r(A_p)$

РЕДУЦЕВАНО РЕШЕЊЕ 3

$(x, y, z) = (\quad , \quad , \quad)$

3. $AXB = C + AX$

$AX(B-E) = C$

$x = A^{-1} \cdot C \cdot D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot C \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \\ -5 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 4, 2, 1

4. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos^4 x}}{\ln(1 + 3x \operatorname{tg} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \sin^2 x)^{1/3}}{-\sin^2 x} \cdot \frac{-\sin^2 x}{x^2} \cdot x^2 = \frac{-1/3}{3} = -\frac{1}{9}$ 8

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln^2 x + 2 \ln x) - \ln x}{\ln x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln x + 2} \right)$

$-1) = -1 \Rightarrow A = e^{-1}$ 10

$$-1) = -1 \Rightarrow A = e^{-1} \quad 10$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n) \cdot \cos(n^2)}{n} + \frac{3^n - 4^n}{2 \cdot 5^n - 6} = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{2 - \frac{6}{5^n}} = 0 \quad 5$$

orl. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$5) \quad g(x) = x + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x}$$

$$1) \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \bar{\pi} \frac{1}{2} \quad 2 \Rightarrow \text{HEMA B.A.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{HEMA X.A.} \quad 2$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \quad 1, \quad \alpha = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x} = \frac{\pi}{4} \quad 2$$

$$y = x + \frac{\pi}{4} \quad 1 \quad \exists \in \text{K.A.} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

$$2) \quad g'(x) = \frac{2x^2 + 2x}{2x^2 + 2x + 1} \quad 3, \quad g''(x) = \frac{-(4x + 2)}{(2x^2 + 2x + 1)^2} \quad 3$$

$$g(1) = 1 + \operatorname{arctg} 2$$

$$g'(1) = \frac{4}{5}, \quad g''(1) = \frac{6}{25}$$

$$T_2(x) = 1 + \operatorname{arctg} 2 + \frac{4}{5} \cdot (x-1) + \frac{6}{25} \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \quad 2$$

$$6. 1) \quad x \in (-1, +\infty) \quad 1$$

$$2) \quad \text{HYAA } 0 \leq x < 1$$

$$3) \quad \text{HYAA } 0 \leq x < 1 \quad \text{HYAA } \text{HEHAPHA}$$

$$y \geq 0, \quad x \in D \quad 1$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\lim_{x \rightarrow -1+0} (x+1)}{\frac{1}{x+1}} = \dots = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow -1+0} (x+1) = 0^+ \quad 3$$

$$1) \quad f(x) \quad 1$$

$$x+1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad 1$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad 1 \Rightarrow \text{НЕМА АСИМПТОТА} \quad 1$$

$$5. \quad y' = \ln(x+1) (\ln(x+1) + 2) \quad 3$$

$$6. \quad y'' = \frac{2(\ln(x+1) + 1)}{x+1} \quad 3$$

$$y'' \begin{array}{c|c|c} -1 & e^{-1} & + \\ \hline y & \cap & \cup \end{array} \quad 2$$

$$y' \begin{array}{c|c|c|c} -1 & e^{-2} & -1 & 0 \\ \hline y & + & - & + \\ \hline & \nearrow & \searrow & \nearrow \end{array}$$

$$\text{loc max} \left(e^{-2} - 1, \frac{4}{e^2} \right) \quad 3$$

$$\text{loc min} (0, 0)$$

