Скрипта - радна верзија

у константној доради

Отворени и затворени интервали

Дефиниција 1. У уређеном скупу реалних бројева отворени интервали су интервали облика (за неке $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$):

$$(-\infty, +\infty),\ (-\infty, a),\ (a, +\infty) \text{ и } (a, b),$$

док су затворени интервали облика

$$(-\infty, +\infty),\ (-\infty, a],\ [a, +\infty) \text{ и } [a, b].$$

Осим њих постоје још и интервали који нису ни отворени, ни затворени. То су тачно интервали облика

$$[a, b) \text{ и } (a, b].$$

Напомена: $-\infty$ и $+\infty$ **нису** реални бројеви. Ми их овде користимо као ознаке иако постоје области математике у којима је згодно посматрати проширен скуп реалних бројева $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ где се уређеном скупу реалних бројева смо додају два елемента и то тако да је $-\infty < x < +\infty$ за сваки реалан број x. У том случају скуп $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ означавамо са $\overline{\mathbb{R}}$ и посматрамо само уређење на њему, јер операције сабирања и множења не можемо продужити тако да задрже ,,лепа" својства на која смо навикли у скупу $\mathbb{R}$ [1] Треба разликовати ознаку $+\infty$ од ознаке ∞, јер постоје области математике у којима се ради са $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, дакле са реалиним бројевима којима се не додају две тачке, већ само једна тачка.

Чињеница 1. Коначан пресек отворених интервала је или отворен интервал или празан скуп. Пресек затворених интервала је или затворен интервал или празан скуп.

Да је услов ,,коначан" неопходан у првој од особина, показује пример интервала $I_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\right)$ за коју је пресек $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = [1, 2]$.

[1] На пример, у скупу реланих бројева ако је $0 < x$, онда је $x < 2x$. Ако бисмо хтели да то важи и у проширеном скупу реланих бројева, онда би морало бити $+\infty < 2(+\infty)$. Слично је са особином да сваки $x \neq 0$ има инверз x^{-1} и да је $(x^{-1})^{-1} = x$ као и да из $0 < n < x$ следи $0 < x^{-1} < n^{-1}$. Шта би било $(+\infty)^{-1}$ и $(-\infty)^{-1}$? Пошто је $0 < n < +\infty$ испуњено за сваки природан број n, онда би следило да је $0 < (+\infty)^{-1} < n^{-1}$ испуњено за свако n, па бисмо морали да имамо бесконачно малу величину, позитиван број мањи од свих ,,стандардних" позитивних реалних бројева.

Дефиниција 2. Нека је $a \in \mathbb{R}$. За отворени интервал који садржи тачку a кажемо да је околина тачке a. Ако је $M > 0$, онда за интервал $(a - M, a + M)$ кажемо да је M-околина тачке a.

Ако је $M \in \mathbb{R}$, онда за интервал $(-\infty, M)$ кажемо да је M-околина тачке $-\infty$, а за интервал $(M, +\infty)$ кажемо да је M-околина тачке $+\infty$.

Ако је $a \in \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$, онда за M-околину тачке a из које је избачена сама тачка a, кажемо да је шупља M-околина тачке a.

Дакле, шупља M-околина тачке $-\infty$ се не разликује од M-околине тачке $-\infty$. Слично, шупља M-околина тачке $+\infty$ се не разликује од M-околине тачке $+\infty$. За било који реални број a, њена шупља M-околина је скуп $(a-M, a+M) \setminus \{a\}$

Низови

Дефиниција 3. За пресликавање коме је домен N_0, N или $N \setminus \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ (за неко $k \in N$) кажемо да је низ.

Уместо да кажемо да је кодомен уоченог низа је скуп матрица (скуп вектора, скуп функција, скуп реалних бројева, скуп природних бројева, скуп комплексних бројева ...), чешће кажемо да је у питању низ матрица (вектора, функција, реалних бројева, природних бројева, комплексних бројева ...). За низ реалних бројева често кажемо да је реалан низ. Иако је уобичајено да за фукнкције користимо ознаке f, g, h, F, G, H, f_1, f_2..., реалне низове чешће означавамо са a, b, c, d, x, y и уместо $a(n)$ пишемо a_n. За a_1 кажемо да је први члан низа, за a_2 кажемо да је други члан низа итд. Када за промењљиву n задамо a_n, онда кажемо да је a_n општи члан низа. Уместо $a : \mathbb{N} \longrightarrow A$ пишемо $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или само наводимо општи члан a_n.
У наставку текста кад кажемо ,,низ”, мислимо на реалан низ, осим ако другачије не нагласимо.

Ако је a_n низ са доменом $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, онда је са $b_n = a_{n+k}$ дефинисан низ са доменом $\mathbb{N}$. С обзиром на ту везу, довољно је изучавати низове са доменом N. У наставку текста кад кажемо ,,низ”, ако другачије не кажемо, мислимо на низ коме је домен $\mathbb{N}$.

Дефиниција 4. За низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да је (строго) растући ако $a_n < a_{n+1}$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако $a_n \leqslant a_{n+1}$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$, онда кажемо да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неопадајући и користимо ознаку $a_n \nearrow$. Слично, ако $a_n > a_{n+1}$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$, онда кажемо да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (строго) опадајући, а ако $a_n \geqslant a_{n+1}$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$, онда кажемо да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неопадајући и користимо ознаку $a_n \searrow$. Низ је монотон уколико је нерастући или је неопадајући.

Очигледно, сваки растићи низ је уједно и неопадајући и сваки опадајући низ је уједно и нерастући.

Пример 1. Нека су $a_n = 2n - 1$, $b_n = (-1)^n n$ и $c_n = \max\{10 - n, 2n - 1\}$. Тада је $a_n < a_{n+1}$ еквивалентно са $2n - 1 < 2n + 1$, а тиме и са $0 < 2$. Дакле за сваки природан број n је испуњено $a_n < a_{n+1}$, па је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ растући.

За низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи да је сваки непаран члан негативан и сваки паран члан позитиван, па $b_{n+1} \leqslant b_n$ не важи за сваки непаран n и $b_{n+1} \geqslant b_n$ не важи за сваки паран n. Дакле $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није ни неопадајући ни нерастући.

Како је $n \geqslant 4$ решење неједначине $2n-1 \geqslant 10-n$ у скупу природних бројева, то је за $n \geqslant 4$ испуњено да је $c_n = 2n-1$, а за $n \leqslant 3$ је $c_n = 10-n$. Важи $c_1 = 9$, $c_2 = 8$ и $c_3 = 7$, па је $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3$ и $c_4 \leqslant c_5 \leqslant c_6 \leqslant c_7 \leqslant \dots$. Дакле, није испуњено $c_n < c_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ (није испуњено $c_1 < c_2$ ни $c_2 < c_3$), па низ није растући. Али је $c_n < c_{n+1}$ испуњено за свако $n \geqslant 4$, па би низ био растући да то ,,не квари неколико првих чланова". То је суштинска разлика између низова $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ако низу $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ одбацимо коначно много чланова, он ће постати растући, док низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неће постати ни растући ни опадајући осим ако не одбацимо бесконачно много његових чланова (конкретно, или да одбацимо све парне или да одбацимо све непарне) За низове као што је $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ уводимо нову дефиницију.

Дефиниција 5. За низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да је <u>(строго) растући за довољно велико n</u> или да је <u>(строго) растући почевши од неког n_0</u> ако постоји природан број n_0 такав да $x_n < x_{n+1}$ важи за свако $n \geqslant n_0$. Слично се дефинишу појмови низа неопадајућег за довољно велико n, (строго) опадајућег низа за довољно велио n и неопадајућег низа за довољно велико n.

Уопштено, ако за низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ постоји природан број n_0 такав да нека особина важи за x_n кад год је $n \geqslant n_0$, онда кажемо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има ту особину <u>за довољно велико n</u> или <u>почевши од неког n_0</u>.

Дефиниција 6. Ако је $m < a_n$ испуњено за све природне бројеве n, онда кажемо да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>ограничен одоздо бројем m</u> или да је <u>ограничен са доње стране бројем m</u>. Кажемо да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>ограничен одоздо</u> или да је <u>ограничен са доње стране</u> ако је ограничен одоздо неким бројем.

Слично, ако је $a_n < M$ испуњено за све природне бројеве n, онда за низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да је <u>ограничен одозго бројем M</u> или да је <u>ограничен са горње стране бројем M</u>. Кажемо да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>ограничен одозго</u> или да је <u>ограничен са горње стране</u> ако је ограничен одозго неком бројем.

Ако постоји $K \in (0, +\infty)$ такво да је $-K < a_n < K$ испуњено за све природне бројеве n, онда за низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да је <u>ограничен бројем K</u>. Кажемо да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>ограничен</u> ако је ограничен неким бројем.

Очигледно је да је низ ограничен ако и само ако је оганичен са доње и горње стране. Ако постоје m и M такви да је $m < a_n$ и $a_n < M$ и ако за K изаберемо $\max\{|m|, |M|\}$, онда ће важити $-K < a_n < K$ и обрнуто, ако важи

$-K < a_n < K$ и ако за m и M изаберемо редом бројеве $-K$ и K, онда ће важити $m < a_n$ и $a_n < M$.
У дефиницији ограниченог (са доње, са горење) стране смо свуд уместо $<$ и $>$ могли ставити $\leqslant$ и $\geqslant$ и добили бисмо еквивалентну дефиницију.

Лема 1. Ако је низ неопадајући за довољно велико n, онда је ограничен одоздо. Ако је низ нерастући за довољно велико n, онда је ограничен одозго.

Сада ћемо на примеру неколико низова илустровати разна својства низова. То су низови $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$, $b_n = n - n^2$, $c_n = \dfrac{2n(-1)^n}{n+1}$, $d_n = n^{(-1)^n}$и $y_n = \sin n$. **До теореме 4, кад споменемо низове a_n, b_n, c_n, d_nи y_n мислимо на управо наведене низове.**

Посматрајмо најпре низ $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$. Важи $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{3}{2}$, $a_3 = \dfrac{2}{3}$, $a_4 = \dfrac{5}{4}$, $a_5 = \dfrac{4}{5}$, $a_6 = \dfrac{7}{6}$, $a_{10} = \dfrac{11}{10}$, $a_{11} = \dfrac{10}{11}$, $a_{100} = \dfrac{101}{100}$, $a_{101} = \dfrac{100}{101}$, $a_{1000} = \dfrac{1001}{1000} \dots$

Ако се ови чланови запишу у децималном облику или ако се нацртају на бројевној оси лако се примети да се групишу око броја 1. Дакле интуитивно је јасно да се чланови низа неограничено приближавају броју 1. Слично је интуитивно јасно да низ $b_n = n - n^2$ неограничено опада и да би његови чланови једино могли да се групишу око $-\infty$, када бисмо на реалне бројеве додали $-\infty$ и да за низ $c_n = \dfrac{(-1)^n 2n}{n+1}$ не постоји број коме се сви чланови неограничено приближавају нити неограничено расту или неограничено опадају јер се прани чланови групишу око броја 2, а непарни око броја -2. За парне бројеве n је $d_n = n$ и интуитивно је јасно је да парни чланови низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ теже ка $+\infty$. За непарне бројеве n је $d_n = \frac{1}{n}$ и интуитивно је јасно да се непарни чланови низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ групишу око 0. Управо у том „интуитивном” је проблем. Први проблем је у томе што постоје низови код којих није тако лако имати интуицију чему теже. На пример, низови

$$e_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad \text{и} \quad y_n = \sin n$$

задају знатно компликованији задатак интуицији по питању да ли се групишу око неког броја или неограничено расту или неограничено опадају или не постоји елемент скупа $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ око кога се сви чланови групишу. Други проблем је у томе што интуиција може да погреши, па је потребно направити прецизну дефиницију онога што је примеру низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ интуитивно јасно и што га издваја од низова $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Једно резоновање би могло бити следеће: „неограничено” у интуицији да се низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неограничено приближава ка 1 можемо да оправдамо тиме што ма колико мало растојање изаберемо, можемо наћи члан низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ на растојању од тачке 1 мањем од изабраног. Та се чињеница може исказати и на следећи начин: За свако $M > 0$ постоји n такво да је $|a_n - 1| < M$ или, еквивалентно, да се за свако $M > 0$ може наћи n такво да је $a_n \in (1 - M, 1 + M)$. Овај услов је очигледно потребан, али није довољан јер и за свако $M > 0$ можемо наћи n такав да је $a_n \in (\frac{3}{2} - M, \frac{3}{2} + M)$; конкретно, за $n = 2$ то важи јер је $a_2 = \frac{3}{2}$, а низ a_n, по нашој интуицији, не тежи ка $\frac{3}{2}$ већ ка 1, тј. око броја 1 се групише бесконачно много њих, док се око броја $\frac{3}{2}$ не групишу, већ је само један члан низа једнак $\frac{3}{2}$. Слично, за свако $M > 0$ можемо наћи n такав да је $a_n \in (\frac{2}{3}-M, \frac{2}{3}+M)$ јер је $a_3 = \frac{2}{3}$. Желимо да опишемо да се чланови низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ све више приближавају броју 1 и да их има бесконачно много, не само један (као у случају члана a_2 и броја $\frac{3}{2}$) или коначно много њих. Оно што разликује бројеве $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$ од броја 1 када је у питању неограничено приближавање чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неком броју је, између осталог чињеница да за свако $M > 0$ у интервалиу $(1 - M, 1 + M)$ има бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ док у $(\frac{3}{2} - M, \frac{3}{2} + M)$ и $(\frac{3}{2} - M, \frac{3}{2} + M)$ нема бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Шта више, за било које $a \neq 1$ постоји неко $M > 0$ (на пример $M = \frac{|a-1|}{3}$) такво да се у интервалу $(a - M, a + M)$ налази највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Зато поправљамо услов на следећи начин: За свако $M > 0$ постоји бесконачно много бројева n таквих да је $|a_n - 1| < M$ или, еквивалентно, да се у свакој M-околини тачке 1 налази се бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Овај услов је потребан, али није довољан. Њиме смо делимично описали „гомилање” чланова низа око броја 1, али се нисмо обезбедили да је број 1 једини са том особином, што у случају низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ очигледно важи. За разлику од низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у коме се чланови низа „гомилају” око једне тачке, низ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има две такве тачке. У свакој M-околини тачке -2 налази бесконачно много чланова низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и у свакој M-околини тачке 2 налази бесконачно много чланова низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а за низ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не мислимо да тежи броју -2, нити мислимо да тежи броју 2. Ситуација је још гора када се посматра низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Из особина синуса следи да како год изаберемо број $r \in [-1, 1]$, у свакој M-околини броја r има бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ова интуиција „нагомилавања” заслужије да се формализује.

Дефиниција 7. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Кажемо да је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако се у свакој M-околини тачке a налази бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Лема 2. (1) Ако је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неопадајући за довољно велико n, a му је тачка нагомилавања и $b < a$, онда b не може бити тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Ако је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нерастући за довољно велико n, a му је тачка нагомилавања и $b > a$, онда b не може бити тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Доказ. (1) Нека је $M = \frac{a-b}{2}$. Тада су M-околине тачака a и b дисјунктне. Нека је n_0 минимум скупа $\{n \,|\, x_n \in (a-M, a+M)\}$. С обзиром да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неопадајући за свако $n > n_0$, важиће $x_n \geqslant x_{n_0}$. Ово, уз чињенуцу да је $x_{n_0} \in (a-M, a+M)$ и да су M-околине тачака a и b дисјунтне и да је $b < a$, за последицу даје да за свако $n > n_0$ члан x_n не може бити у M-околини тачке b. Дакле у M-околини тачке b је највише коначно много тачака низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па b не може бити тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Други део леме се слично доказује. □

Директна последица претходне леме је следеће тврђење.

Теорема 1. Монотон (за довољно велико n) низ не може имати више од једне тачке нагомилавања.

Доказ. Свођењем на контрадикцију ћемо показати да монотон низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не може имати више од једне тачка нагомилавања. Зато, претпоставимо да су c и d тачке нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и да је $c > d$. Ако је низ неопадајући, онда по делу (1) леме 2 за $a = c$ и $b = d$, следи да d није тачка нагомилавања, што је у протвречју са претпоставком да су и c и d тачке нагомилавања.

Ако је низ нерастући, онда по делу (2) леме 2 за $a = d$ и $b = c$, следи да c није тачка нагомилавања, што је у протвречју са претпоставком да су и c и d тачке нагомилавања. Дакле, претпоставка да низ има више од једне тачке нагомилавања је неодржива. □

Вратимо се на низове из примера. Дакле, тачке нагомилавања низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ су тачно бројеви -2 и 2, док је $[-1, 1]$ скуп тачака нагомилавања низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. За разлику од њих, низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има тачно једну тачку нагомилавања 1. Можемо закључити да је услов да низ има само једну тачку нагомилавања потребан да бисмо рекли да низ тежи тој тачки нагомилавања. Иако пример низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сугерише да је тај услов довољан, када у анализу проблема укључимо низ $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ видимо да то није довољно. Наиме, ако је n непаран број, дакле облика $2k-1$ за неко $k \in \mathbb{N}$, онда је $d_n = d_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$. Нека је $M > 0$. Услов $d_{2k-1} \in (-M, M)$ је еквивалентан услову $\frac{1}{2k-1} < M$, а тиме и $\frac{1}{2M} + \frac{1}{2} < k$. Како последњу неједнакост задовољава бесконачно много природних бројева k, а за сваки такав број је $d_{2k-1} \in (-M, M)$, закључујемо да постоји бесконачно много чланова низа $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који су у M-околини тачке 0. Како то важи за свако $M > 0$, закључујемо да је 0 тачка нагомилавања низа $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Није тешко приметити да за сваки други реалан број a постоји његова M-околина која садржи највише коначно много чланова низа $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Дакле, низ $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има тачно једну тачку нагомилавања и то је нула, али не можемо рећи да низ тежи нули кад на памети имамо да се парни чланови низа удаљавају од броја 0. Дакле, описали смо како тачно да разликујемо низове као што је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ од низова као што су $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, али још нисмо описали како тачно да разликујемо низове као што је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ од низова као што је $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Такву ситуацију можемо поправити тиме што ћемо рећи да се ван сваке M-околине броја 1 налази највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.[2] Оваква формулација у потпуности описује интуитивну представу када неки низ тежи ка неком броју и низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ раздваја од низова као што су $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Дефиниција 8. Кажемо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тежи броју $a\in\mathbb{R}$ или да конвергира ка $a\in\mathbb{R}$, ако се ван сваке M-околине броја a налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Кажемо и да је број a лимес или граница или гранична вредност низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишемо $\lim x_n = a$. У том случају кажемо да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан. За низ који није конвергентан, кажемо да је дивергентан.

Напомена 1. Еквивалент дефиниције $\lim a_n = a$ је:

- За свако $M>0$ постоји n_0 такво да је $a_n\in(a-M,a+M)$ кад год је $n>n_0$, тј.
- За свако $M>0$ постоји n_0 такво да је $|a_n-a|<M$ кад год је $n>n_0$.

Нотација 1. Осим ознаке $\lim a_n = a$, користе се још ознаке:

- $a_n \longrightarrow a$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$,
- $a_n \longrightarrow a, \quad n\longrightarrow +\infty$ и
- $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

Пример 2. (1) Број a је граница низа коме је сваки члан једнак броју a, тј. $\lim a = a$. Заиста, како је за свако n испуњено $x_n = a$, онда се у свакој M-околини броја a налазе сви чланови низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па је $\lim x_n = a$.

(2) $\lim\frac{1}{n} = 0$. То следи из чињенице да за свако $M>0$, постоји[3] природан број $n_0 > \frac{1}{M}$ (n_0 може бити било који природан број већи од $[\frac{1}{M}]$). Ако је $x_n = \frac{1}{n}$, онда је $0 < x_n < M$ испуњено за свако $n > n_0$, па су ван M околине тачке 0 само неки од $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0}\}$. Дакле, за сваку M-околину тачке 0 важи да је ван ње највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, што по дефиницији значи да је $\lim x_n = 0$.

[2] Наравно, тада ће у свакој M-околине броја 1 бити бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
[3] Архимедово својство

(3) $\lim(a+\frac{(-1)^n}{n})=a$. Слично као малопре, из чињенице да за свако $M>0$ постоји природан број $n_0>\frac{1}{M}$, закључујемо да $|x_n-a|<M$ кад год је $n>n_0$, што по дефиницији (напомена 1) значи да је $\lim x_n=a$.

Није тешко формулисати својство које ће низове $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ где је $b'_n=-b_n$ за свако $n\in\mathbb{N}$, разликовати од низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Дефиниција 9. Кажемо да је $+\infty$ граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или да је $+\infty$ лимес низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или да x_n тежи ка $+\infty$ и пишемо $\lim x_n=+\infty$ ако се за свако $K\in\mathbb{R}$ ван интервала $(K,+\infty)$ налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Кажемо да је $-\infty$ граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или да је $-\infty$ лимес низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или да x_n тежи ка $-\infty$ и пишемо $\lim x_n=-\infty$ ако се за свако $K\in\mathbb{R}$ ван интервала $(-\infty,K)$ налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. У случају када је x_n тежи ка $+\infty$ или x_n тежи ка $-\infty$ кажемо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ одређено дивергира.

Напомена 2. Еквивалент дефиниције $\lim x_n=+\infty$ је:

- За свако $K\in\mathbb{R}$ постоји n_0 такво да је $x_n\in(K,+\infty)$ кад год је $n>n_0$, тј.
- За свако $K\in\mathbb{R}$ постоји n_0 такво да је $x_n>K$ кад год је $n>n_0$.

Слично, еквивалент дефиниције $\lim x_n=-\infty$ је:

- За свако $K\in\mathbb{R}$ постоји n_0 такво да је $x_n\in(-\infty,K)$ кад год је $n>n_0$, тј.
- За свако $K\in\mathbb{R}$ постоји n_0 такво да је $x_n<K$ кад год је $n>n_0$.

Пример 3. (1) $\lim n=+\infty$. Нека је $x_n=n$. За свако K постоји[4] природан број $n_0>K$ (n_0 може бити било који природан број већи од $[K]$). Тада за свако $n>n_0$ важи $K<x_n$, што по дефиницији (напомена 2) значи да је $\lim x_n=+\infty$.

(2) $\lim(a-n)=-\infty$. Слично као у претходном примеру, то следи из чињенице да за свако K постоји природан број $n_0>a-K$. Тада, ако означимо са x_n низ $a-n$, за свако $n>n_0$ важи $x_n<K$, што по дефиницији (напомена 2) значи да је $\lim x_n=-\infty$.

(3) $\lim(a+\frac{1}{n}-n)=-\infty$. Нека је K било који реалан број и нека је $n_0>[a+1-K]$. Ако је $n>n_0$, тада је $n>a+1-K$, па је $a+1-n<K$, што уз $a+\frac{1}{n}-n<a+1-n$ даје $a+\frac{1}{n}-n<K$, тј. $x_n<K$. Закључујемо да је $\lim x_n=-\infty$.

Чињеница 2. Из дефиниција 7, 8 и 9 директно следи:

- да $a\in\mathbb{R}$ није тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако и само ако постоји M-околина тачке a која садржи највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

[4] Архимедово својство

- да $a \in \mathbb{R}$ није граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако и само ако постоји M-околина тачке a ван које постоји бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- да $+\infty$ није граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако и само ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је ван интервала $(M, +\infty)$ постоји бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- да $-\infty$ није граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако и само ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је ван интервала $(-\infty, M)$ постоји бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Чињеница 3. Ако је низ ограничен одозго, онда му $+\infty$ не може бити граница. Слично, ако је низ ограничен одоздо, онда му $-\infty$ не може бити граница.

Ова чињеница следи директно из дефиниција ограниченог одозго низа тј. претходне чињенице. Ако је низ ограничен одозго, онда постоји $M \in \mathbb{R}$ такав да је сваки члан низа у интервалу $(-\infty, M)$. Тада је ван интервала $(M, +\infty)$ бесконачно много чланова низа (запваво сви), па $+\infty$ није граница низа. Слично се резонује у случају низа ограниченог одоздо.

Теорема 2. Низ не може имати више од једне граничне вредности.

Доказ. Прво ћемо показати да низ не може имати две коначне границе. Нека је $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Изаберимо $M = \frac{|a-b|}{2}$. Тада су M-околине бројева a и b дисјунктне. По дефиницији, с обзиром да је a граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ван њене M-околине се налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, одакле следи да се у M-околини тачке a налиази бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. С обзиром да су M-околине бројева a и b дисјунктне, сваки члан низа који се налази у M-околини тачке a је ван M-околине тачке b, па ван уочене M-околине тачке b посотји бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, што по дефиницији значи да b није граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Управо смо показали да низ не може имати две коначне граничне вредности.

Покажимо сад да низ не може имати једну коначну и једну бесконачну границу. Нека је $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ и нека је $K = 1 + |a|$. Тада су 1-околина тачке a и интервали $(-\infty, -K)$ и $(K, +\infty)$ дисјунктни. Како је a граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, то се ван њене 1-околине налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Дакле интервали $(-\infty, -K)$ и $(K, +\infty)$ садрже највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па се ван сваког од њих налази бесконачно много чланова низа, што по дефиницији значи да није ни $\lim x_n = -\infty$ ни $\lim x_n = +\infty$.

Једини преостао случај је да је истовремено буде $\lim x_n = -\infty$ и $\lim x_n = +\infty$. Тада би за свако $K \in \mathbb{R}$ и ван интервала $(-\infty, -K)$ и ван интервала $(K, +\infty)$ било највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, што би значило да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има само коначно много чланова, тј. да има само коначно много природних бројева. Контрадикција!

Управо смо показали да низ не може имати више од једне границе. $\square$

Дефиниција 10. Кажемо да низ a_n <u>неодређено дивергира</u> ако не конвергира и ако не дивергира одређено.

Низови $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неодређено дивергирају. Не могу дивергирати одређено јер су ограничени. Што се низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тиче, ако изаберемо $M = \frac{1}{2}$, онда се у сваком од интервала $I_1 = (-2 - \frac{1}{2}, -2 + \frac{1}{2})$ и $I_2 = (2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2})$ налази бесконачно много чланова низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. С друге стране, како год да изаберемо број $c \in \mathbb{R}$ његова M-околина за $M = \frac{1}{2}$, тј. интервал $J = (c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$ нема заједничких елемената са бар једним од интервала I_1 и I_2. Ако је $J \cap I_1 = \emptyset$, онда оних бесконачно много чланаова низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који се налазе у I_1 морају бити ван J, па није испуњено да се ван сваке M-околине броја c налази само коначно много чланова низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Дакле у том случају број c не може бити граница низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Слично важи и у случају када је $J \cap I_2 = \emptyset$. Дакле, низ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није конвергентан.

Слично низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није конвергентан. Ограничен је јер за сваки реалан број x важи $|\sin x| \leqslant 1$, а тиме је за сваки природан број n испуњено $|y_n| \leqslant 1$. Дакле $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не може да дивергира одређено.

Нека је $r \in [-1, 1]$. Број r не може бити граница низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. То следи из следећег резоновања. Ако је $r = 1$ изаберимо $M = \frac{1}{2}$. Тада су M-околина броја -1 и M-околина броја $r = 1$ дисјунктне, па с обзиром да M-околина броја -1 садржи бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, закључујемо да се ван M-околине броја r налази бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а тиме и да r не може бити граница низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ако је $r \neq 1$ изаберимо $M = \frac{1-r}{2}$. Тада су M-околина броја 1 и M-околина броја r дисјунктне, па с обзиром да M-околина броја 1 садржи бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, закључујемо да се ван M-околине броја r налази бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а тиме и да r не може бити граница низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Дакле $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није конвергентан. С обзиром да смо већ показали и да не дивергира одређено, закључујемо да дивергира неодређено.

Оно што је „сметало” низовима $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ да имају границу је чињеница да имају више од једне тачке нагомилавања. То је исказ следеће теореме, коју доказујемо резонујући слично као што смо резоновали када смо показали да низови $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ немају границу.

Теорема 3. Ако је низ конвергентан, онда он има тачно једну тачку нагомилавања и то је његова граница. Ако је низ одређено дивергентан, онда он нема тачака нагомилавања.

Доказ. Размотримо прво случај $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. По дефиницији, ван сваке M-околине тачке a се налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па се у свакој M-околини тачке a се налази бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Дакле, a јесте тачка нагомилавања. Нека је $b \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$ и нека је $M = \frac{|a-b|}{2}$. тада су M-околине тачака a и b дисјунктне и пошто је a граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, онда се ван њене M-околине, за свако, а тиме и за уочено M, налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, што значи да се у уоченој M-околини тачке b не може налазити бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па b не може бити тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Управо смо показали да ако је $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$, онда је a једина тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Нека је $c \in \mathbb{R}$. Ако је $\lim x_n = +\infty$, онда, по дефиницији, за свако $M \in \mathbb{R}$ ван $(M, +\infty)$ се налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па ће то важити и за $M = c + 1$. Тада је у 1-околини тачке c највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па му c није тачка нагомилавања. Слично, ако је $\lim x_n = -\infty$, онда се ван $(-\infty, c-1)$ се налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па ће у 1-околини тачке c бити највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, одакле следи да c није тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Управо смо показали да ниједан реалан број c не може бити тачка нагомилавања одређено дивергентног низа. $\square$

Контрапозиција претходног тврђења је следећа последица

Последица 1. Ако низ има више од једне тачке нагомилавања онда нема лимес.

Показали смо да ако низ конвергира, онда има тачно једну тачку нагомилавања. Да обрнуто, не мора да важи показује пример низа $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Он има тачно једну тачку нагомилавања, то је број 0. Међутим $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није конвергентан, јер се парни чланови ,,удаљавају" од броја 0, па ван сваке M-околине тачке 0 има бесконачно много чланова низа, те једина тачка нагомилавања не може бити граница низа $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Такође, ниједан други реалан број не може бити граница низа $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, јер би онда, по теореми 3, тај број био једина тачка нагомилавања, па број 0 не би био тачка нагомилавања, што је у противречју с чињеницом да је 0 тачка нагомилавања. Оно што ,,смета" низу $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ да буде конвергентан, је што, иако непарни чланови теже ка 0, парни теже ка $+\infty$, а тиме је низ $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неограничен. О томе говори следећа теорема.

Теорема 4. (1) Конвергентан низ је ограничен.

(2) Ако неки интервал садржи бесконачно много чланова низа, онда низ у том интервалу има тачку нагомилавања.

(3) Ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања.

(4) Ако је низ ограничен и има тачно једну тачку нагомилавања, онда је конвергентан и граница му је та тачка нагомилавања.

Доказ. 1. Нека је $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Нека је $M > 0$ било који број. Из дефиниције лимеса низа следи да се ван интервала $(a - M, a + M)$ налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ако ван интервала $(a - M, a + M)$ нема чланова низа, онда је низ ограничен бројем $K = \max\{|a - M|, |a + M|\}$. Претпоставимо да ван интервала $(a-M, a+M)$ има чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Нека су то $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}$. Нека је $K = \max\{|a-M|, |a+M|, |x_{n_1}|, |x_{n_2}|, |x_{n_3}|, \ldots, |x_{n_k}|\}$. Тада је $-K \leqslant x_n \leqslant K$, што је требало доказати.

2. Нека интервал $[m, M]$ садржи бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Преозначимо тачке m и M: нека је $K_1 = m$ и $L_1 = M$. Дакле у интервалу $[K_1, L_1]$ се налази бесконачно много чланова низа и дужина интервала $[K_1, L_1]$ је $M-m$. Нека је $M_1 = \frac{K_1+L_1}{2}$. Тачка M_1 је средиште интервала $[K_1, L_1]$. Бар један од интервала $[K_1, M_1]$ и $[M_1, L_1]$ садржи бесконачно много чланова низа јер је њихова унија интервал $[K_1, L_1]$. Ако је то $[K_1, M_1]$, означимо са K_2 леву границу интервала и са L_2 десну границу интервала, тј. нека је $K_2 = K_1$ и $L_2 = M_1$. У супротном, нека је $K_2 = M_1$ и $L_2 = L_1$. У сваком случају, интервал $[K_2, L_2]$ садржи бесконачно много чланова низа и дужина тог интервала је $\frac{M-m}{2}$. Ако смо настављајући овај поступак формирали интервал $[K_n, L_n]$ који садржи бесконачно много чланова низа и коме је дужина $\frac{M-m}{2^n}$, онда на сличан начин конструишемо интервал $[K_{n+1}, L_{n+1}]$ који садржи бесконачно много чланова низа и коме је дужина $\frac{M-m}{2^{n+1}}$. Конкретно, нека је $M_n = \frac{K_n+L_n}{2}$. Бар један од интервала $[K_n, M_n]$ и $[M_n, L_n]$ садржи бесконачно много чланова низа, јер је њихова унија интервал $[K_n, L_n]$ који садржи бесконачно много чланова низа. Ако је то $[K_n, M_n]$, нека је $K_{n+1} = K_n$ и $L_{n+1} = M_n$. У супротном, нека је $K_{n+1} = M_n$ и $L_{n+1} = L_n$. У сваком случају, интервал $[K_{n+1}, L_{n+1}]$ садржи бесконачно много чланова низа и дупло је краћи од интервала $[K_n, L_n]$ (M_n је средиште интервала $[K_n, L_n]$). Дакле, дужина интервала $[K_{n+1}, L_{n+1}]$ је $\frac{M-m}{2^{n+1}}$. Настављајући поступак, може се конструисати бесконачна низ уметнутих интервала који садрже бесконачно много чланова низа. Важи

$$K_1 \leqslant K_2 \leqslant K_3 \leqslant \cdots \leqslant K_n \leqslant \cdots \leqslant L_m \leqslant \cdots \leqslant L_3 \leqslant L_2 \leqslant L_1 \quad \text{и}$$
$$L_n - K_n = \tfrac{M-m}{2^n}.$$

Скуп $A = \{K_n | n \in \mathbb{N}\}$ је ограничен одозго било којим елементом скупа $B = \{L_n | n \in \mathbb{N}\}$ и обрнуто, скуп B је ограничен одоздо било којим елементом скупа

A. Следи да скуп A има супремум, скуп B има инфимум и да је $\sup A \leqslant \inf B$. Важи и више од тога.

$$\text{За свако } n \in \mathbb{N} \text{ је} \quad K_n \leqslant \sup A \leqslant \inf B \leqslant L_n.$$

Одатле следи да је за свако n испуњено

$$0 \leqslant \inf B - \sup A \leqslant L_n - K_n = \tfrac{M-m}{2^n}.$$

Закључујемо[5] да је $\inf B = \sup A$. Означимо тај број са a и покажимо да је то тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Најпре приметимо да је $K_n \leqslant a \leqslant L_n$. Нека је ε било који реалан позитиван број. Нека је n природан број такав да је $2^n > \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Тада је $\frac{M-m}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, а тиме је и $[K_n, L_n] \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. С обзиром да $[K_n, L_n]$ садржи бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, то ће и $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ садржати бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Управо смо показали, да ма како изабрали $\varepsilon > 0$ у ε-околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, што, по дефиницији, значи да је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен бројем K. На основу дела 2 овог тврђења, закључујемо да у интервалу $[-K, K]$ низ има тачку нагомилавања.

4. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен бројем K и нека му је a једина тачка нагомилавања. Нека је $M > 0$. Свођењем на контрадикцију, показаћемо да се ван M-околине тачке a налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ одакле ће следити да је $\lim x_n = a$. Дакле, претпоставка коју обарамо је да се ван неке M-околине тачке a налази бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $(a-M, a+M) \subsetneq (-K, K)$, јер ако није испуњен тај услов, можемо заменити M са $M_1 = \frac{1}{2}\min\{M, K-a, a+K\}$ и тада ће бити испуњено

(1) $(a-M_1, a+M_1) \subsetneq (-K, K)$
(2) $(a-M_1, a+M_1) \subseteq (a-M, a+M)$, па су сви чланови низа који су ван $(a-M, a+M)$ уједно и ван $(a-M_1, a+M_1)$. Дакле, ван $(a-M_1, a+M_1)$ се налази бесконачно много чланова низа.
(3) $(a-M_1, a+M_1)$ садржи бесконачно много чланова низа јер је M_1-околина тачке нагомилавања a.

Дакле, важи $-K < a-M < a+M < K$, а тиме и

$$[-K, K] = [-K, a-M] \cup (a-M, a+M) \cup [a+M, K].$$

Како су сви чланови низа у интервалу $[-K, K]$ (јер K ограничава низ) и како ван интервала $(a-M, a+M)$ има бесконачно много чланова низа (то је

[5] Архимедов принцип

претпоставка под којом радимо),[6] закључујемо да се у бар једном од интервала $[-K, a-M]$ и $[a+M, K]$ налази бесконачно много чланова низа. По делу 2 овог тврђења следи да су у $[-K, a-M] \cup [a+M, K]$ налази тачка нагомилавања низа. Она је очигледно различита од тачке a, што је у противречју са условом тврђења да је a једина тачка нагомилавања $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Дакле, претпоставка да постоји M-околина тачке a ван које се налази бесконачно много чланова низа је неодржива, па важи њена негација: Ван сваке M-околине тачке a је највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. То, по дефиницији, значи да је a граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Теорема 5. Монотон (за довољно велико n) и ограничен низ је конвергентан.

Доказ. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотон и ограничен низ. По теореми 1 низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, с обзиром да је монотон, има највише једну тачку нагомилавања. С обзиром да је ограничен, по делу (3) теореме 4, низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има бар једну тачку нагомилавања. Закључујемо да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има тачно једну тачку нагомилавања. Сад, по делу (4) теореме 4, следи да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан. □

Теорема 6. Ако је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен и нерастући почевши од n_0, онда је $\lim x_n = \inf\{x_n | n \geqslant n_0\}$. Ако је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен и неопадајући почевши од n_0, онда је $\lim x_n = \sup\{x_n | n \geqslant n_0\}$.

Доказ. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нерастући почевши од неког n_0 и нека је ограничен одоздо. Тада скуп $A = \{x_n | n > n_0\}$ има инфимум. Означимо га са a. Тада за свако $n \geqslant n_0$ важи $x_n \geqslant a$. Ако је $x_{n_1} = a$ за неко $n_1 \geqslant n_0$, онда је, с обзиром да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нерастући почевши од неког n_0 и да за свако $n > n_0$ важи $x_n \geqslant a$, испуњено $x_n = a$ за свако $n > n_1$. Тада је a граница низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ јер се у свакој M-околини броја a налазе сви сем евентуално првих n_1 чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Зато претпоставимо да ни за једно $n \geqslant n_0$ не важи $x_n = a$. Тада ће, с обзиром да за свако $n > n_0$ важи $x_n \geqslant a$, за свако $n > n_0$ важити $x_n > a$.

Ако би за неко $\varepsilon > 0$ важило да су сви елементи скупа A већи од $a+\varepsilon$, онда би $a+\varepsilon$ била миноранта скупа A већа од инфимума, што је немогуће јер је по дефиницији, инфимум највећа миноранта, па закључујемо да за свако $\varepsilon > 0$, постоји елемент скупа A у интервалу $[a, a+\varepsilon)$. Нека је то x_{n_1}. Важи $x_{n_1} > a$. Даље, за $\varepsilon_1 = x_{n_1} - a$ постоји елемент скупа A у интервалу $[a, a+\varepsilon_1)$ јер би у супротном $a+\varepsilon_1$ била миноранта скупа a већа од инфимумума. Нека је то x_{n_2}. Важи $x_{n_1} > x_{n_2} > a$. Приметимо да су тада и x_{n_1} и x_{n_2} у интервалу $[a, a+\varepsilon)$. Даље, за $\varepsilon_2 = x_{n_2} - a$ постоји елемент скупа A у интервалу $[a, a+\varepsilon_2)$ јер би у супротном $a+\varepsilon_2$ била миноранта скупа a већа од инфимумума.. Нека

[6] и хипотеза коју желимо да оборимо свођењем на контрадикцију

је то x_{n_3}. Важи $x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > a$. Приметимо да су тада и x_{n_1} и x_{n_2} и x_{n_3} у интервалу $[a, a+\varepsilon)$. На овај начин се бира низ елемената $x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > \cdots > x_{n_k} > \cdots > a$ скупа A који су у интервалу $[a, a+\varepsilon_2)$. Управо смо показали да у произвољној ε-околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, па му је a тачка нагомилавања. Како је конвергентом низу једина тачка нагомилавања уједно и граница, закључујемо да је $\lim x_n = \inf\{x_n | n \geqslant n_0\}$.

Слично се показује да ако је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неопадајући почевши од неког n_0 и и ако је ограничен одозго, онда му је $\sup\{x_n | n > n_0\}$ граница. $\square$

У вези са тачкама нагомилавања је појам подниза.

Дефиниција 11. Нека је $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ строго растући низ природних бројева и нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ реалних бројева (или низ матрица, низ комплексних бројева, низ функција...). Тада је низ $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ одређен са

$$y_k = x_{n_k}, \text{ за свако } k \in \mathbb{N}$$

подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Нотација 2. Уместо да пишемо „$y_k = x_{n_k}$, за свако $k \in \mathbb{N}$" и кажемо да је $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, чешће кажемо да је $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и наводимо само општи члан x_{n_k}.

На пример, ако изаберемо да је $n_k = 2k$, онда добијамо да је $a_{n_k} = a_{2k} = \frac{2k+1}{2k}$ подниз низа $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$. Чешће пишемо $a_{2n} = \frac{2n+1}{2n}$ уместо $a_{2k} = \frac{2k+1}{2k}$. Такође добијамо да је $b_{2n} = 2n - 4n^2$ подниз низа $b_n = n - n^2$, да је $c_{2n} = \frac{4n}{2n+1}$ подниз низа $c_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1}$, да је $d_{2n} = 2n$ подниз низа $d_n = n^{(-1)^n}$ и да је $y_{2n} = 0$ подниз низа $y_n = \sin\frac{n\pi}{2}$. Ако изаберемо други растући низ природних бројева, добићемо другачије поднизове. На пример, ако изаберемо да је $n_k = 2k - 1$, онда ћемо добити да је $a_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}$ подниз низа $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$, да је $b_{2n-1} = 6n - 2 - 4n^2$ подниз низа $b_n = n - n^2$, да је $c_{2n-1} = \frac{1-2n}{n}$ подниз низа $c_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1}$, да је $d_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ подниз низа $d_n = n^{(-1)^n}$ и да је $y_{2n-1} = (-1)^{n-1}$ подниз низа $y_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.

Слично, ако изаберемо да је $n_k = 4k - 1$, онда ћемо добити да је $y_{4n-1} = -1$ подниз низа $y_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.

Бирање низа n_k није увек правилно, као у претходним примерима (где смо бирали парне или непарне или сваки четврти почевши од трећег, јер се најчешће за таквим избором јавља потреба у конкретном случају, али сама дефиниција не ограничава избор низа n_k никако другачије осим условом да је $n_k < n_{k+1}$ испуњено за свако $k \in \mathbb{N}$.

Следеће тврђење описује однос поднизова, тачака нагомилавања и границе неког низа.

Теорема 7. (1) Реалан број a је тачка нагомилавања низа ако и само ако постоји његов подниз који конвергира ка a.

(2) Низ има границу ако и само ако сваки његов подниз има границу и тада је граница низа једнака граници било ког његовог подниза.

Доказ. (1) Прво ћемо показати да ако је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ онда постоји подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ који тежи ка a. Разликујемо два случаја:
Сучај 1.1 Постоји бесконачно много чланова низа који су једнаки a.
У овом случају за $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ бирамо баш те чланове који су једнаки броју a. Конкретна конструкција би била следећа: Нека је $A = \{n \in \mathbb{N} | x_n = a\}$.

Корак 1: Са n_1 означимо $\min A$.

Корак $k+1$: Ако смо изабрали $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$, онда бирамо да n_{k+1} буде $\min(A \setminus \{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k\})$.

На овај начин смо изабрали растући низ природних бројева $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такав да је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено $x_{n_k} = a$, па ће се у свакој M-околини бити сви чланови низа $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, што по дефиницији значи да је $\lim x_{n_k} = a$.

Сучај 1.2 Не постоји бесконачно много чланова низа који су једнаки a.
Пошто је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, онда у његовој 1-околини има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, од којих је највише коначно много једнако a. Изаберимо један различит од a и са n_1 означимо његов индекс.

Ако смо изабрали n_k, онда n_{k+1} бирамо на следећи начин: У $\frac{1}{k}$-околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (јер је a тачка нагомилавања тог низа), од којих је највише коначно много једнако a. Тада у тој околини мора бити и бесконачно много чланова низа чији индекс је већи од n_k и који су различити од a. Изаберимо један такав и означимо његов индекс са n_{k+1}.

На овај начин смо формирали растући низ природних бројева $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такав да је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено $x_{n_k} \in (a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k})$. Како за свако $M > 0$, постоји $k > \frac{1}{M}$, то ће скуп чланова низа $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ који су ван M-околине тачке a бити подскуп скупа $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}\}$. Дакле, ван сваке M-околине тачке a је највише коначно много чланова низа $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, што по дефиницији значи да је $\lim x_{n_k} = a$.

Покажимо да ако постоји подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ који тежи ка $a \in \mathbb{R}$, онда је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Из дефиниције лимеса следи да се ван сваке M-околине тачке a налази највише коначно много чланова подниза $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Зато се унутар околине налази бесконачно много чланова подниза $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. С обзиром да је сваки члан подниза, уједно и члан низа, закључујемо да у свакој M-околини тачке a има бесконачно много чланова низа, што по дефиницији значи да је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Ако се ван неке M-околине тачке a налази највише коначно много чланова низа, онда се ван те околине налази највише коначно много чланова сваког његовог подниза. Зато из $\lim x_n = a$ следи $\lim x_{n_k} = a$ за сваки подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Слично, ако се ван интервала $(M, +\infty)$ налази највише коначно много чланова низа, онда се ван тог интервала налази највише коначно много чланова сваког његовог подниза. Зато из $\lim x_n = +\infty$ следи $\lim x_{n_k} = +\infty$ за сваки подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Аналогним резоновањем се закључује да ако је $\lim x_n = -\infty$, онда $\lim x_{n_k} = -\infty$ за сваки подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Претпоставимо да сваки подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има границу. Како је сам низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ себи подниз, следи да низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има границу. На основу претходно доказаног следи $\lim x_n = \lim x_{n_k}$ за сваки подниз $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Последица 2. (1) Ако постоји подниз који нема границу, онда ни низ нема границу.

(2) Ако постоје два подниза чије су границе различите, онда низ нема границу.

Доказ. Последица директно следи из дела (2) теореме 7. Део (1) ове последице је контрапозиција исказа „ако низ има границу, онда и сваки његов подниз има границу”, док је други део ове последице контрапозиција исказа „ако низ има границу, онда сваки његов подниз има исту границу као и сам низ”. □

У наставку описујемо неке особине низова који имају границу.

Теорема 8. Нека $a_n \leqslant b_n$ важи за довољно велико n. Тада:

(1) Ако је $\lim a_n = +\infty$, онда је $\lim b_n = +\infty$;

(2) Ако је $\lim b_n = -\infty$, онда је $\lim a_n = -\infty$;

(3) Ако су $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентни, онда је $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

Доказ. (1) Нека је $M > 0$. Из $\lim a_n = +\infty$ по дефиницији закључујемо да постоји највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ван интервала $(M, +\infty)$. Дакле, постоји неки природан број k_0 такав да је $M < a_n$, кад год је $n > k_0$. С обзиром да је $a_n \leqslant b_n$ испуњено за довољно велико n, постоји природан број l_0, такав да је $a_n \leqslant b_n$ испуњено за свако $n > l_0$. Нека је $n_0 = \max\{k_0, l_0\}$. Тада из $n > n_0$ следи да је и $n > k_0$ и $n > l_0$, а тиме и да је $M < a_n$ и да је $a_n \leqslant b_n$, одакле закључујемо да за свако $n > n_0$ важи $M < b_n$. Дакле, постоји највише коначно много чланова низа $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ван интервала $(M,+\infty)$. Како ово резоновање не зависи од избора броја M, закључујемо да је $\lim b_n = +\infty$.

Део тврђења под (2) се доказује слично као и део под (1).

(3) Нека је $\lim a_n = a$ и нека је $\lim b_n = b$. Претпоставимо да је $b < a$. Нека је $M = \frac{a-b}{2}$. Тада су M-околине тачака a и b дисјунктне и важи

$$b - M < b + M = a - M < a + M.$$

Из дефиниције границе следи да је ван $(b-M, b+M)$ има највише коначно много чланова низа $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Нека је k_0 највећи индекс за који је b_n ван интервала $(b-M, b+M)$. Слично, нека је l_0 највећи индекс за који је a_n ван интервала $(a-M, a+M)$. Нека је $n_0 = \max\{n_0, l_0\}$. Тада за свако $n > n_0$ важи

$$b - M < b_n < b + M = a - M < a_n < a + M,$$

одакле следи да није испуњено $a_n \leqslant b_n$ за довољно велико n. Контрадикција. Дакле, претпоставка да је $b < a$ је неодржива, па мора бити $a \leqslant b$. $\square$

Последица 3. Нека је $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$

(1) Ако је $b < a < c$, онда је $b < a_n < c$ за довољно велико n.

(2) Ако је $b \leqslant a_n \leqslant c$ за довољно велико n, онда је $b \leqslant a \leqslant c$.

Доказ. (1) Нека је $M = \frac{1}{2}\min\{a-b, c-a\}$. Тада је $b < a - M < a + M < c$. Из дефиниције границе, следи да постоји неко n_0 такво да важи $a_n \in (a-M, a+M)$, кад год је $n > n_0$. Дакле, за $n > n_0$ ће важити $b < a - M < a_n < a + M < c$. Одатле закључујемо да је $b < a_n < c$ за довољно велико n.

(2) Нека је $b_n = b$ и $c_n = c$. Из $b_n \leqslant a_n$ за довољно велико n, по теореми 8, следи да је $b \leqslant a$. Из $a_n \leqslant c_n$ за довољно велико n, по теореми 8, следи да је $a \leqslant c$. $\square$

Теорема 9. (Теорема о два полицајца; Сендвич теорема): Нека је испуњено

(1) За довољно велико n важи $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$;

(2) $\lim a_n = \lim c_n \in \mathbb{R}$.

Тада важи и

(3) Низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је конвергентан;

(4) $\lim a_n = \lim b_n$.

Доказ. Означимо са a границу низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Нека је $M > 0$. Из $\lim a_n = a$ следи да постоји k_0 такво да за свако $n > k_0$ важи $a_n \in (a-M, a+M)$. Слично, из $\lim c_n = a$ следи да постоји l_0 такво да за свако $n > l_0$ важи $c_n \in (a-M, a+M)$. Чињеница да за довољно велико n важи $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, значи да постоји m_0 такво да за свако $n > m_0$ важи $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ Нека је $n_0 = \max\{k_0, l_0, m_0\}$. Тада за свако $n > n_0$ важи и $a_n, c_n \in (a - M, a + M)$ и $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, па закључујемо да за свако $n > n_0$ важи $b_n \in (a - M, a + M)$. Дакле, за свако $M > 0$ се може наћи n_0 такво да за свако $n > n_0$ важи $b_n \in (a - M, a + M)$, што управо значи да је $\lim b_n = a$. $\square$

На низовима се могу увести неке алгебарске операције.

Ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $c_n = a_n + b_n$, онда за низ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да је збир низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишемо

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Слично, ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $c_n = a_n \cdot b_n$, онда за низ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да је производ низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишемо

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Такође, ако за неки реалан број α и свако $n \in \mathbb{N}$ важи $c_n = \alpha \cdot a_n$, онда за низ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ кажемо да је производ броја α и низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишемо

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Лема 3. Важи $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $\lim b_n = 0$, где је $b_n = a_n - a$. Специјално, ако је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низ и $c \in \mathbb{R}$, тада је $\lim(x_n + c) = c$.

Зато је од посебног интереса изучавање особина низова који теже нули.

Дефиниција 12. За низ кажемо да је нула низ ако му је граница нула.

Теорема 10. Ако су $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низови и α реалан број, онда су и низови $\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низови.

Доказ. Прво ћемо показати да производ броја α и нула низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такође нула низ. То је јасно, ако је $\alpha = 0$. Зато претпоставимо да је $\alpha \neq 0$. Нека је $M > 0$. Показаћемо да се ван сваке M-околине нуле постоји највише коначно много чланова низа $\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. С обзиром да је $\lim a_n = 0$, то се ван сваке K-околине нуле налази највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. То ће важити и за $K = \frac{M}{|\alpha|}$. Дакле, за највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не важи $-K < a_n < K$, тј. $-\frac{M}{|\alpha|} < a_n < \frac{M}{|\alpha|}$, а тиме и $-M < \alpha \cdot a_n < M$. Управо смо показали да се највише коначно много чланова низа $\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ налази ван M-околине нуле. Пошто наш доказ не зависи од избора броја $M > 0$, закључујемо да то важи за свако $M > 0$. То, по дефиницији, значи да је $\lim(\alpha \cdot a_n) = 0$.

Покажимо да је збир два нула низа такође нула низ. Дакле, радимо под претпоставком да важи $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Ван сваке $\frac{M}{2}$-околине тачке нуле се налази највише коначно много чланова низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Дакле, за највише коначно много чланова низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не важи $-\frac{M}{2} < a_n < \frac{M}{2}$ и $-\frac{M}{2} < b_n < \frac{M}{2}$, а тиме за највише коначно много чланова низова $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не важи $-M < a_n + b_n < M$. Закључујемо да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низ. □

Последица 4. Ако су $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низови и α и β реални бројеви, онда је и $\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низ.

Доказ. Ако су $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низови, онда су, према теореми 10, и $\alpha \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $\beta \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низови, а тада је, опет по теореми 10, и њихов збир нула низ. □

Теорема 11. Производ ограниченог и нула низа је нула низ.

Доказ. Нека је $-K < a_n < K$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\lim b_n = 0$. Тада је, по теореми 10, $\lim(Kb_n) = 0$ и $\lim(-Kb_n) = 0$. По теореми 9, из $-Kb_n < a_n b_n < Kb_n$ следи да је и $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$. □

Теорема 12. Ако су $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергенти низови, тада је

(1) $\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim a_n + \beta \lim b_n$;

(2) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$;

(3) Ако је $\lim c_n \neq 0$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $c_n \neq 0$, онда је $\lim \dfrac{1}{c_n} = \dfrac{1}{\lim c_n}$.

Доказ. (2) Нека је $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$. Нека су $x_n = a_n - a$ и $y_n = b_n - b$. Тада су, по леми 3, низови $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низови. Важи $a_n \cdot b_n = (x_n + a)(y_n + b) = a_n \cdot y_n + b_n \cdot x_n + ab$. По првом делу теореме 4, низови $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ су ограничени, па су по теореми 11 низови $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низови, а по теореми 10 је и $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низ. На крају, по леми 3, је

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

(1) Нека је $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$. Нека је $c_n = \alpha$ и нека је $d_n = \beta$. По другом делу ове теореме су $c_n \cdot a_n$ и $d_n \cdot b_n$ конвергентни и важи $\lim(\alpha a_n) = \lim(c_n \cdot a_n) = \alpha \cdot a$ и $\lim(\beta b_n) = \lim(d_n \cdot b_n) = \beta \cdot b$. Нека су $x_n = c_n \cdot a_n - \alpha \cdot a$ и $y_n = d_n \cdot b_n + \beta \cdot b$. Тада су, по леми 3, низови $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нула низови.

Важи $\alpha a_n + \beta b_n = x_n + y_n + (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)$. По теореми 10 и низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је нула низ, па је по леми 3

$$\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \lim(x_n + y_n + (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

(3) Нека је $c = \lim c_n$. Без умањења општости претпоставимо да је $c > 0$ (у супротном разматрајмо низ $c'_n = -c_n$ и $c' = -c$).

Да бисмо показали да $\frac{1}{c_n}$ тежи ка броју $\frac{1}{c}$, довољно је да покажемо да је низ $\left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c}\right)$, тј. $\left(\frac{1}{c \cdot c_n} \cdot (c - c_n)\right)$ нула низ.

Из $\lim c_n = c$ следи да постоји n_0 такав да је c_n припада $\frac{c}{2}$ -околини тачке c (тј. $\frac{c}{2} < c_n < \frac{3c}{2}$) кад год је $n > n_0$. Тада је $\frac{2}{3c} < \frac{1}{c_n} < \frac{2}{c}$, кад год је $n > n_0$ и $\frac{2}{3c^2} < \frac{1}{c \cdot c_n} < \frac{2}{c^2}$, кад год је $n > n_0$. Одатле следи да је низ $\frac{1}{c \cdot c_n}$ ограничен бројем $\max\left(\left\{\left|\frac{1}{c \cdot c_n}\right| \mid n \leqslant n_0\right\} \cup \left\{\frac{2}{c^2}\right\}\right)$.

По леми 3 је $c - c_n$ нула низ, па је $\left(\frac{1}{c \cdot c_n} \cdot (c - c_n)\right)$ производ ограниченог и нула низа. По теореми 11 је $\left(\frac{1}{c \cdot c_n} \cdot (c - c_n)\right)$ нула низ, а по леми 3 је $\lim \frac{1}{c_n} = \frac{1}{c}$. $\square$

Теорема 13. Ако је $a_n \neq 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, онда важи

$$\lim |a_n| = +\infty \text{ ако и само ако } \lim \frac{1}{a_n} = 0.$$

Доказ. Покажимо прво да ако је $\lim |a_n| = +\infty$, онда је $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Довољно је да покажемо да се за свако $M > 0$, ван M-околине тачке 0 налази највише коначно много чланова низа $\frac{1}{a_n}$. Нека је $M > 0$ било које и за такво M, нека је $K = \frac{1}{M}$. Из $\lim |a_n| = +\infty$, следи да за највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не важи $K < |a_n|$. То је еквивалентно тврђењу да за највише коначно много природних бројева n није испуњено $\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{K}$, тј. да за највише коначно много чланова низа $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ не важи $-M < \frac{1}{a_n} < M$. Како наше резоновање не зависи од избора броја M, закључујемо да ван сваке M-околине тачке нула има највише коначно много чланова низа $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, што значи да је $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Нека је $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ и $K > 0$. Тада је највише коначно много чланова низа $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ван $\frac{1}{K}$-околине тачке 0, што је еквивалентно са тим да је највише коначно много чланова низа $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ван $(K, +\infty)$, а тиме да је $\lim |a_n| = +\infty$. $\square$

Лема 4. (1) Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ има границу ако и само ако низ $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ има границу и важи $\lim x_n = \lim x_{n+1}$;

(2) Број a је тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ако и само ако је тачка нагомилавања низа $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Доказ. Једини члан низа $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ који није члан низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је x_1. Зато ван M-околине тачке a има коначно много чланова низа $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ако и само ако ван M-околине тачке a има коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и у M-околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ако и само ако у M-околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, одакле следи тврђење. $\square$

Лема 5. $\lim n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$.

Доказ. Означимо n^α са a_n.

1. случај: $\alpha = 0$. Тада је $a_n = 1$. У свакој M-околини тачке 1 су сви чланови низа a_n, одакле по дефиницији следи да је $\lim a_n = 1$.

2. случај: $\alpha > 0$. Нека је $M > 0$ и $n_0 = [M^{\frac{1}{\alpha}}]$. Тада је

$$n > n_0 \Longrightarrow n > M^{\frac{1}{\alpha}} \Longrightarrow M < n^\alpha \Longrightarrow M < a_n,$$

па је $\lim a_n = +\infty$.

3. случај: $\alpha < 0$. Тада је $-\alpha > 0$ и $\frac{1}{a_n} = n^{-\alpha}$, па је по претходном, $\lim \frac{1}{a_n} = +\infty$. По теореми 13 је $\lim a_n = \lim \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = 0$. $\square$

Лема 6. а) Нека је $\lim x_n = +\infty$. Тада

1) ако је $a > 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = +\infty$;
2) ако је $a < 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = -\infty$;
3) ако је $a = 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = 0$.

б) Нека је $\lim x_n = -\infty$. Тада

1) ако је $a > 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = -\infty$;
2) ако је $a < 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = +\infty$;
3) ако је $a = 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = 0$.

Доказ. Случајеви а.3) и б.3) тривијално важе. Показаћемо да важи случај 1.2., а осатли се слично доказују. Нека је $M > 0$. Означимо са K број $-\frac{M}{a}$. С обзиром да је $\lim x_n = +\infty$, ван интервала $(K, +\infty)$ може бити највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, тј. $K < x_n$, не важи за највише коначно много чланова низа. Зато највише коначно много чланова низа не важи $a \cdot x_n < -M$. како ово важи за свако $M > 0$, закључујемо да је $\lim(a \cdot x_n) = -\infty$ □

Лема 7. Нека је $a > 0$ и $a_n \geqslant a$ за довољно велико n.

(1) Ако је $\lim x_n = +\infty$, онда је

$$\lim(a_n \cdot x_n) = +\infty.$$

(2) Ако је $\lim x_n = -\infty$, онда је

$$\lim(a_n \cdot x_n) = -\infty.$$

Доказ. Следи директно из теореме 8 и леме 6. □

Лема 8. (1) Нека је $\lim x_n = +\infty$, нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен одоздо. Тада је

$$\lim(a_n + x_n) = +\infty.$$

(2) Нека је $\lim x_n = -\infty$, нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен одозго. Тада је

$$\lim(a_n + x_n) = -\infty.$$

Доказ. Нека је $K > 0$ такав да је $-K < a_n < K$ испуњено за свако n. Из $\lim x_n = +\infty$ следи да ван $(2K, +\infty)$ има највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Дакле, за неко n_0 важи да је $2K < x_n$ кад год је $n > n_0$. Тада је $\frac{1}{2}x_n \leqslant x_n + a_n$ кад год је $n > n_0$. По леми 6 је $\lim \frac{1}{2}x_n = +\infty$, па је по теореми 8 $\lim(x_n + a_n) = +\infty$. Други део се слично показује. □

Лема 9. Нека је $a > 0$. Тада је $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Доказ. Означимо $\sqrt[n]{a}$ са a_n.
1. случај: $a = 1$. Тада је $a_n = 1$. У свакој M-околини тачке 1 су сви чланови низа a_n, одакле по дефиницији следи да је $\lim a_n = 1$.

2. случај: $a > 1$. Тада је за свако n испуњено $\sqrt[n]{a} > 1$. За уочено n, нека је $h = \sqrt[n]{a} - 1$. Из $\sqrt[n]{a} > 1$ следи да је $h > 0$. Важи $\sqrt[n]{a} = h + 1$, па је

$$a = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) h^k = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n \geqslant 1 + nh.$$

Неједнакост следи из чињенице да је сваки од сабирака $(\begin{array}{c} n \\ k \end{array})h^k$ позитиван, па збир прва два није већи од збира свих $k+1$ сабирака. Из $a \geqslant 1 + nh$ следи да је $h \leqslant \frac{a-1}{n}$. С обзиром да је $h > 0$, важиће

$$0 \leqslant h \leqslant \frac{a-1}{n}.$$

Дакле, за свако n ће важити

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Нека је $x_n = 1$ и нека је $y_n = 1 + \frac{a-1}{n}$. Важи $\lim \frac{1}{n} = 0$ (лема 5), па је $\lim((a-1)\frac{1}{n}) = (a-1)0 = 0$ (теорема 12), а тиме је и (теорема 12) $\lim y_n = 1$.

Сада је $x_n \leqslant a_n \leqslant y_n$ и $\lim x_n = \lim y_n = 1$, па је по теореми 9 (Теорема о два полицајца) и $\lim a_n = 1$.

3. случај: $0 < a < 1$. Означимо $\frac{1}{a}$ са b. Тада је $b > 1$, па је по претходном $\lim \sqrt[n]{b} = 1$. Тада је

$$\lim \sqrt[n]{a} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1,$$

при чему прва једнакост важи по избору броја b, друга по теореми 12, а трећа по израчунатом $\lim \sqrt[n]{b} = 1$. □

Лема 10. Израчунати $\lim \sqrt[n]{n}$.

Доказ. Означимо $\sqrt[n]{n}$ са a_n. Означимо $\sqrt[n]{n} - 1$ са h. За $n > 1$ је и $\sqrt[n]{n} > 1$, па је $h > 0$ и важи $\sqrt[n]{n} = 1 + h$, а тиме и

$$n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

Неједнакост следи из чињенице да је сваки од сабирака $\binom{n}{k} h^k$ позитиван, па збир нека два није већи од збира свих $k+1$ сабирака. Неједнакост

$$n \geqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

је еквивалента са

$$h^2 \leqslant \frac{2}{n}.$$

С обзиром да смо већ утврдили да је $h > 0$, биће $0 \leqslant h \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}$. Дакле, за свако $n > 1$ важи

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \sqrt{2} \cdot n^{-\frac{1}{2}}.$$

Нека су $x_n = 1$ и $y_n = 1 + \sqrt{2} \cdot n^{-\frac{1}{2}}$. Тада је

$$\lim y_n = 1 + \sqrt{2} \cdot \lim n^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{2} \cdot 0 = 1.$$

Прва једнакост следи из теореме 12, а друга по леми 5.

Сада је $x_n \leqslant a_n \leqslant y_n$ за довољно велико n (тачније за $n > 1$) и $\lim x_n = \lim y_n = 1$, па је по теореми 9 (Теорема о два полицајца) и $\lim a_n = 1$. □

Лема 11. Нека је $a > 0$. Тада $\lim a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & |a| < 1 \\ \text{не постоји}, & a \leqslant 1. \end{cases}$

Доказ. Означимо a^n са a_n.

1. случај $a = 1$: Тада је $a^n = 1$, па је $\lim a^n = 1$.

2. случај $a > 1$: Означимо $a - 1$ са h. Тада је $h > 0$ и

$$a_n = a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) h^k = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n \geqslant nh.$$

Неједнакост следи из чињенице да је сваки од сабирака $(\begin{array}{c} n \\ k \end{array})h^k$ позитиван, па ниједан сабирак није већи од збира свих $k+1$ сабирака. Означимо nh са b_n. С обзиром да је $\lim n = +\infty$ (лема 5 за $\alpha = 1$), биће $\lim b_n = +\infty$ (лема 6). То, уз чињеницу да $a_n \geqslant b_n$ за свако n, по теореми 8, даје за резултат да је $\lim a_n = +\infty$.

3. случај $0 < a < 1$: Означимо $\frac{1}{a}$ са b. тада је $b > 1$, па је по претходном случају $\lim b^n = +\infty$. Тада је, по теореми 13, $\lim \dfrac{1}{b^n} = 0$. Дакле,

$$\lim a^n = \lim \frac{1}{b^n} = 0.$$

4. случај $a = 0$: Тада је $a_n = 0$, па је $\lim a_n = 0$.

5. случај $-1 < a < 0$: Тада је $a_n = (-1)^n|a|^n$. Нека је $b_n = |a|^n$. Пошто је $0 < |a| < 1$, онда, по доказаном под 3. случајем, $\lim b_n = 0$. Дакле, a_n је производ органиченог $(-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1)$ и нула низа (b_n), па је и он сам, по теореми 11, нула низ.

6. случај $a = -1$: Тада је $a_{2n} = 1$ и $a_{2n-1} = -1$, па, по последици 2, не постоји $\lim a_n$.

7. случај $a < -1$: Тада је $a_n = (-1)^n|a|^n$. Нека је $b_n = |a|^n$. Пошто је $1 < |a|$, онда, по доказаном под 1. случајем, $\lim b_n = +\infty$. Тада је $\lim a_{2n} = \lim(1 \cdot b_n) = +\infty$ и $\lim a_{2n-1} = \lim(-1 \cdot b_n)$, па је, по леми 6, $\lim a_{2n-1} = -\infty$. По последици 2, не постоји $\lim a_n$. $\square$

Лема 12. $\lim \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ за $a > 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказ. Означимо $\dfrac{n^\alpha}{a^n}$ са a_n.

1. случај $\alpha \leqslant 0$**:** Тада је $a_n = n^\alpha (a^{-1})^n$. По леми 5 је n^α конвергентан низ, па је ограничен. По леми 11 је $\lim (a^{-1})^n = 0$, па је a_n производ нула низа и ограниченог низа. По теореми 11 је $\lim a_n = 0$.

2. случај $\alpha > 0$**:** Тада је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha a^n}{n^\alpha a^{n+1}} = \frac{1}{a} \cdot (\frac{n+1}{n})^\alpha$$

Нека је $x_n = \frac{n+1}{n}$. Тада је $\lim x_n = \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$. Нека је $M = a^{\frac{1}{\alpha}} - 1$. Пошто је $a > 1$ и $\frac{1}{\alpha} > 0$, важиће $M > 0$. Из $\lim x_n = 1$ следи да постоји n_0 такав да је $1 - M < x_n < 1 + M$ кад год је $n > n_0$. Одатле уз чињеницу да је $x_n = 1 + \frac{1}{n} \geqslant 1$ за свако n, следи (последица 3 део 1) да ће важити $1 \leqslant x_n < 1 + M$ кад год је $n > n_0$, тј.

$$1 \leqslant \tfrac{n+1}{n} < a^{\frac{1}{\alpha}} \text{ кад год је } n > n_0 \text{, а тиме и}$$

$$\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^\alpha < a \text{ кад год је } n > n_0.$$

Закључујемо да за $n > n_0$ важи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a} \cdot (\frac{n+1}{n})^\alpha < 1.$$

$$\text{За } n > n_o \text{ важи} \quad a_{n_0} > a_n > a_{n+1},$$

одакле закључујемо две ствари:

- Сваки члан низа је одозго ограничен бројем $K = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$;
- Низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је опадајући за довољно велико n.

С обзиром да је $a_n \geqslant 0$, закључујемо да $0 \leqslant a_n \leqslant K$ важи за свако n тј. да је низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен. По теореми 5, закључујемо да је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан. Означимо са A његову границу. Из

$$a_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot (\frac{n+1}{n})^\alpha a_n,$$

следи

$$A = \lim a_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \lim a_n = \frac{1}{a} A.$$

Прва једнакост следи из леме 4, друга из теореме 12. С обзиром да је $a > 1$, једино решење једначине

$$A = \frac{1}{a} A$$

је $A = 0$. Дакле важи

$$\lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

□

Лема 13. $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$ за $a > 0$.

Доказ. Означимо $\dfrac{a^n}{n!}$ са a_n.

1. случај $0 < a \leqslant 1$**:** Тада је $\lim a^n = 0$ или је $\lim a^n = 1$, па је a^n ограничен. Из $n < n!$, по теореми 8, следи да је $\lim n! = +\infty$, а по теореми 13 следи да је $\frac{1}{n!}$ нула низ. Дакле, $\frac{a^n}{n!}$ је производ ограниченог и нула низа па је, по теореми 11, и он сам нула низ.

2. случај $1 < a$**:** Важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1}$. Нека је $n_0 = [\frac{1}{a}]$. Тада је за $n > n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} < 1.$$

Дакле, низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је опадајући за довољно велико n и ограничен одозго (лема 1). Пошто је $0 < a_n$, низ је ограничен и одоздо. По теореми 5 закључујемо да је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан низ. Нека је $A = \lim a_n$. Из $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a}{n+1}$ следи $a_{n+1} = \dfrac{a}{n+1}a_n$, а тиме и $A = \lim a_{n+1} = \lim \dfrac{a}{n+1} \lim a_n = 0$.

Број e

Лема 14. Берулијева неједнакост: Нека је $a > -1$ и n природан број. Тада важи

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

Доказ. Математичком индукцијом.
(★) За $n = 1$ неједнакост постаје $(1+a)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot a$, што је очигледно тачно.

(★★) Претпоставимо да неједнакост важи за $n = k$ и покажимо да важи за $n = k + 1$. Дакле, наша индуктивна хипотеза је да важи $(1+a)^k \geqslant (1+ka)$. Тада

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k (1+a) \geqslant (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geqslant 1 + (k+1)a.$$

Прва неједнакост следи из индуктивне хипотезе, а друга из чињенице да је $ka^2 \geqslant 0$.
Из (★) и (★★) следи да за свако n важи

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

$\square$

Теорема 14. Низови $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ су конвергентни и имају исту границу.

Доказ. Показаћемо да за свако n важи

$$0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n.$$

Одатле ћемо закључити да су низови $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ монотони и ограничени, одакле ће, по теореми 5, следити да су конвергентни. Најпре приметимо да су a_n и b_n позитивни. Примењујући Бернулијеву неједнакост добијамо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Дакле $a_{n+1} \geqslant a_n$ важи за свако n. Слично, примењујући Бернулијеву неједнакост закључујемо да је $\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geqslant 1 + \dfrac{n+2}{n(n+2)} = 1 + \dfrac{1}{n}$, одакле је

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}} \leqslant \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$ Зато је

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{(1+\frac{1}{n})}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Дакле, за свако n важи $b_{n+1} \leqslant b_n$. Како је $b_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$, закључујемо да је $a_n \leqslant b_n$ за свако n. Дакле, a_n је неопадајући низ, одозго је ограничен (било којим чланом низа b_n), док је b_n, нерастући, ограничен одоздо (било којим чланом низа a_n) низ. По теореми 5 следи да су $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентни низови. По теореми 12, следи да је

$$\lim b_n = \lim a_n \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim a_n.$$

□

Дефиниција 13. Границу низа $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ означавамо са e.

Ознака e потиче од имена математичара Ојлера које се оригинално пише Euler. Број e је основа природног логаритма. То је ирационалан број, па сходно томе, нема коначан децимални запис, одакле и постоји потреба да му се додели ознака. Пошто је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неопадајући низ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ нерастући низ и пошто имају исту границу, важи $a_n \leqslant \lim a_n = e = \lim b_n \leqslant b_n$. Одатле, за $n=1$ добијамо $2 \leqslant e \leqslant 4$. За $n=2$ добијамо $2,25 \leqslant e \leqslant 3,375$. За $n=5$ добијамо $2,48832 \leqslant e \leqslant 2,985984$. Овим поступком[7] се број e може апроксимирати произвољно добро. Таквим оценама се добија да су $2,71828$ првих неколико децимала броја e.

Лема 15. (1) $\lim\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n} = e$;

(2) Ако је $\lim x_n = +\infty$, онда је $\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$;

(3) Ако је $\lim x_n = -\infty$, онда је $\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Доказ. Нека су као у теореми 14 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(1) $\lim\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n} = \lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \lim a_{n-1}\cdot(1+0) = e$;

(2) Нека је $y_n = [x_n]$, тј. y_n је цео део броја x_n. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$y_n \leqslant x_n < 1 + y_n.$$

[7] Постоје много бољи поступци за одређивање децимала броја e.

Како је $\lim x_n = +\infty$, то ће за довољно велико n бити $x_n > 1$, па је $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ природних бројева за довољно велико n и за свако n важи $x_n - 1 < y_n$, па, по теореми 8, важи $\lim y_n = +\infty$.

Из услова $y_n \leqslant x_n < 1 + y_n$ следи да важи

$$\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{1+y_n}\left(1-\frac{1}{2+y_n}\right) < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\left(1+\frac{1}{y_n}\right). \quad (1)$$

Означимо низ $\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}$ са c_n. Тада је $\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{1+y_n} = c_{n+1}$. По леми 4, ако c_n конвергире, биће $\lim c_n = \lim c_{n+1}$. Покажимо да је $\lim c_n = e$. Приметимо да за довољно велико n важи $c_n = a_{y_n}$. Нека је $M > 0$. Тада постоји k_0 такво да је $a_n \in (e-M, e+M)$ кад год је $n > k_0$. С обзиром да је $\lim y_n = +\infty$, постоји n_0, такав да је $y_n \in (k_0, +\infty)$ кад год је $n > n_0$. Дакле, кад год је $n > n_0$, y_n је природан број већи од k_0, па је $a_{y_n} \in (e-M, e+M)$. Управо смо показали да је $c_n \in (e-M, e+M)$, кад је $n > n_0$. Дакле, ван M-околине броја e је највише коначно много чланова низа $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Како ово резоновање не зависи од избора броја $M > 0$, закључујемо да је $\lim c_n = e$. Дакле важи

$$\lim c_{n+1} = \lim c_n = e. \quad (2)$$

Важи $\lim(2+y_n) = +\infty$ (лема 8), па је, по теореми 13, $\lim\left(\frac{1}{2+y_n}\right) = 0$, а по теореми 12 је $\lim\left(1-\frac{1}{2+y_n}\right) = 1$. Зато је, по теореми 12

$$\lim\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{1+y_n}\left(1-\frac{1}{2+y_n}\right) = \lim c_{n+1}\lim\left(1-\frac{1}{2+y_n}\right) = e\cdot 1 = e. \quad (3)$$

Сличним резоновањем из $\lim y_n = +\infty$, користећи лему 8 и теорему 13, закључује да је $\lim\left(1+\frac{1}{y_n}\right) = 1$ и да је

$$\lim\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\left(1+\frac{1}{y_n}\right) = \lim c_n \lim\left(1+\frac{1}{y_n}\right) = e\cdot 1 = e. \quad (4)$$

Из једнакости (1), (3) и (4), по теореми 9, следи да је

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e;$$

(3) Нека је $z_n = -x_n$. Тада је $\lim z_n = +\infty$. По делу (2) ове леме је

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim\left(1+\frac{1}{z_n-1}\right)^{z_n-1}\left(1+\frac{1}{z_n-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

□

Теорема 15. Ако је $\lim|x_n| = +\infty$, онда је $\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$;

Доказ. Нека је $y_n = \left(1+\frac{1}{-|x_n|}\right)^{-|x_n|}$ и $z_n = \left(1+\frac{1}{|x_n|}\right)^{|x_n|}$. По леми 15 је $\lim z_n = y_n = e$, па је ван сваке M-околине тачке e највише коначно много чланова низова $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Тиме је испуњено и да је ван сваке M-околине тачке e највише коначно много чланова низа $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$, што управо значи да је $\lim\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. □

Лема 16. $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Доказ. Означимо $\dfrac{n!}{n^n}$ са a_n. За свако n важи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Важи $\lim \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e} \leqslant \dfrac{1}{2}$, па је по другом делу последице 3,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

Дакле, низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је опадајући за довољно велико n и ограничен одозго (лема 1). Пошто је $0 < a_n$, низ је ограничен и одоздо. По теореми 5 закључујемо да је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан низ. Нека је $A = \lim a_n$. Из $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ следи $a_{n+1} \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = a_n$, а тиме и

$$A \cdot e = \lim a_{n+1} \cdot \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim a_n = A.$$

Једино решење оде једначине је $A = 0$, па закључујемо да је $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$. □

Поглавље завршавамо теоремама које ће се највише користити у изучавању непрекидности функција.

Теорема 16. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан низ.

(1) Нека је k природан број већи од 1. Тада је $\lim(x_n)^k = (\lim x_n)^k$.

(2) Нека је k природан број већи од 1 такав да је $\sqrt[k]{\lim x_n}$ дефинисан и да је за сваки природан број n дефинисан $\sqrt[k]{x_n}$. Тада је $\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim x_n}$.

(3) Нека је q рационалан број већи од 1 такав да је $(\lim x_n)^q$ дефинисан и да је за сваки природан број n дефинисан $(x_n)^q$. Тада је $\lim(x_n)^q = (\lim x_n)^q$.

Доказ. (1) Примењујући други део теореме 12 за $a_n = b_n = x_n$ добијамо да је $\lim x_n^2 = (\lim x_n)^2$. Примењујући други део теореме 12 за $a_n = x_n^2$ и $b_n = x_n$ добијамо да је $\lim (x_n)^3 = (\lim x_n)^3$. Настављајући овај поступак још $k-2$ пута, добијамо да је $\lim (x_n)^k = (\lim x_n)^k$.

(2) Користићемо чињеницу да за $0 < u < 1$ важи $u^k < u$, а тиме и $u < \sqrt[k]{u}$ и да је за $u > 1$ важи $u^k > u$, а тиме и $\sqrt[k]{u} < u$ као и неједнакост троугла $|v+w| \leqslant |v| + |w|$.

Размотримо прво случај $\lim x_n \neq 0$. Означимо са a границу низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. По теореми 12, из $\lim x_n = a \neq 0$ следи да је $\lim \frac{x_n}{a} - 1 = 0$. Означимо $\frac{x_n}{a} - 1$ са y_n. Из

$$-|y_n| \leqslant y_n \leqslant |y_n|,$$

тј. из

$$-|y_n| \leqslant \frac{x_n}{a} - 1 \leqslant |y_n|$$

следи да је

$$1 - |y_n| \leqslant \frac{x_n}{a} \leqslant 1 + |y_n|. \tag{1}$$

Из чињенице да је $\lim y_n = 0$, по првом делу последице 3, следи да је $-1 < y_n < 1$ за довољно велико n. Дакле, за довољно велико n важи

$$0 < 1 - |y_n| \leqslant 1 \leqslant 1 + |y_n|. \tag{2}$$

То даље повлачи да је за довољно велико n (за $0 < u < 1$ важи $u < \sqrt[k]{u}$ и за $u > 1$ важи $\sqrt[k]{u} < u$)

$$1 - |y_n| \leqslant \sqrt[k]{1 - |y_n|} \quad \text{и} \quad \sqrt[k]{1 + |y_n|} \leqslant 1 + |y_n|. \tag{3}$$

Из неједнакости (1) и (3) следи

$$1 - |y_n| \leqslant \sqrt[k]{1 - |y_n|} \leqslant \sqrt[k]{\frac{x_n}{a}} \leqslant \sqrt[k]{1 + |y_n|} \leqslant 1 + |y_n|,$$

па је за довољно велико n

$$\sqrt[k]{a}(1 - |y_n|) \leqslant \sqrt[k]{x_n} \leqslant \sqrt[k]{a}(1 + |y_n|). \tag{4}$$

По теореми 12 из $\lim y_n = 0$, следи да је

$$\lim \sqrt[k]{a}(1 - |y_n|) = \lim \sqrt[k]{a}(1 + |y_n|) = \sqrt[k]{a}.$$

Одатле, по теореми 9 примењену на неједнакост 4, важи

$$\lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{\lim x_n}.$$

Ако је $\lim x_n = 0$, онда за $M > 0$ постоји природан број n_0 такав да је $|x_n| < M^k$, кад год је $n > n_0$. Зато, за свако $n > n_0$ важи $|\sqrt[k]{x_n}| < M$. Како ово резоновање не зависи од избора броја M, закључујемо да се ван свако M-околине налази највише коначно много чланова низа $\sqrt[k]{x_n}$. Дакле $\lim \sqrt[k]{x_n} = 0 = \sqrt[k]{\lim x_n}$

(3) Ако је $q = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$, онда је по доказаном под (1) и (2)

$$\lim x_n^q = \lim \sqrt[k]{x_n^m} = \sqrt[k]{\lim x_n^m} = \sqrt[k]{(\lim x_n)^m} = (\lim x_n)^q.$$

$\square$

Теорема 17. Ако је x_n конвергентан низ и $0 < a \neq 1$, онда је $\lim a^{x_n} = a^{\lim x_n}$.

Доказ. Размотримо прво случај кад је $\lim x_n = 0$ и $a = e$. Нека је M било који позитиван реалан број. Нека је $M_1 = \min\{\frac{1}{2}, M\}$. Из $0 < M_1 < 1$ следи да је $\frac{1}{1-M_1} > 1 + M_1 > 1$, па је $\ln \frac{1}{1-M_1} > \ln(1 + M_1) > \ln 1$ (јер је функција $\ln x$ растућа), а тиме и

$$\ln(1 - M_1) < -\ln(1 + M_1). \tag{1}$$

Нека је $M_2 = \ln(1 + M_1)$. Тада је $M_2 > 0$. Из $\lim x_n = 0$ следи да постоји n_0 такво да је x_n у M_2-околини тачке 0 кад год је $n > n_0$. Дакле, за такво n је $-M_2 < x_n < M_2$, тј. $-\ln(1 + M_1) < x_n < \ln(1 + M_1)$. Одавде и из неједнакости (1) следи да је

$$\ln(1 - M_1) < x_n < \ln(1 + M_1). \tag{2}$$

С обзиром да је функција e^x растућа, из неједнакости (2) следи да је

$$1 - M_1 < e^{x_n} < 1 + M_1.$$

Одваде, с обзиром да је $0 < M_1 \leqslant M$, следи за свако $n > n_0$ важи

$$1 - M < e^{x_n} < 1 + M. \tag{3}$$

С обзиром да неједнакост (3) важи независно од избора броја $M > 0$, то, по дефиницији, значи да је $\lim e^{x_n} = 1$.

Размотримо сад случај када су a и $\lambda = \lim x_n$ било који реални бројеви уз услов $0 < a \neq 1$. Тада је

$$a^{x_n} = a^\lambda \cdot a^{x_n - \lambda} = a^\lambda \cdot e^{(x_n - \lambda)\ln a}.$$

Означимо са y_n низ $(x_n - \lambda)\ln a$. С обзиром да је $\lim x_n = \lambda$ и да је $\ln a$ константа, из теореме 12 следи да је y_n нула низ. По претходно доказаном је тад $\lim e^{y_n} = 1$. Дакле, важи

$$\lim a^{x_n} = \lim(a^\lambda \cdot e^{(x_n-\lambda)\ln a}) = a^\lambda \cdot \lim e^{(x_n-\lambda)\ln a} = a^\lambda \cdot \lim e^{y_n} = a^\lambda \cdot 1 = a^{\lim x_n}. \quad \square$$

Теорема 18. Ако је $\lim x_n = a > 0$, онда је $\lim \ln x_n = \ln(\lim x_n)$.

Нека је $\lim z_n = 1$ и нека $M > 0$. Услов $-M < \ln z_n < M$ је еквивалентан услову $e^{-M} < z_n < e^M$. Ако желимо да из услова $1 - K < z_n < 1 + K$ следи $e^{-M} < z_n < e^M$ мора бити $e^{-M} < 1-K$ и $1+K < e^M$. Зато, нека је $K = 1-e^{-M}$. Из $\lim z_n = 1$ следи да постоји n_0 такво да је z_n у K-околини броја 1, кад год је $n > n_0$. Тада ће за $n > n_0$ бити $e^{-M} < z_n < e^M$, а тиме и $-M < \ln z_n < M$. Дакле, за свако $M > 0$ постоји највише коначно много чланова низа $\ln z_n$ ван M-околине броја 0, па закључујемо да је $\lim \ln z_n = 0$.

Важи $\ln x_n = \ln(a \cdot \dfrac{x_n}{a}) = \ln a + \ln \dfrac{x_n}{a}$. С обзиром да је $\lim \frac{x_n}{a} = 1$, по претходно показаном важи $\lim \ln \frac{x_n}{a} = 0$, а тиме и $\lim \ln x_n = \lim \ln(a \cdot \dfrac{x_n}{a}) = \ln a + \lim \ln \dfrac{x_n}{a} = \ln a$. Управо смо показали да је $\lim \ln x_n = \ln(\lim x_n)$. □

Теорема 19. Ако је $\lim x_n = a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ и $\lim y_n = \lambda \in \mathbb{R}$, онда је $\lim {x_n}^{y_n} = a^\lambda$.

Доказ.

$$\lim {x_n}^{y_n} = \lim e^{y_n \cdot \ln x_n} = e^{\lim(y_n \cdot \ln x_n)} = e^{\lim y_n \cdot \lim \ln x_n} = e^{\lim y_n \cdot \ln \lim x_n} = (\lim x_n)^{\lim y_n}.$$

Прва једнакост следи из чињенице да су функције e^x и $\ln x$ једна другој инверзне и једнакости $\ln(A^B) = B \ln A$, друга је примена теореме 17, трећа је примена теореме 12, четврта је примена теореме 18, а последња поново следи из чињенице да су функције e^x и $\ln x$ једна другој инверзне и једнакости $\ln(A^B) = B \ln A$. □

Последица 5. Ако је $\lim x_n = a > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, онда је $\lim(x_n)^\lambda = (\lim x_n)^\lambda$.

Доказ. Применом теореме 19 за $y_n = \lambda$, добија се тражена једнакост. □

Теорема 20. Важи

(1) Нека је $a > 1$
   - (а) из $\lim x_n = +\infty$ следи $\lim a^{x_n} = +\infty$.
   - (б) из $\lim x_n = -\infty$ следи $\lim a^{x_n} = 0$.

(2) Нека је $0 < a < 1$
   - (а) из $\lim x_n = +\infty$ следи $\lim a^{x_n} = 0$.
   - (б) из $\lim x_n = -\infty$ следи $\lim a^{x_n} = +\infty$.

Доказ. 1а) Нека је $y_n = [x_n]$ и $z_n = a^n$. Из леме 8 следи да $\lim(x_n - 1) = +\infty$, па из чињенице да је $x_n - 1 < y_n$ и теореме 8 следи да је $\lim y_n = +\infty$. По леми 11 је $\lim z_n = +\infty$. Нека је $K > 0$. Тада постоји k_0 такав да је $z_n \in (K, +\infty)$, кад год је $n > k_0$. Из $\lim y_n = +\infty$ следи да постоји n_0 такав да је $y_n \in (k_0, +\infty)$, кад год је $n > n_0$. Дакле, кад год је $n > n_0$, биће $y_n > k_0$, одакле следи да ће бити $z_{y_n} \in (K, +\infty)$. Дакле, за било које $K > 0$ важи да ће се ван $(K, +\infty)$ наћи највише коначно много чланова низа a^{y_n}, што по дефиницији значи да је

$\lim a^{y_n} = +\infty$. Из $y_n = [x_n]$ следи да је $y_n \leqslant x_n$, па је $a^{y_n} \leqslant a^{x_n}$. По теореми 8 следи да је $\lim a^{x_n} = 0$.
1б) $\lim a^{x_n} = \lim \dfrac{1}{a^{-x_n}}$. По претходном је $\lim a^{-x_n} = +\infty$, па је по теореми 13 $\lim a^{x_n} = 0$.

2а) и **2б)** се добијају применом **1а)** и **1б)** на $\frac{1}{a}$ уместо a и применом теореме 13. $\square$

Непрекидност и гранична вредност функције

Непрекидност функције: дефиниција и локална својства

Теорема 21. Нека је D_f домен функције f и нека је $a \in D_f$. Следећи искази су еквивалентни

(I) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

(II) Ако за низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ важи

(а): $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f)$ и

(б): $\lim x_n = a$,

онда важи и

(в): $\lim f(x_n) = f(a)$.

Доказ. Покажимо прво да из (I) следи (II). Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ за који важи

(а): $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f)$ и

(б): $\lim x_n = a$.

Треба да покажемо да важи

(в): $\lim f(x_n) = f(a)$.

Дакле треба показати да за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 такав да кад год је $n > n_0$, мора бити $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто важи (1), за такво изабрано ε постоји $\delta > 0$ такво да за свако $x \in D_f$ из $|x - a| < \delta$ следи $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Пошто то важи за свако $x \in D_f$, важиће и за чланове низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле, за сваки x_n

$$\text{из } |x_n - a| < \delta \text{ следи } |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1}$$

С обзиром да је $\lim x_n = a$, за овакво δ, постоји n_0 такав да

$$\text{из } n > n_0 \text{ следи } |x_n - a| < \delta. \tag{2}$$

Повезујући (1) и (2) добијамо да

$$\text{из } n > n_0 \text{ следи } |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Дакле, за било које $\varepsilon > 0$, може се наћи n_0 такво да важи (3), што по дефиницији значи да је $\lim f(x_n) = f(a)$.

Управо смо показали да из (I) следи (II). Претпоставимо сад да не важи (I) и конструишимо низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ за који важи

(а): $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f)$ и

(б): $\lim x_n = a.$

и не важи

(в): $\lim f(x_n) = f(a).$

. То ће значити да ако није испуњено (I), онда није испуњено ни (II) Пошто не важи (I), онда постоји неко $\varepsilon > 0$ такво да како год изаберемо $\delta > 0$, постојаће $x \in D_f$ такво да је истовремено и $|x-a| < \delta$ и $|f(x)-f(a)| > \varepsilon$. Очигледно је да је сваки такав $x \neq a$, јер у супротном би било $|f(x)-f(a)| = |f(a)-f(a)| = 0 < \varepsilon$.

За такво ε формираћемо низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• Нека је најпре $\delta = 1$. Означимо са x_1 елемент домена функције f такав да је истовремено и $|x_1 - a| < \delta$ и $|f(x_1) - f(a)| > \varepsilon$. Очигледно је $x_1 \neq a$.

• Нека је сад $\delta = \min\{\frac{1}{2}, |x_1 - a|\}$. Означимо са x_2 елемент домена функције f такав да је истовремено и $|x_2 - a| < \delta$ и $|f(x_2) - f(a)| > \varepsilon$. Очигледно је $0 < |x_2 - a| < |x_1 - a|$ и $|x_2 - a| < \frac{1}{2}$.

• Ако смо настављајући овај поступак формирали $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, онда настављамо на следећи начин: Нека је $\delta = \min\{\frac{1}{k}, |x_k - a|\}$. Означимо са x_{k+1} елемент домена функције f такав да је истовремено и $|x_{k+1} - a| < \delta$ и $|f(x_{k+1})-f(a)| > \varepsilon$. Очигледно је $0 < |x_{k+1}-a| < |x_k-a| < \cdots < |x_2-a| < |x_1-a|$ и $|x_{k+1} - a| < \frac{1}{k+1}$.

На овај начин смо формилрали низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ за који важи

(а): $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in D_f)$ и

(б): $-\frac{1}{n} < x_n - a < \frac{1}{n}$, а тиме је и $\lim x_n = a$.

али не важи

(в): $\lim f(x_n) = f(a)$ јер је $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$.

Овим смо показали да ће (II) бити испуњено ако и само ако је испуњено (I). □

Дефиниција 14. Ако за функцију f и тачку a важи један (а тиме и оба) од еквивалената из теореме 21, онда кажемо да је функција f <u>непрекидна у тачки a</u>. Ако функција f није непрекидна у тачки $a \in D_f$, онда кажемо <u>да је f у тачки a прекидна</u> или <u>да f у тачки a има прекид</u>. Ако $A \subseteq D_f$ и ако је функција f нпрекидна у свакој тачки скупа A, онда кажемо да је f <u>непрекидна на скупу A</u>.

Теорема 22. Ако су функције f и g непрекидне у тачки a, онда су у тачки a непрекидне и функције

(1) $f + g$,
(2) $f \cdot g$ и
(3) $\dfrac{1}{f}$.

Доказ. Наведене особине следе директно из одговарајућих особина конвергентних низова датих у теореми 12. Нека за низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ за који важи

(а): $(\forall n\in\mathbb{N})(x_n\in D_f\cap D_g)$ и

(б): $\lim x_n = a$.

Пошто су f и g непрекидне функције у тачки a, важиће и

(в): $\lim f(x_n)=f(a)$ и $\lim g(x_n)=g(a)$.

На основу теореме 12, важиће и

$$\lim(f+g)(x_n)=\lim(f(x_n)+g(x_n))=\lim f(x_n)+\lim g(x_n)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

и

$$\lim(fg)(x_n)=\lim(f(x_n)\cdot g(x_n))=\lim f(x_n)\cdot\lim g(x_n)=f(a)g(a)=(fg)(a),$$

што по дефиницији значи да су $f+g$ и fg непрекидне функције у тачки a.

Слично, ако за низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи

(а): за свако $n\in\mathbb{N}$ је x_n у домену функције $\frac{1}{f}$ и

(б): $\lim x_n = a$,

с обзиром да је f непрекидна функција у тачки a, важиће и

(в): $\lim f(x_n)=f(a)$. На основу теореме 12, следи да је

$$\lim\frac{1}{f}(x_n)=\lim\frac{1}{f(x_n)}=\frac{1}{\lim f(x_n)}=\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{f}(a).$$ □

Теорема 23. Ако је функција f непрекидна у тачки a и ако је функција g непрекидна у тачки $f(a)$, онда је функција $g\circ f$ непрекидна у тачки a.

Доказ. Нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ такав да важи

(а): $(\forall n\in\mathbb{N})(x_n\in D_{g\circ f})$ и

(б): $\lim x_n = a$.

С обзиром да је f непрекидна функција у тачки a, важиће

(в): $\lim f(x_n)=f(a)$.

Означимо са y_n низ $f(x_n)$. Тада је испуњено

(в): $\lim y_n = f(a)$

(г): $(\forall n\in\mathbb{N})(y_n\in D_g)$.

С обзиром да је g непрекидна функција у тачки $f(a)$, из (в) и (г) следи да ће важити

(д): $\lim g(y_n)=g(f(a))$.

Дакле кад год је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ такав да важи

(а): $(\forall n\in\mathbb{N})(x_n\in D_{g\circ f})$ и

(б): $\lim x_n = a$,

онда важи

(д): $\lim g(f(x_n)) = g(f(a))$.

То по дефиницији значи да је $g \circ f$ непрекидна функција у тачки a. $\square$

Дефиниција 15. Нека је $A \subseteq D_f$

• Кажемо да је функција f (строго) растућа на скупу A, ако

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

• Кажемо да је функција f (строго) опадајућа на скупу A, ако

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

• Кажемо да је функција f неопадајућа на скупу A, ако

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)).$$

• Кажемо да је функција f нерастућа на скупу A, ако

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

• Кажемо да је функција f (строго) монотона на скупу A, ако је (строго) растућа на скупу A или је (строго) опадајућа на скупу A.

Теорема 24. Нека су испуњени следећи услови:

(1) функција f је непрекидна у тачки a;

(2) Постоји $M > 0$ такво да је функција f на $D_f \cap (a - M, a + M)$ строго монотона.

Тада је инверз рестрикције функције f на $D_f \cap (a - M, a + M)$ непрекидан у $f(a)$.

Доказ. Без умањена општости, нека је $D_f \subseteq (a - M, a + M)$. С обзиром да је f монотона функција, онда је она $1-1$, па постоји инверз f^{-1} чији домен је $D_{f^{-1}} = f[D_f] = \{f(x) \mid x \in D_f\}$.

Треба показати да

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in D_{f^{-1}})(|y - f(a)| < \delta \Longrightarrow |f^{-1}(y) - a| < \varepsilon).$$

То је, с обзиром да је f бијекција, еквивалентно са

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f)(|f(x) - f(a)| < \delta \Longrightarrow |x - a| < \varepsilon).$$

$$|x - a| < \varepsilon \text{ је еквивалентно са } a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Претпоставимо да је f строго растућа. Тада је

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \text{ еквивалентно са } f(a - \varepsilon) < f(x) < f(a + \varepsilon).$$

Нека је $\delta = \min\{f(a) - f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon) - f(a)\}$. Тада из $|f(x) - f(a)| < \delta$ следи $f(a-\varepsilon) < f(x) < f(a+\varepsilon)$, што је еквивалентно са $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, тј. $|x - a| < \varepsilon$. Овим смо за произвољно изабрано $\varepsilon > 0$ нашли $\delta > 0$ такво да

$$(\forall y \in D_{f^{-1}})(|y - f(a)| < \delta \Longrightarrow |f^{-1}(y) - a| < \varepsilon).$$

Претпоставимо сад да је f строго опадајућа. Тада је

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \text{ еквивалентно са } f(a+\varepsilon) < f(x) < f(a-\varepsilon).$$

Нека је $\delta = \min\{f(a) - f(a+\varepsilon), f(a-\varepsilon) - f(a)\}$. Тада из $|f(x) - f(a)| < \delta$ следи $f(a+\varepsilon) < f(x) < f(a-\varepsilon)$, што је еквивалентно са $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, тј. $|x - a| < \varepsilon$. Овим смо за произвољно изабрано $\varepsilon > 0$ нашли $\delta > 0$ такво да

$$(\forall y \in D_{f^{-1}})(|y - f(a)| < \delta \Longrightarrow |f^{-1}(y) - a| < \varepsilon).$$

Овим је тоерема доказана. □

Последица 6. Ако је f непрекидна и (строго) монотона на интервалу, онда њена рестрикција на том интервалу има непрекидан (и монотон) инверз.

Подсетимо се дефиниције елементарних функција.

Дефиниција 16. Основне елементарне функције су функције

(1) $f(x) = a$,
(2) $f(x) = x$,
(3) $f(x) = x^n$, за $n \in \mathbb{N}$,
(4) $f(x) = x^q$, за $q \in \mathbb{Q}$,
(5) $f(x) = P_n(x)$,
(6) $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$,
(7) $f(x) = a^x$, за $0 < a \neq 1$,
(8) $f(x) = \log_a x$,
(9) $f(x) = x^\alpha$,
(10) $f(x) = \sin x$,
(11) $f(x) = \cos x$,
(12) $f(x) = \operatorname{tg} x$,
(13) $f(x) = \operatorname{ctg} x$,
(14) $f(x) = \arcsin x$,
(15) $f(x) = \arccos x$,
(16) $f(x) = \operatorname{arctg} x$,
(17) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Дефиниција 17. Нека је $\mathcal{E}$ најмања класа функција која задовољава следеће услове:

(1) Основне елементарне функције припадају калси $\mathcal{E}$;

(2) Ако $f, g \in \mathcal{E}$, онда $f+g, f \cdot g, \dfrac{1}{g}, f \circ g \in \mathcal{E}$.

Функција f је <u>елементарна</u> ако и само ако је $f \in \mathcal{E}$.

Теорема 25. Елементарне функције су непрекидне на целом свом домену.

Доказ. Довољно је показати да су основне елементарне функције непрекидне. Тада ће на основу теорема 22, 23 све елементарне функције бити непрекидне.

(1) Нека је $f(x) = a$ и нека је $x_0 \in \mathbb{R}$. Нека је $\varepsilon > 0$. Изаберимо за δ било који позитиван број. Тада из $|x - x_0| < \delta$ следи да је $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Закључујемо да је f непрекидна у свакој тачки.

(2) Нека је $f(x) = x$, $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Довољно је наћи $\delta > 0$ такво да из $|x-a| < \delta$ следи $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ да бисмо закључили да је f непрекидна у a. Једно такво δ је баш ε.

(3) Нека је $f(x) = x^n$. Показали смо да је $h(x) = x$ непрекидна на целом $\mathbb{R}$. По теореми 22, је онда производ фукнција h и h такође непрекидна функција. Означимо је са h_2. Поновном применом теореме 22 закључујемо да је $h_3 = h_2 \cdot h$ непрекидна функција. Настављајући овај поступак $n-3$ пута закључујемо да је $h_n = f$ непрекидна функција.

(4) Нека је $f(x) = x^q$, за $q \in \mathbb{Q}$, нека је $a \in D_f$ и нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ такав да

(а) $x_n \in D_f$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и

(б) $\lim x_n = a$.

На основу теореме 16 следи да је

$$\lim f(x_n) = \lim x_n^q = (\lim x_n)^q = a^q = f(a).$$

(5) Нека је $f(x) = P_n(x)$. С обзиром да је полином збир монома, по првом делу теореме 22, полином је непрекидна функција ако су мономи непрекидне функције. По другом делу теореме 22 моном је непрекидна функција као производ функција под (1) и (3).

(6) Функција $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ је непрекидна јер је по трећем делу теореме 22 непрекидна функција $\dfrac{1}{Q_m(x)}$, а по другом делу теореме 22 је производ функција $P_n(x)$ и $\dfrac{1}{Q_m(x)}$.

(7) Нека је $f(x) = a^x$, за $0 < a \neq 1$, нека је $x_0 \in \mathbb{R}$ и нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ такав да $\lim x_n = x_0$.

На основу тереме 17 следи да је

$$\lim f(x_n) = \lim a^{x_n} = a^{\lim x_n} = a^{x_0} = f(x_0).$$

(8) Нека је $f(x) = \log_a x$. Из монотоности и непрекидности функције $g(x) = a^x$, по последици 6, следи непрекидност функције f.

(9) Нека је $f(x) = x^\alpha$, нека је $a > 0$ и нека је $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ такав да

(а) $x_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и

(б) $\lim x_n = a$

На основу последице 5 следи да је

$$\lim f(x_n) = \lim {x_n}^\alpha = \lim {x_n}^\alpha = a^\alpha = f(a).$$

(10) Нека је $f(x) = \sin x$ и нека је $a \in \mathbb{R}$.

Из чињенице да је за $z < \frac{\pi}{2}$ важи да је $\sin z < z$ следи да је за $|x - a| < \frac{\pi}{2}$

$$|\sin x - \sin a| = 2|\sin \frac{x-a}{2}||\cos \frac{x+a}{2}| < 2 \cdot |\frac{x-a}{2}| \cdot 1 = |x - a|.$$

За $\varepsilon > 0$, довољно је изабрати $\delta = \min\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\}$, да би за свако $x \in \mathbb{R}$ важило

$$|x - a| < \delta \text{ повлачи } |\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

Дакле, f је непрекидна на $\mathbb{R}$.

(11) Нека је $f(x) = \cos x$. Функција $h(x) = x - \frac{\pi}{2}$ је збир функције $h_1(x) = x$ и $h_2(x) = -\frac{\pi}{2}$, па је по првом делу теореме 22 непрекидна функција. Функција f је композиција функција $g(x) = \sin x$ и h, па је по теореми 23 непрекидна.

(12) Нека су $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $g(x) = \operatorname{ctg} x$. По трећем делу теореме 22, из непрекидности функција $\sin x$ и $\cos x$ следи да су непрекидне функције $\frac{1}{\sin x}$ и $\frac{1}{\cos x}$. Из непрекидности функција $\sin x$ и $\frac{1}{\cos x}$, по другом делу теореме 22, следи непрекидност функције f. Слично, из непрекидности функција $\cos x$ и $\frac{1}{\sin x}$, по другом делу теореме 22, следи непрекидност функције g.

(13) Функције $f_1(x) = \sin x$ и $f_2(x) = \operatorname{tg} x$ су строго растуће и непрекидне на интервалу $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, функције $f_3(x) = \cos x$ и $f_4(x) = \operatorname{ctg} x$ су строго опадајуће и непрекидне на интервалу $[0, \pi]$, па су, по последици 6, њихови инвези непрекидне функције. $\square$

Непрекидност функције: глобална својства

Теорема 26. Прва Болцано-Коши теорема: Нека је функција f непрекинда на $[a, b]$ и нека је $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тада је $f(c) = 0$ за неко $c \in (a, b)$.

Доказ. Означимо са a_1 тачку a и са b_1 тачку b. Дакле $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ и дужина интервала $[a_1, b_1]$ је $b - a$. Нека је $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Тачка c_1 је средиште интервала $[a_1, b_1]$. Ако је $f(c_1) = 0$, онда је c_1 тражено c. У супротном је тачно једно од $f(a_1) \cdot f(c_1) < 0$ и $f(c_1) \cdot f(b_1) < 0$. Ако је $f(a_1) \cdot f(c_1) < 0$, означимо са a_2 леву границу интервала $[a_1, c_1]$ и са b_2 десну границу тог интервала, тј. нека је $a_2 = a_1$ и $b_2 = c_1$. У супротном, ако је $f(c_1) \cdot f(b_1) < 0$, нека је $a_2 = c_1$ и $b_2 = b_1$. У сваком случају, важи $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$ и дужина интервала $[a_2, b_2]$ је $\frac{b-a}{2}$. Ако смо настављајући овај поступак формирали интервал $[a_n, b_n]$ коме је дужина $\frac{b-a}{2^n}$ и за који важи $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, онда на сличан начин конструишемо интервал $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ коме је дужина $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ и за који важи $f(a_{n+1}) \cdot f(b_{n+1}) < 0$. Конкретно, нека је $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Ако је $f(c_n) = 0$, онда је c_n тражено c. У супротном је тачно једно од $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$ и $f(c_n) \cdot f(b_n) < 0$. Ако је $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$, нека је $a_{n+1} = a_n$ и $b_{n+1} = c_n$. У супротном, ако је $f(c_n) \cdot f(b_n) < 0$, нека је $a_{n+1} = c_n$ и $b_{n+1} = b_n$. У сваком случају, важи $f(a_{n+1}) \cdot f(b_{n+1}) < 0$ и дужина интервала $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ је $\frac{b-a}{n+1}$.

Настављајући поступак, или се конструише c_k такво да је $f(c_k) = 0$ или се конструише бесконачан низ уметнутих интервала $[a_k, b_k]$ коме је дужина $\frac{b-a}{2^k}$ и за који важи $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$. Важи

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_m \leqslant \cdots \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \quad \text{и}$$
$$b_n - a_n = \tfrac{b-a}{2^n}.$$

Скуп $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ је ограничен одозго било којим елементом скупа $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ и обрнуто, скуп B је ограничен одоздо било којим елементом скупа A. Следи да скуп A има супремум, скуп B има инфимум и да је $\sup A \leqslant \inf B$. Важи и више од тога.

$$\text{За свако } n \in \mathbb{N} \text{ је} \quad a_n \leqslant \sup A \leqslant \inf B \leqslant b_n.$$

Одатле следи да је за свако n испуњено

$$0 \leqslant \inf B - \sup A \leqslant b_n - a_n = \tfrac{b-a}{2^n}.$$

Закључујемо[8] да је $\inf B = \sup A$. Означимо тај број са c и покажимо да је $f(c) = 0$.

Низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је нропадајући и ограничен одозго, па је по теореми 6. $\lim a_n = c$. Сваки од чланова низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је у интервалу $[a, b]$, па је $a_n \in D_f$, за свако n. С обзиром да је f непрекидна у свим тачкама интервала $[a, b]$, важи $\lim f(a_n) =$

[8]Архимедов принцип

$f(c)$. Слично, $\lim b_n = c$ и $\lim f(b_n) = f(c)$. Ако је $f(a) < 0$, онда је $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ за свако n, па је по другом делу последице 3, $\lim f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim f(b_n)$, тј. $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$, одакле следи да је $f(c) = 0$. Ако је $f(a) > 0$, онда је $f(a_n) > 0 > f(b_n)$ за свако n, па је по другом делу последице 3, $\lim f(a_n) \geqslant 0 \geqslant \lim f(b_n)$, тј. $f(c) \geqslant 0 \geqslant f(c)$, одакле следи да је $f(c) = 0$. □

Теорема 27. Друга Болцано-Коши теорема: Нека је функција f непрекинда на $[a, b]$ и нека је D број између $f(a)$ и $f(b)$. Тада је $f(c) = D$ за неко $c \in (a, b)$.

Доказ. Ако је $f(a) = f(b)$, онда нема елемената у интервалу $(f(a), f(b))$. Зато је $f(a) \neq f(b)$. Нека је $g(x) = f(x) - D$. Тада је $g(x)$ непрекидна на $[a, b]$ и важи $g(a) \cdot g(b) < 0$. Примењујући прву Болцано-Коши теорему (теорема 26, закључујемо да постоји $c \in (a, b)$ такво да је $g(c) = 0$. Тада је $f(c) = D$. □

Дефиниција 18. Кажемо да је функција f ограничена на $A \subseteq D_f$, ако постоје реални бројеви M и m, такви да за свако $x \in A$ важи $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Теорема 28. Прва Вајерштрасова теорема: Ако је f непрекидна на $[a, b]$, онда је ограничена на том интервалу.

Доказ. Претпоставимо да је f непрекидна на $[a, b]$, али да на том интервалу није ограничена одозго. То значи да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $x_n \in [a, b]$ такво да је $f(x_n) > n$. Низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је ограничен (јер је $a \leqslant x_n \leqslant b$), па по трећем делу теореме 4 има тачку нагомилавања. Нека је то c. На основу теореме 7 следи да постоји подниз низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који тежи ка c. Означимо га са y_k. Дакле, за неки растући низ природних бројева $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ важи $y_k = x_{n_k}$. Из $f(x_n) > n$ следи да је $f(y_k) = f(x_{n_k}) > n_k > k$. По теореми 8 из $\lim k = +\infty$ следи да је $\lim f(y_k) = +\infty$. С обзиром да је $a \leqslant y_k \leqslant b$, на основу другог дела последице 3 следи да је $c \in [a, b]$. Дакле, c је у домену функције f па је $f(c) \neq \lim f(y_k)$.

Показали смо да:

(а) $y_k \in D_f$ за свако $k \in \mathbb{N}$;

(б) $\lim y_k = c$ и

(в) $\lim f(y_k) \neq f(c)$.

Закључујемо да f није непрекидна у тачки c. То је протвречно услову теореме да је f непрекидна на $[a, b]$, па закључујемо да је претпоставка да је f на $[a, b]$ неограничена са горње стране неодржива.

Слично се показује да f не може бити неограничена са доње стране. □

Теорема 29. Друга Вајерштрасова теорема: Ако је f непрекидна на $[a, b]$, онда на $[a, b]$ достиже свој максимум и минимум.

Доказ. На основу преве Вајерштрасове теореме (теорема 28) из непрекидности функције f на $[a, b]$ следи њена ограниченост на $[a, b]$, па постоје $\sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$ и $\inf\{f(x)|x \in [a, b]\}$. Означимо са S супремум скупа $\{f(x)|x \in [a, b]\}$. Ако у интервалу $(S - \frac{1}{n}, S]$ не би било елемената скупа $\{f(x)|x \in [a, b]\}$, онда би $S - \frac{1}{n}$ била мајоранта скупа $\{f(x)|x \in [a, b]\}$ мања од супремума тог скупа, што је контрадикција са дефиницијом супремума. Дакле у $(S - \frac{1}{n}, S]$ постоји бар један елемент скупа $\{f(x)|x \in [a, b]\}$. Означимо са x_n тачку из $[a, b]$ такву да је $f(x_n) = (S - \frac{1}{n}, S]$. На овај начин, формиран је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ елемената из $[a, b]$. С обзиром да је низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен, он, по трећем делу теореме 4, има тачку нагомилавања. Означимо је са c. На основу теореме 7 закључујемо да постоји подниз низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ који тежи ка c. Означимо га са y_k. Дакле, за неки растући низ природних бројева $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ важи $y_k = x_{n_k}$. Из $S - \frac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant S$ и $n_k > k$ следи да је $S - \frac{1}{k} \leqslant f(y_k) \leqslant S$. По теореми 9 закључујемо да је $\lim f(y_k) = S$. С обзиром да је f непрекидна на $[a, b]$, важи $\lim f(y_k) = f(\lim y_k) = f(c)$. Следи да је $f(c) = S$.

Слично се показује да f достиже свој инфимум на $[a, b]$. □