Материјал за вежбе из математике 3

Аутор непознат

Октобар 2018

1 Шта ваља знати

1. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, онда важи: $a_n \sim \sin a_n \sim \tan a_n \sim \arcsin a_n \sim \arctan a_n \sim e^{a_n} - 1 \sim \ln(1+a_n)$, $(1+a_n)^{\lambda} \sim 1 + \lambda a_n$, $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \sim e$, где важи $a_n \sim b_n \ (n \to \infty) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$. Такође, користићемо често и следеће: $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0,\ a_n \sim b_n \ (n \to \infty)$, онда важи да је и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$. Важно је напоменути да поменута асимптотика важи ако a_n и b_n нису идентички једнаки 0.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, где је $a > 0$.

2. (Стирлингова формула) $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}$, кад $n \to \infty$.
3. (Двоструки факторијел парних бројева) $(2n+2)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot (2n-2) \cdot 2n \cdot (2n+2)$. Лако се покаже да важи $(2n+2)!! = 2^{n+1}(n+1)!$.
4. (Двоструки факторијел непарних бројева) $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n-3) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$.
5. $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, кад $n \to \infty$. (Пера каже да је доказао на предавањима, што значи идите на предавања).
6. $\binom{a}{n} = \frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdot...\cdot(a-(n-1))}{n!}$.
7. $\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$, за $n \geq 2$ (Лако се покаже. Ко не уме да покаже нек дође на консултације.).
8. $\binom{-1/2}{n} = (-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, за $n \geq 1$ (Лако се покаже. Ко не уме да покаже нек дође на консултације.).
9. $\binom{-1}{n} = (-1)^n$ (Лако се покаже. Ко не уме да покаже нек дође на консултације.).

2 Нека тврђења која ваља знати

1. (Тест дивергенције) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, онда ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира.
2. (Први поредбени критеријум) Ако је $0 \leq a_n \leq b_n$, тада важи: ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира, онда дивергира и ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, а ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
3. (Други поредбени критеријум) Ако је $a_n \geq 0$ и $b_n \geq 0$ и ако је $a_n \sim b_n \ (n \to \infty)$ онда важи: ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира $\iff$ ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ конвергира.
4. (Уопштени хармонијски ред) Ред облика $H(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ зовемо уопштеним хармонијским редом. Важи следеће тврђење: $H(p)$ конвергира $\iff p > 1$.
5. (Геометријски ред) Ред облика $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ зовемо геометријским редом и његова сума је $\frac{1}{1-x}$ за $|x| < 1$.
6. (Интегрални критеријум) Ако је $f(x)$ монотоно опадајућа и непрекидна функција на интервалу $[k, \infty)$ и ако је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0$ тада важи: ред $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ конвергира $\iff \int\limits_{k}^{\infty} f(x)dx$ конвергира.

7. (Даламберов критеријум) Ако је $a_n \geq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$ онда важи: ако је $L > 1$, онда општи члан не тежи ка нули па ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира, а ако је $L < 1$ онда ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира.
8. (Кошијев корени критеријум) Ако је $a_n \geq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ онда важи: ако је $L > 1$, онда општи члан не тежи ка нули па ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира, а ако је $L < 1$ онда ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира.
9. (Рабеов критеријум) Ако је $a_n \geq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda$, тада важи: ако је $\lambda > 1$ онда ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, а ако је $\lambda < 1$ онда ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира. Рабеов критеријум је корисно користити када је $L = 1$ код Даламберовог или Кошијевог критеријума.
10. Кажемо да ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Важи следеће тврђење: Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, тада он конвергира и обично. Кажемо још и да ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ условно конвергира ако он конвергира обично, али не конвергира апсолутно.
11. (Лајбницов критеријум) Ако је низ a_n монотоно опадајући и ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, онда конвергира ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

3 Степени редови

1. Ред облика $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ се назива *степеним редом*, где је a_n произвољан низ и његова сума се означава са $S(x)$, тј $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
2. Домен степеног реда је увек интервал I који је симетричан у односу на $x = 0$. Домен може имати један од следећих облика: $I = (-\infty, +\infty)$, $I = (-R, R)$, $I = [-R, R)$, $I = (-R, R]$, $I = [-R, R]$. Број $R \geq 0$ се назива *полупречник конвергенције* степеног реда. Полупречник конвергенције можемо израчунати на два начина: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|\, a_n \,|}}$.
3. Ако је R полупречник конвергенције степеног реда, онда важи да степени ред апсолутно конвергира за $|\, x \,| < R$, а дивергира за $|\, x \,| > R$. За $x = R$ или $x = -R$ морамо посебно испитати конвергенцију неком од метода које су рађене раније.
4. Степени ред можемо диференцирати и интегралити члан по члан, односно можемо "ући" знаком извода или интеграла под суму увек кад је $|\, x \,| < R$, у запису: $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ и $\int \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ и ови степени редови имају **исти полупречник конвергенције** R као и полазни степени ред, с тим да им **домен не мора бити исти**!
5. Маклоренов ред неке функције f која је бесконачно пута диференцијабилна у околини тачке $x = 0$ је степени ред облика $M(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ и важи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^n = 0$, где је $\theta \in (0, 1)$, за свако $x \in (-R, R)$, а R је полупречник конвергенције датог реда.
6. Неки важни примери Маклоренових редова функција (које треба научити напамет, а то се учи кроз вежбу, а не дан пред испит-колоквијум)
   (а) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $R = +\infty$, тј домен је $I = (-\infty, +\infty)$
   (б) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = +\infty$, тј домен је $I = (-\infty, +\infty)$
   (ц) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = +\infty$, тј домен је $I = (-\infty, +\infty)$
   (д) $\ln(1 + x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $R = 1$, а домен је $I = (-1, 1]$
   (е) $(1 + x)^a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$, $R = 1$, а домен зависи од тачке $a \in \mathbb{R}$.