

Садржај

Део 1. ОкоLINE	3
Поглавље 1. ОкоLINE	4
Део 2. Низови	7
Поглавље 2. Низови: дефиниција	8
Поглавље 3. Подниз	22
Поглавље 4. Особине низова који имају границу	25
Поглавље 5. Број e	32
Поглавље 6. Основни лимеси низа	36
Поглавље 7. Улажење лимеса у аргумент функције	41
Део 3. Реалне функције	45
Поглавље 8. Основни појмови	46
Поглавље 9. Непрекидност функције	49
1. Непрекидност функције: дефиниција и локална својства	49
2. Непрекидност функције: глобална својства	54
3. Елементарне функције	59
Поглавље 10. Граничне вредности функције	61
1. Дефиниција граничне вредности функције	61
2. Основна својства граничних вредности функција	67
3. Таблични лимеси	77
4. Леви и десни лимес	79
5. Веза између непрекидности функције и лимеса	80
Поглавље 11. Извод функције	81
1. Извод функције: дефиниција и основна својства	81
2. Извод функције: глобална својства	82

Скрипта - радна верзија

у константној доради

Део 1

Околине

ПОГЛАВЉЕ 1

ОкоLINE

Дефиниција 1.1. У уређеном скупу реалних бројева отворени интервали су интервали облика (за неке $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$):

$$(-\infty, +\infty), (-\infty, a), (a, +\infty) \text{ и } (a, b),$$

док су затворени интервали облика

$$(-\infty, +\infty), (-\infty, a], [a, +\infty) \text{ и } [a, b].$$

Осим њих постоје још и интервали који нису ни отворени, ни затворени. То су тачно интервали облика

$$[a, b) \text{ и } (a, b].$$

Напомена: $-\infty$ и $+\infty$ **нису** реални бројеви. Ми их овде користимо као ознаке иако постоје области математике у којима је згодно посматрати проширен скуп реалних бројева $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ где се уређеном скупу реалних бројева смо додају два елемента и то тако да је $-\infty < x < +\infty$ за сваки реалан број x . У том случају скуп $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ означавамо са $\overline{\mathbb{R}}$ и посматрамо само уређење на њему, јер операције сабирања и множења не можемо продужити тако да задрже „лепа“ својства на која смо навикли у скупу \mathbb{R} ¹ Треба разликовати ознаку $+\infty$ од ознаке ∞ , јер постоје области математике у којима се ради са $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, дакле са реалним бројевима којима се не додају две тачке, већ само једна тачка.

Чињеница 1.2. Коначан пресек отворених интервала је или отворен интервал или празан скуп. Пресек затворених интервала је или затворен интервал или празан скуп.

Да је услов „коначан“ неопходан у првој од особина, показује пример интервала $I_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$ за коју је пресек $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [1, 2]$.

¹На пример, у скупу реалних бројева ако је $0 < x$, онда је $x < 2x$. Ако бисмо хтели да то важи и у проширеном скупу реалних бројева, онда би морало бити $+\infty < 2(+\infty)$. Слично је са особином да сваки $x \neq 0$ има инверз x^{-1} и да је $(x^{-1})^{-1} = x$ као и да из $0 < n < x$ следи $0 < x^{-1} < n^{-1}$. Шта би било $(+\infty)^{-1}$ и $(-\infty)^{-1}$? Пошто је $0 < n < +\infty$ испуњено за сваки природан број n , онда би следило да је $0 < (+\infty)^{-1} < n^{-1}$ испуњено за свако n , па бисмо морали да имамо бесконачно малу величину, позитиван број мањи од свих „стандардних“ позитивних реалних бројева.

Дефиниција 1.3. Нека је $a \in \mathbb{R}$. За отворени интервал који садржи тачку a кажемо да је околина тачке a . Ако је $M > 0$, онда за интервал $(a - M, a + M)$ кажемо да је M -околина тачке a .

Ако је $M > 0$, онда за интервал $(-\infty, -M)$ кажемо да је M -околина тачке $-\infty$, а за интервал $(M, +\infty)$ кажемо да је M -околина тачке $+\infty$.

Ако је $a \in \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$, онда за M -околину тачке a из које је избачена сама тачка a , кажемо да је шупља M -околина тачке a .

Дакле, шупља M -околина тачке $-\infty$ се не разликује од M -околине тачке $-\infty$. Слично, шупља M -околина тачке $+\infty$ се не разликује од M -околине тачке $+\infty$. За било који реални број a , њена шупља M -околина је скуп $(a - M, a + M) \setminus \{a\}$. M -околину тачке $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ћемо означавати са $\hat{O}(M, a)$. Шупљу M -околину тачке $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ћемо означавати са $O(M, a)$. Дакле, ако је $a \in \mathbb{R}$, онда је $x \in O(\delta, a)$ еквивалентно са $0 < |x - a| < \delta$, а $x \in \hat{O}(\delta, a)$ је еквивалентно са $|x - a| < \delta$. Ако је $a = -\infty$, онда је $x \in O(\delta, a)$ еквивалентно са $x \in \hat{O}(\delta, a)$ и са $x < -\delta$. Слично, ако је $a = +\infty$, онда је $x \in O(\delta, a)$ еквивалентно са $x \in \hat{O}(\delta, a)$ и са $\delta < x$.

Дефиниција 1.4. Тачка a је:

- (1) унутрашња тачка скупа A , ако је садржана у A заједно са неком својом δ -околином;
- (2) је тачка нагомилавања скупа A , ако у свакој шупљој δ -околини броја a има елемената скупа A .

Део 2

Низови

ПОГЛАВЉЕ 2

Низови: дефиниција

Дефиниција 2.1. За пресликавање коме је домен N_0 , N или $N \setminus \{1, 2, 3, \dots, k\}$ (за неко $k \in N$) кажемо да је низ.

Уместо да кажемо да је кодомен ученог низа је скуп матрица (скуп вектора, скуп функција, скуп реалних бројева, скуп природних бројева, скуп комплексних бројева ...), чешће кажемо да је у питању низ матрица (вектора, функција, реалних бројева, природних бројева, комплексних бројева ...). За низ реалних бројева често кажемо да је реалан низ. Иако је уобичајено да за функције користимо ознаке $f, g, h, F, G, H, f_1, f_2, \dots$, реалне низове чешће означавамо са a, b, c, d, x, y и уместо $a(n)$ пишемо a_n . За a_1 кажемо да је први члан низа, за a_2 кажемо да је други члан низа итд. Када за променљиву n задамо a_n , онда кажемо да је a_n општи члан низа. Уместо $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ пишемо $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или само наводимо општи члан a_n .

У наставку текста кад кажемо „низ”, мислимо на реалан низ, осим ако другачије не нагласимо.

Ако је a_n низ са доменом $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, \dots, k\}$, онда је са $b_n = a_{n+k}$ дефинисан низ са доменом \mathbb{N} . С обзиром на ту везу, довољно је изучавати низове са доменом N . У наставку текста кад кажемо „низ”, ако другачије не кажемо, мислимо на низ коме је домен \mathbb{N} .

Дефиниција 2.2. За низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ кажемо да је растући ако $a_n < a_{n+1}$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако $a_n \leq a_{n+1}$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$, онда кажемо да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неоппадајући и користимо ознаку $a_n \nearrow$. Слично, ако $a_n > a_{n+1}$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$, онда кажемо да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ оппадајући, а ако $a_n \geq a_{n+1}$ важи за свако $n \in \mathbb{N}$, онда кажемо да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неоппадајући и користимо ознаку $a_n \searrow$. Низ је монотон уколико је нерастући или је неоппадајући. Низ је строго монотон уколико је растући или је оппадајући.

Очигледно, сваки растући низ је уједно и неоппадајући и сваки опадајући низ је уједно и нерастући.

Пример 1. Нека су $a_n = 2n - 1$, $b_n = (-1)^n n$ и $c_n = \max\{10 - n, 2n - 1\}$. Тада је $a_n < a_{n+1}$ еквивалентно са $2n - 1 < 2n + 1$, а тиме и са $0 < 2$. Дакле, за сваки природан број n је испуњено $a_n < a_{n+1}$, па је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ растући.

За низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ важи да је сваки непаран члан негативан и сваки паран члан позитиван, па $b_{n+1} \leq b_n$ не важи за сваки непаран n и $b_{n+1} \geq b_n$ не важи за сваки паран n . Дакле $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није ни неопадајући ни нерастући.

Како је $n \geq 4$ решење неједначине $2n - 1 \geq 10 - n$ у скупу природних бројева, то је за $n \geq 4$ испуњено да је $c_n = 2n - 1$, а за $n \leq 3$ је $c_n = 10 - n$. Важи $c_1 = 9$, $c_2 = 8$ и $c_3 = 7$, па је $c_1 \geq c_2 \geq c_3$ и $c_4 \leq c_5 \leq c_6 \leq c_7 \leq \dots$. Дакле, није испуњено $c_n < c_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ (није испуњено $c_1 < c_2$ ни $c_2 < c_3$), па низ није растући. Али је $c_n < c_{n+1}$ испуњено за свако $n \geq 4$, па би низ био растући да то „не квари неколико првих чланова”. То је суштинска разлика између низова $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ако низу $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ одбацимо коначно много чланова, он ће постати растући, док низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неће постати ни растући ни опадајући осим ако не одбацимо бесконачно много његових чланова (конкретно, или да одбацимо све парне или да одбацимо све непарне) За низове као што је $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ уводимо нову дефиницију.

Дефиниција 2.3. За низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ кажемо да је (строго) растући за довољно велико n или да је (строго) растући почевши од неког n_0 ако постоји природан број n_0 такав да $x_n < x_{n+1}$ важи за свако $n \geq n_0$. Слично се дефинишу појмови низа неопадајућег за довољно велико n , (строго) опадајућег низа за довољно велико n и нерастућег низа за довољно велико n .

Уопштено, ако за низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ важи нека особина за све сем евентуално коначно много природних бројева n , онда кажемо да низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има ту особину за довољно велико n или почевши од неког n_0 .

Дефиниција 2.4. Ако је $m < a_n$ испуњено за све природне бројеве n , онда кажемо да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен одоздо бројем m или да је ограничен са доње стране бројем m . Кажемо да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен одоздо или да је ограничен са доње стране ако је ограничен одоздо неким бројем. Слично, ако је $a_n < M$ испуњено за све природне бројеве n , онда за низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ кажемо да је ограничен одозго бројем M или да је ограничен са горње стране бројем M . Кажемо да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен одозго или да је ограничен са горње стране ако је ограничен одозго неком бројем.

Ако постоји $K \in (0, +\infty)$ такво да је $-K < a_n < K$ испуњено за све природне бројеве n , онда за низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ кажемо да је ограничен бројем K . Кажемо да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен ако је ограничен неким бројем.

Очигледно је да је низ ограничен ако и само ако је ограничен са доње и горње стране. Ако постоје m и M такви да је $m < a_n$ и $a_n < M$ и ако за K изаберемо $\max\{|m|, |M|\}$, онда ће важити $-K < a_n < K$ и обрнуто, ако важи

$-K < a_n < K$ и ако за m и M изаберемо редом бројеве $-K$ и K , онда ће важити $m < a_n$ и $a_n < M$.

У дефиницији ограниченог (са доње, са горење) стране смо свуд уместо $<$ и $>$ могли ставити \leq и \geq и добили бисмо еквивалентну дефиницију.

Лема 2.5. Ако је низ неоппадајући за довољно велико n , онда је ограничен одоздо. Ако је низ нерастући за довољно велико n , онда је ограничен одозго.

Сада ћемо на примеру неколико низова илустровати разна својства низова. То су низови $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$, $b_n = n - n^2$, $c_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1}$, $d_n = n^{(-1)^n}$ и $y_n = \sin n$. До теореме 2.21, кад споменемо низове a_n, b_n, c_n, d_n и y_n мислимо на управо наведене низове.

Посматрајмо најпре низ $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$. Важи $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{5}{4}$, $a_5 = \frac{4}{5}$, $a_6 = \frac{7}{6}$, $a_{10} = \frac{11}{10}$, $a_{11} = \frac{10}{11}$, $a_{100} = \frac{101}{100}$, $a_{101} = \frac{100}{101}$, $a_{1000} = \frac{1001}{1000} \dots$

Ако се ови чланови запишу у децималном облику или ако се нацртају на бројевној оси лако се примети да се групишу око броја 1. Дакле интуитивно је јасно да се чланови низа неограничено приближавају броју 1. Слично је интуитивно јасно да низ $b_n = n - n^2$ неограничено опада и да би његови чланови једино могли да се групишу око $-\infty$, када бисмо на реалне бројеве додали $-\infty$ и да за низ $c_n = \frac{(-1)^n 2n}{n+1}$ не постоји број коме се сви чланови неограничено приближавају нити неограничено расту или неограничено опадају јер се прани чланови групишу око броја 2, а непарни око броја -2 . За парне бројеве n је $d_n = n$ и интуитивно је јасно је да парни чланови низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ теже ка $+\infty$. За непарне бројеве n је $d_n = \frac{1}{n}$ и интуитивно је јасно да се непарни чланови низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ групишу око 0. Управо у том „интуитивном” је проблем. Први проблем је у томе што постоје низови код којих није тако лако имати интуицију чему теже. На пример, низови

$$e_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \text{ и } y_n = \sin n$$

задају знатно компликованији задатак интуицији по питању да ли се групишу око неког броја или неограничено расту или неограничено опадају или не постоји елемент скупа $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ око кога се сви чланови групишу. Други проблем је у томе што интуиција може да погрешити, па је потребно направити прецизну дефиницију онога што је примеру низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ интуитивно јасно и што

га издваја од низова $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Једно резонување би могло бити следеће: „неограничено” у интуицији да се низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неограничено приближава ка 1 можемо да оправдамо тиме што ма колико мало растојање изаберемо, можемо наћи члан низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ на растојању од тачке 1 мањем од изабраног. Та се чињеница може исказати и на следећи начин:

За свако $M > 0$ постоји n такво да је $|a_n - 1| < M$ или, еквивалентно, да се за свако $M > 0$ може наћи n такво да је $a_n \in (1 - M, 1 + M)$.

Овај услов је очигледно потребан, али није довољан јер и за свако $M > 0$ можемо наћи n такав да је $a_n \in (\frac{3}{2} - M, \frac{3}{2} + M)$; конкретно, за $n = 2$ то важи јер је $a_2 = \frac{3}{2}$, а низ a_n , по нашој интуицији, не тежи ка $\frac{3}{2}$ већ ка 1, тј. око броја 1 се групише бесконачно много њих, док се око броја $\frac{3}{2}$ не групишу, већ је само један члан низа једнак $\frac{3}{2}$. Слично, за свако $M > 0$ можемо наћи n такав да је $a_n \in (\frac{2}{3} - M, \frac{2}{3} + M)$ јер је $a_3 = \frac{2}{3}$. Желимо да опишемо да се чланови низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ све више приближавају броју 1 и да их има бесконачно много, не само један (као у случају члана a_2 и броја $\frac{3}{2}$) или коначно много њих. Оно што разликује бројеве $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$ од броја 1 када је у питању неограничено приближавање чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неком броју је, између осталог чињеница да за свако $M > 0$ у интервалу $(1 - M, 1 + M)$ има бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ док у $(\frac{3}{2} - M, \frac{3}{2} + M)$ и $(\frac{2}{3} - M, \frac{2}{3} + M)$ нема бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Шта више, за било које $a \neq 1$ постоји неко $M > 0$ (на пример $M = \frac{|a-1|}{3}$) такво да се у интервалу $(a - M, a + M)$ налази највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Зато поправљамо услов на следећи начин:

За свако $M > 0$ постоји бесконачно много бројева n таквих да је $|a_n - 1| < M$ или, еквивалентно, да се у свакој M -околини тачке 1 налази бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Овај услов је потребан, али није довољан. Њиме смо делимично описали „гомилање” чланова низа око броја 1, али се нисмо обезбедили да је број 1 једини са том особином, што у случају низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ очигледно важи. За разлику од низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у коме се чланови низа „гомилају” око једне тачке, низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има две такве тачке. У свакој M -околини тачке -2 налази бесконачно много чланова низа $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и у свакој M -околини тачке 2 налази бесконачно много чланова низа $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, а за низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не мислимо да тежи броју -2 , нити мислимо да тежи броју 2. Ситуација је још гора када се посматра низ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Из особина синуса следи да како год изаберемо број $r \in [-1, 1]$, у свакој M -околини броја r има бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ова интуиција „нагомилавања” заслужије да се формализује.

Дефиниција 2.6. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Кажемо да је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако се у свакој M -околини тачке a налази бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Број 1 је једина тачка нагомилавања низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. За разлику од тога, низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има две тачке нагомилавања. То су -2 и 2 .

Лема 2.7. (1) Ако је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неопадајући за довољно велико n , a му је тачка нагомилавања и $b < a$, онда b не може бити тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(2) Ако је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нерастући за довољно велико n , a му је тачка нагомилавања и $b > a$, онда b не може бити тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Доказ. (1) Нека је $M = \frac{a-b}{2}$. Тада су M -околинe тачака a и b дисјунктне. Нека је n_0 минимум скупа $\{n \mid x_n \in (a - M, a + M)\}$. С обзиром да је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неопадајући за свако $n > n_0$, важиће $x_n \geq x_{n_0}$. Ово, уз чињеницу да је $x_{n_0} \in (a - M, a + M)$, да је $b < a$ и да су M -околинe тачака a и b дисјунктне (т.ј. $b < b + M = a - M < a$), за последицу даје да за свако $n > n_0$ члан x_n не може бити у M -околини тачке b . Дакле у M -околини тачке b је највише коначно много тачака низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па b не може бити тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Други део леме се слично доказује. \square

Директна последица претходне леме је следеће тврђење.

Теорема 2.8. Монотон (за довољно велико n) низ не може имати више од једне тачке нагомилавања.

Доказ. Свођењем на контрадикцију ћемо показати да монотон низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не може имати више од једне тачке нагомилавања. Зато, претпоставимо да су c и d тачке нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и да је $c > d$. Ако је низ неопадајући, онда по делу (1) леме 2.7 за $a = c$ и $b = d$, следи да d није тачка нагомилавања, што је у протвречју са претпоставком да су и c и d тачке нагомилавања.

Ако је низ нерастући, онда по делу (2) леме 2.7 за $a = d$ и $b = c$, следи да c није тачка нагомилавања, што је у протвречју са претпоставком да су и c и d тачке нагомилавања. Дакле, претпоставка да низ има више од једне тачке нагомилавања је неодржива. \square

Вратимо се на низове из примера. Дакле, тачке нагомилавања низа $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ су тачно бројеви -2 и 2 , док је $[-1, 1]$ скуп тачака нагомилавања низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. За разлику од њих, низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има тачно једну тачку нагомилавања 1. Можемо закључити да је услов да низ има само једну тачку нагомилавања потребан да бисмо рекли да низ тежи тој тачки нагомилавања. Иако пример низова $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сугерише да је тај услов довољан, када у анализу проблема

укључимо низ $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ видимо да то није довољно. Наиме, ако је n непаран број, дакле облика $2k - 1$ за неко $k \in \mathbb{N}$, онда је $d_n = d_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$. Нека је $M > 0$. Услов $d_{2k-1} \in (-M, M)$ је еквивалентан услову $\frac{1}{2k-1} < M$, а тиме и $\frac{1}{2M} + \frac{1}{2} < k$. Како последњу неједнакост задовољава бесконачно много природних бројева k , а за сваки такав број је $d_{2k-1} \in (-M, M)$, закључујемо да постоји бесконачно много чланова низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који су у M -околини тачке 0. Како то важи за свако $M > 0$, закључујемо да је 0 тачка нагомилавања низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Није тешко приметити да за сваки други реалан број a постоји његова M -околина која садржи највише коначно много чланова низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле, низ $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има тачно једну тачку нагомилавања и то је нула, али не можемо рећи да низ тежи нули кад на памети имамо да се парни чланови низа удаљавају од броја 0. Дакле, описали смо како тачно да разликујемо низове као што је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ од низова као што су $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, али још нисмо описали како тачно да разликујемо низове као што је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ од низова као што је $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Такву ситуацију можемо поправити тиме што ћемо рећи да се ван сваке M -околине броја 1 налази највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.¹ Оваква формулација у потпуности описује интуитивну представу када неки низ тежи ка неком броју и низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ раздваја од низова као што су $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Дефиниција 2.9. Кажемо да низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ тежи броју $a \in \mathbb{R}$ или да конвергира ка $a \in \mathbb{R}$, ако се ван сваке M -околине броја a налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Кажемо и да је број a лимес или граница или гранична вредност низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и пишемо $\lim x_n = a$. У том случају кажемо да је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан. За низ који није конвергентан, кажемо да је дивергентан.

Напомена 2.10. Еквиваленти дефиниције $\lim a_n = a$ су:

- За свако $M > 0$ постоји n_0 такво да је $a_n \in \hat{O}(M, a)$ кад год је $n > n_0$,
- За свако $M > 0$ постоји n_0 такво да је $a_n \in (a - M, a + M)$ кад год је $n > n_0$,
- За свако $M > 0$ постоји n_0 такво да је $|a_n - a| < M$ кад год је $n > n_0$.

Нотација 1. Осим ознаке $\lim a_n = a$, користе се још ознаке:

- $a_n \longrightarrow a$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$,
- $a_n \longrightarrow a, \quad n \longrightarrow +\infty$ и
- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

¹Наравно, тада ће у свакој M -околине броја 1 бити бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Пример 2.** (1) Број a је граница низа коме је сваки члан једнак броју a , тј. $\lim a = a$. Заиста, како је за свако n испуњено $x_n = a$, онда се у свакој M -околини броја a налазе сви чланови низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па је $\lim x_n = a$.
- (2) $\lim \frac{1}{n} = 0$. То следи из чињенице да за свако $M > 0$, постоји² природан број $n_0 > \frac{1}{M}$ (n_0 може бити било који природан број већи од $[\frac{1}{M}]$). Ако је $x_n = \frac{1}{n}$, онда је $0 < x_n < M$ испуњено за свако $n > n_0$, па су ван M околине тачке 0 само неки од $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_0}\}$. Дакле, за сваку M -околину тачке 0 важи да је ван ње највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, што по дефиницији значи да је $\lim x_n = 0$.
- (3) $\lim(a + \frac{(-1)^n}{n}) = a$. Слично као малопре, из чињенице да за свако $M > 0$ постоји природан број $n_0 > \frac{1}{M}$, закључујемо да $|x_n - a| < M$ кад год је $n > n_0$, што по дефиницији (напомена 2.10) значи да је $\lim x_n = a$.

Није тешко формулисати својство које ће низове $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ где је $b'_n = -b_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, разликовати од низова $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Дефиниција 2.11. Кажемо да је $+\infty$ граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или да је $+\infty$ лимес низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или да x_n тежи ка $+\infty$ и пишемо $\lim x_n = +\infty$ ако се ван сваке K -околине тачке $+\infty$ налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Кажемо да је $-\infty$ граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или да је $-\infty$ лимес низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или да x_n тежи ка $-\infty$ и пишемо $\lim x_n = -\infty$ ако се ван сваке K -околине тачке $-\infty$ налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. У случају када је x_n тежи ка $+\infty$ или x_n тежи ка $-\infty$ кажемо да низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ одређено дивергира.

Напомена 2.12. Еквивалент дефиниције $\lim x_n = +\infty$ је:

- За свако $M > 0$ постоји n_0 такво да је $a_n \in \hat{O}(M, +\infty)$ кад год је $n > n_0$,
- За свако $M > 0$ постоји n_0 такво да је $a_n \in O(M, +\infty)$ кад год је $n > n_0$,
- За свако $K \in \mathbb{R}$ постоји n_0 такво да је $x_n \in (K, +\infty)$ кад год је $n > n_0$, тј.
- За свако $K \in \mathbb{R}$ постоји n_0 такво да је $x_n > K$ кад год је $n > n_0$.

Слично, еквивалент дефиниције $\lim x_n = -\infty$ је:

- За свако $M > 0$ постоји n_0 такво да је $a_n \in \hat{O}(M, -\infty)$ кад год је $n > n_0$,
- За свако $M > 0$ постоји n_0 такво да је $a_n \in O(M, -\infty)$ кад год је $n > n_0$,
- За свако $K \in \mathbb{R}$ постоји n_0 такво да је $x_n \in (-\infty, K)$ кад год је $n > n_0$, тј.
- За свако $K \in \mathbb{R}$ постоји n_0 такво да је $x_n < K$ кад год је $n > n_0$.

Пример 3. (1) $\lim n = +\infty$. Нека је $x_n = n$. За свако K постоји³ природан број $n_0 > K$ (n_0 може бити било који природан број већи од $[K]$). Тада

²Архимедово својство

³Архимедово својство

за свако $n > n_0$ важи $K < x_n$, што по дефиницији (напомена 2.12) значи да је $\lim x_n = +\infty$.

- (2) $\lim(a - n) = -\infty$. Слично као у претходном примеру, то следи из чињенице да за свако K постоји природан број $n_0 > a - K$. Тада, ако означимо са x_n низ $a - n$, за свако $n > n_0$ важи $x_n < K$, што по дефиницији (напомена 2.12) значи да је $\lim x_n = -\infty$.
- (3) $\lim(a + \frac{1}{n} - n) = -\infty$. Нека је K било који реалан број и нека је $n_0 > [a + 1 - K]$. Ако је $n > n_0$, тада је $n > a + 1 - K$, па је $a + 1 - n < K$, што уз $a + \frac{1}{n} - n < a + 1 - n$ даје $a + \frac{1}{n} - n < K$, тј. $x_n < K$. Закључујемо да је $\lim x_n = -\infty$.

Следећа теорема обједињује дефиниције 2.9 и 2.11.

Теорема 2.13. Нека је $A \in \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$. Тада је $\lim x_n = A$ ако и само ако се ван сваке околине тачке A налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Другачије записана претходна теорема гласи:

Последица 2.14. Нека је $A \in \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$. Тада је $\lim x_n = A$ ако и само ако

$$(\forall \delta > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(x_n \in \widehat{O}(\delta, A)).$$

Чињеница 2.15. Из дефиниција 2.6, 2.9 и 2.11 директно следи:

- да $a \in \mathbb{R}$ није тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако и само ако постоји M -околина тачке a која садржи највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- да $a \in \mathbb{R}$ није граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако и само ако постоји M -околина тачке a ван које постоји бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- да $+\infty$ није граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако и само ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је ван интервала $(M, +\infty)$ постоји бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- да $-\infty$ није граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако и само ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је ван интервала $(-\infty, M)$ постоји бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Чињеница 2.16. Ако је низ ограничен одозго, онда му $+\infty$ не може бити граница. Слично, ако је низ ограничен одоздо, онда му $-\infty$ не може бити граница.

Ова чињеница следи директно из дефиниција ограниченог одозго низа тј. претходне чињенице. Ако је низ ограничен одозго, онда постоји $M \in \mathbb{R}$ такав да је сваки члан низа у интервалу $(-\infty, M)$. Тада је ван интервала $(M, +\infty)$ бесконачно много чланова низа (заправо сви), па $+\infty$ није граница низа. Слично се резонује у случају низа ограниченог одоздо.

Теорема 2.17. Низ не може имати више од једне граничне вредности.

Доказ. Прво ћемо показати да низ не може имати две коначне границе. Нека је $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Изаберимо $M = \frac{|a-b|}{2}$. Тада су M -околице бројева a и b дисјунктне. По дефиницији, с обзиром да је a граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ван њене M -околице се налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, одакле следи да се у M -околини тачке a налази бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. С обзиром да су M -околице бројева a и b дисјунктне, сваки члан низа који се налази у M -околини тачке a је ван M -околице тачке b , па ван уочене M -околице тачке b постоји бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, што по дефиницији значи да b није граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Управо смо показали да низ не може имати две коначне граничне вредности.

Покажимо сад да низ не може имати једну коначну и једну бесконачну границу. Нека је $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$ и нека је $K = 1 + |a|$. Тада су 1-околина тачке a и интервали $(-\infty, -K)$ и $(K, +\infty)$ дисјунктни. Како је a граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, то се ван њене 1-околице налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле интервали $(-\infty, -K)$ и $(K, +\infty)$ садрже највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па се ван сваког од њих налази бесконачно много чланова низа, што по дефиницији значи да није ни $\lim x_n = -\infty$ ни $\lim x_n = +\infty$.

Једини преостао случај је да је истовремено буде $\lim x_n = -\infty$ и $\lim x_n = +\infty$. Тада би за свако $K \in \mathbb{R}$ и ван интервала $(-\infty, -K + 1)$ и ван интервала $(K - 1, +\infty)$ било највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, што би значило да низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има само коначно много чланова, тј. да има само коначно много природних бројева. Контрадикција!

Управо смо показали да низ не може имати више од једне границе. \square

Дефиниција 2.18. Кажемо да низ a_n неодређено дивергира ако не конвергира и ако не дивергира одређено.

Низови $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неодређено дивергирају. Не могу дивергирати одређено јер су ограничени. Што се низа $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ тиче, ако изаберемо $M = \frac{1}{2}$, онда се у сваком од интервала $I_1 = (-2 - \frac{1}{2}, -2 + \frac{1}{2})$ и $I_2 = (2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2})$ налази бесконачно много чланова низа $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. С друге стране, како год да изаберемо број $c \in \mathbb{R}$ његова M -околина за $M = \frac{1}{2}$, тј. интервал $J = (c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$ нема заједничких елемената са бар једним од интервала I_1 и I_2 . Ако је $J \cap I_1 = \emptyset$, онда оних бесконачно много чланаова низа $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који се налазе у I_1 морају бити ван J , па није испуњено да се ван сваке M -околице броја c налази само коначно много чланова низа $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле у том случају број c не може бити граница низа $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Слично важи и у случају када је $J \cap I_2 = \emptyset$. Дакле, низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није конвергентан.

Слично низ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није конвергентан. Ограничен је јер за сваки реалан број x важи $|\sin x| \leq 1$, а тиме је за сваки природан број n испуњено $|y_n| \leq 1$. Дакле $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не може да дивергира одређено.

Нека је $r \in [-1, 1]$. Број r не може бити граница низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. То следи из следећег резоновања. Ако је $r = 1$ изаберимо $M = \frac{1}{2}$. Тада су M -околина броја -1 и M -околина броја $r = 1$ дисјунктне, па с обзиром да M -околина броја -1 садржи бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, закључујемо да се ван M -околине броја r налази бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, а тиме и да r не може бити граница низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ако је $r \neq 1$ изаберимо $M = \frac{1-r}{2}$. Тада су M -околина броја 1 и M -околина броја r дисјунктне, па с обзиром да M -околина броја 1 садржи бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, закључујемо да се ван M -околине броја r налази бесконачно много чланова низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, а тиме и да r не може бити граница низа $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није конвергентан. С обзиром да смо већ показали и да не дивергира одређено, закључујемо да дивергира неодређено.

Оно што је „сметало” низовима $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ да имају границу је чињеница да имају више од једне тачке нагомилавања. То је исказ следеће теореме, коју доказујемо резонујући слично као што смо резоновали када смо показали да низови $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ немају границу.

Теорема 2.19. Ако је низ конвергентан, онда он има тачно једну тачку нагомилавања и то је његова граница. Ако је низ одређено дивергентан, онда он нема тачака нагомилавања.

Доказ. Размотримо прво случај $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. По дефиницији, ван сваке M -околине тачке a се налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па се у свакој M -околини тачке a се налази бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле, a јесте тачка нагомилавања. Нека је $b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ и нека је $M = \frac{|a-b|}{2}$. Тада су M -околина тачака a и b дисјунктне и пошто је a граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, онда се ван њене M -околине, за свако, а тиме и за уочено M , налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, што значи да се у уоченој M -околини тачке b не може налазити бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па b не може бити тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Управо смо показали да ако је $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$, онда је a једина тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Нека је $c \in \mathbb{R}$. Ако је $\lim x_n = +\infty$, онда, по дефиницији, за свако $M \in \mathbb{R}$ ван $(M, +\infty)$ се налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па ће то важити и за $M = c + 1$. Тада је у 1 -околини тачке c највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па му c није тачка нагомилавања. Слично, ако је $\lim x_n = -\infty$, онда се ван $(-\infty, c - 1)$ се налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па ће у 1 -околини тачке c бити највише коначно много

чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, одакле следи да c није тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Управо смо показали да ниједан реалан број c не може бити тачка нагомилавања одређено дивергентног низа. \square

Контрапозиција претходног тврђења је следећа последица

Последица 2.20. Ако низ има више од једне тачке нагомилавања онда нема лимес.

Показали смо да ако низ конвергира, онда има тачно једну тачку нагомилавања. Да обрнуто, не мора да важи показује пример низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Он има тачно једну тачку нагомилавања, то је број 0. Међутим $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није конвергентан, јер се парни чланови „удаљавају” од броја 0, па ван сваке M -окоLINE тачке 0 има бесконачно много чланова низа, те једина тачка нагомилавања не може бити граница низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Такође, ниједан други реалан број не може бити граница низа $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$, јер би онда, по теорему 2.19, тај број био једина тачка нагомилавања, па број 0 не би био тачка нагомилавања, што је у противречју с чињеницом да је 0 тачка нагомилавања. Оно што „смета” низу $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ да буде конвергентан, је што, иако непарни чланови теже ка 0, парни теже ка $+\infty$, а тиме је низ $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неограничен. О томе говори следећа теорема.

Теорема 2.21. (1) Конвергентан низ је ограничен.

- (2) Ако неки интервал садржи бесконачно много чланова низа, онда низ у том интервалу има тачку нагомилавања.
- (3) Ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања.
- (4) Ако је низ ограничен и има тачно једну тачку нагомилавања, онда је конвергентан и граница му је та тачка нагомилавања.

Доказ. 1. Нека је $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Нека је $M > 0$ било који број. Из дефиниције лимеса низа следи да се ван интервала $(a - M, a + M)$ налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ако ван интервала $(a - M, a + M)$ нема чланова низа, онда је низ ограничен бројем $K = \max\{|a - M|, |a + M|\}$. Претпоставимо да ван интервала $(a - M, a + M)$ има чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Нека су то $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}$. Нека је $K = \max\{|a - M|, |a + M|, |x_{n_1}|, |x_{n_2}|, |x_{n_3}|, \dots, |x_{n_k}|\}$. Тада је $-K \leq x_n \leq K$, што је требало доказати.

2. Нека интервал $[m, M]$ садржи бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Преозначимо тачке m и M : нека је $K_1 = m$ и $L_1 = M$. Дакле у интервалу $[K_1, L_1]$ се налази бесконачно много чланова низа и дужина интервала $[K_1, L_1]$ је $M - m$. Нека је $M_1 = \frac{K_1 + L_1}{2}$. Тачка M_1 је средиште интервала $[K_1, L_1]$. Бар један од интервала $[K_1, M_1]$ и $[M_1, L_1]$ садржи бесконачно много чланова низа јер је њихова унија интервал $[K_1, L_1]$. Ако је то $[K_1, M_1]$, означимо са K_2 леву границу

интервала и са L_2 десну границу интервала, тј. нека је $K_2 = K_1$ и $L_2 = M_1$. У супротном, нека је $K_2 = M_1$ и $L_2 = L_1$. У сваком случају, интервал $[K_2, L_2]$ садржи бесконачно много чланова низа и дужина тог интервала је $\frac{M-m}{2}$. Ако смо настављајући овај поступак формирали интервал $[K_n, L_n]$ који садржи бесконачно много чланова низа и коме је дужина $\frac{M-m}{2^n}$, онда на сличан начин конструишемо интервал $[K_{n+1}, L_{n+1}]$ који садржи бесконачно много чланова низа и коме је дужина $\frac{M-m}{2^{n+1}}$. Конкретно, нека је $M_n = \frac{K_n+L_n}{2}$. Бар један од интервала $[K_n, M_n]$ и $[M_n, L_n]$ садржи бесконачно много чланова низа, јер је њихова унија интервал $[K_n, L_n]$ који садржи бесконачно много чланова низа. Ако је то $[K_n, M_n]$, нека је $K_{n+1} = K_n$ и $L_{n+1} = M_n$. У супротном, нека је $K_{n+1} = M_n$ и $L_{n+1} = L_n$. У сваком случају, интервал $[K_{n+1}, L_{n+1}]$ садржи бесконачно много чланова низа и дупло је краћи од интервала $[K_n, L_n]$ (M_n је средиште интервала $[K_n, L_n]$). Дакле, дужина интервала $[K_{n+1}, L_{n+1}]$ је $\frac{M-m}{2^{n+1}}$. Настављајући поступак, може се конструисати бесконачна низ уметнутих интервала који садрже бесконачно много чланова низа. Важи

$$K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \dots \leq K_n \leq \dots \leq L_m \leq \dots \leq L_3 \leq L_2 \leq L_1 \quad \text{и} \\ L_n - K_n = \frac{M-m}{2^n}.$$

Скуп $A = \{K_n | n \in \mathbb{N}\}$ је ограничен одозго било којим елементом скупа $B = \{L_n | n \in \mathbb{N}\}$ и обрнуто, скуп B је ограничен одоздо било којим елементом скупа A . Следи да скуп A има супремум, скуп B има инфимум и да је $\sup A \leq \inf B$. Важи и више од тога.

$$\text{За свако } n \in \mathbb{N} \text{ је } K_n \leq \sup A \leq \inf B \leq L_n.$$

Одатле следи да је за свако n испуњено

$$0 \leq \inf B - \sup A \leq L_n - K_n = \frac{M-m}{2^n}.$$

Закључујемо⁴ да је $\inf B = \sup A$. Означимо тај број са a и покажимо да је то тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Најпре приметимо да је $K_n \leq a \leq L_n$. Нека је ε било који реалан позитиван број. Нека је n природан број такав да је $2^n > \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Тада је $\frac{M-m}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, а тиме је и $[K_n, L_n] \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. С обзиром да $[K_n, L_n]$ садржи бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, то ће и $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ садржати бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Управо смо показали, да ма како изабрали $\varepsilon > 0$ у ε -околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, што, по дефиницији, значи да је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен бројем K . На основу дела 2 овог тврђења, закључујемо да у интервалу $[-K, K]$ низ има тачку нагомилавања.

⁴Архимедов принцип

4. Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен бројем K и нека му је a једина тачка нагомилавања. Из дела 2. ове теореме следи да низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ у интервалу $[-K, K]$ има тачку нагомилавања. Како је a једина тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, закључујемо да је $a \in [-K, K]$. Нека је $M > 0$. Свођењем на контрадикцију, показаћемо да се ван M -околине тачке a налази највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ одакле ће следити да је $\lim x_n = a$. Дакле, претпоставка коју обарамо је да се ван неке M -околине тачке a налази бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $(a - M, a + M) \subsetneq (-K, K)$, јер ако није испуњен тај услов, можемо заменити M са $M_1 = \frac{1}{2} \min\{M, K - a, a + K\}$ и тада ће бити испуњено

- (1) $(a - M_1, a + M_1) \subsetneq (-K, K)$
- (2) $(a - M_1, a + M_1) \subseteq (a - M, a + M)$, па су сви чланови низа који су ван $(a - M, a + M)$ уједно и ван $(a - M_1, a + M_1)$. Дакле, ван $(a - M_1, a + M_1)$ се налази бесконачно много чланова низа.
- (3) $(a - M_1, a + M_1)$ садржи бесконачно много чланова низа јер је M_1 -околина тачке нагомилавања a .

Дакле, важи $-K < a - M < a + M < K$, а тиме и

$$[-K, K] = [-K, a - M] \cup (a - M, a + M) \cup [a + M, K].$$

Како су сви чланови низа у интервалу $[-K, K]$ (јер K ограничава низ) и како ван интервала $(a - M, a + M)$ има бесконачно много чланова низа (то је претпоставка под којом радимо),⁵ закључујемо да се у бар једном од интервала $[-K, a - M]$ и $[a + M, K]$ налази бесконачно много чланова низа. По делу 2 овог тврђења следи да су у $[-K, a - M] \cup [a + M, K]$ налази тачка нагомилавања низа. Она је очигледно различита од тачке a , што је у противречју са условом тврђења да је a једина тачка нагомилавања $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле, претпоставка да постоји M -околина тачке a ван које се налази бесконачно много чланова низа је неодржива, па важи њена негација: Ван сваке M -околине тачке a је највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. То, по дефиницији, значи да је a граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Теорема 2.22. Монотон (за довољно велико n) и ограничен низ је конвергентан.

Доказ. Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотон и ограничен низ. По теорему 2.8 низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, с обзиром да је монотон, има највише једну тачку нагомилавања. С обзиром да је ограничен, по делу (3) теореме 2.21, низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има бар једну тачку нагомилавања. Закључујемо да низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има тачно једну тачку нагомилавања. Сад, по делу (4) теореме 2.21, следи да је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан. \square

⁵и хипотеза коју желимо да оборимо свођењем на контрадикцију

Теорема 2.23. Ако је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен и нерастући почевши од n_0 , онда је $\lim x_n = \inf\{x_n | n \geq n_0\}$. Ако је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен и неоппадајући почевши од n_0 , онда је $\lim x_n = \sup\{x_n | n \geq n_0\}$.

Доказ. Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нерастући почевши од неког n_0 и нека је ограничен одоздо. Тада је скуп $A = \{x_n | n \geq n_0\}$ ограничен одоздо, па има инфимум. Означимо га са a . Из дефиниције инфimumа следи да за свако $n \geq n_0$ важи $x_n \geq a$. Ако је $x_{n_1} = a$ за неко $n_1 \geq n_0$, онда је, с обзиром да је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нерастући почевши од n_0 и да за свако $n > n_0$ важи $x_n \geq a$, испуњено $x_n = a$ за свако $n > n_1$. Тада је a граница низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ јер се у свакој M -околини броја a налазе сви сем евентуално првих n_1 чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Зато претпоставимо да ни за једно $n \geq n_0$ не важи $x_n = a$. Тада ће, с обзиром да за свако $n > n_0$ важи $x_n \geq a$, за свако $n > n_0$ важити $x_n > a$. Уз чињеницу да је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нерастући, за свако $n > n_0$ важити $x_n \geq x_{n+1} > a$.

Ако би за неко $\varepsilon > 0$ важило да су сви елементи скупа A већи од $a + \varepsilon$, онда би $a + \varepsilon$ била миноранта скупа A већа од инфimumа, што је немогуће јер је по дефиницији, инфимум највећа миноранта, па закључујемо да за свако $\varepsilon > 0$, постоји елемент скупа A у интервалу $[a, a + \varepsilon)$. Нека је то x_{n_1} . Важи $x_{n_1} > a$. Даље, за $\varepsilon_1 = x_{n_1} - a$ постоји елемент скупа A у интервалу $[a, a + \varepsilon_1)$ јер би у супротном $a + \varepsilon_1$ била миноранта скупа A већа од инфimumа. Нека је то x_{n_2} . Важи $x_{n_1} > x_{n_2} > a$. Приметимо да су тада и x_{n_1} и x_{n_2} у интервалу $[a, a + \varepsilon)$. Даље, за $\varepsilon_2 = x_{n_2} - a$ постоји елемент скупа A у интервалу $[a, a + \varepsilon_2)$ јер би у супротном $a + \varepsilon_2$ била миноранта скупа A већа од инфimumа. Нека је то x_{n_3} . Важи $x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > a$. Приметимо да су тада и x_{n_1} и x_{n_2} и x_{n_3} у интервалу $[a, a + \varepsilon)$. На овај начин се бира низ елемената $x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > \dots > x_{n_k} > \dots > a$ скупа A који су у интервалу $[a, a + \varepsilon)$. Управо смо показали да у произвољној ε -околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па му је a тачка нагомилавања. По терему 2.22, низ је конвергентан. Како је конвергентом низу једина тачка нагомилавања уједно и граница, закључујемо да је $\lim x_n = a = \inf\{x_n | n \geq n_0\}$.

Слично се показује да ако је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неоппадајући почевши од неког n_0 и ако је ограничен одозго, онда му је $\sup\{x_n | n > n_0\}$ граница. \square

ПОГЛАВЉЕ 3

Подниз

У вези са тачкама нагомилавања је појам подниза који уводимо следећом дефиницијом.

Дефиниција 3.1. Нека је $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ строго растући низ природних бројева и нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ реалних бројева (или низ матрица, низ комплексних бројева, низ функција...). Тада је низ $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ одређен са

$$y_k = x_{n_k}, \text{ за свако } k \in \mathbb{N}$$

подниз низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Нотација 2. Уместо да пишемо „ $y_k = x_{n_k}$, за свако $k \in \mathbb{N}$ ” и кажемо да је $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ подниз низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, чешће кажемо да је $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ подниз низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и наводимо само општи члан x_{n_k} .

На пример, ако изаберемо да је $n_k = 2k$, онда добијамо да је $a_{n_k} = a_{2k} = \frac{2k+1}{2k}$ подниз низа $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$. Чешће пишемо $a_{2n} = \frac{2n+1}{2n}$ уместо $a_{2k} = \frac{2k+1}{2k}$. Такође добијамо да је $b_{2n} = 2n - 4n^2$ подниз низа $b_n = n - n^2$, да је $c_{2n} = \frac{4n}{2n+1}$ подниз низа $c_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1}$, да је $d_{2n} = 2n$ подниз низа $d_n = n^{(-1)^n}$ и да је $y_{2n} = 0$ подниз низа $y_n = \sin \frac{n\pi}{2}$. Ако изаберемо други растући низ природних бројева, добићемо другачије поднизове. На пример, ако изаберемо да је $n_k = 2k - 1$, онда ћемо добити да је $a_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}$ подниз низа $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$, да је $b_{2n-1} = 6n - 2 - 4n^2$ подниз низа $b_n = n - n^2$, да је $c_{2n-1} = \frac{1-2n}{n}$ подниз низа $c_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1}$, да је $d_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ подниз низа $d_n = n^{(-1)^n}$ и да је $y_{2n-1} = (-1)^{n-1}$ подниз низа $y_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

Слично, ако изаберемо да је $n_k = 4k - 1$, онда ћемо добити да је $y_{4n-1} = -1$ подниз низа $y_n = \sin \frac{n\pi}{2}$.

Бирање низа n_k није увек правилно, као у претходним примерима где смо бирали парне или непарне или сваки четврти почевши од трећег, иако се најчешће за таквим избором јавља потреба у конкретном случају. Сама дефиниција не ограничава избор низа n_k никако другачије осим условом да је $n_k < n_{k+1}$ испуњено за свако $k \in \mathbb{N}$.

Следеће тврђење описује однос поднизова, тачака нагомилавања и границе неког низа.

Теорема 3.2. (1) Реалан број a је тачка нагомилавања низа ако и само ако постоји његов подниз који конвергира ка a .

(2) Низ има границу ако и само ако сваки његов подниз има границу и тада је граница низа једнака граници било ког његовог подниза.

Доказ. (1) Прво ћемо показати да ако је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, онда постоји подниз $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ који тежи ка a . Разликујемо два случаја:

Сучај 1.1 Постоји бесконачно много чланова низа који су једнаки a .

У овом случају за $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ бирамо баш те чланове који су једнаки броју a . Конкретна конструкција би била следећа: Нека је $A = \{n \in \mathbb{N} | x_n = a\}$.

Корак 1: Са n_1 означимо $\min A$.

Корак $k + 1$: Ако смо изабрали $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$, онда бирамо да n_{k+1} буде $\min(A \setminus \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k\})$.

На овај начин смо изабрали растући низ природних бројева $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено $x_{n_k} = a$, па ће се у свакој M -околини бити сви чланови низа $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, што по дефиницији значи да је $\lim x_{n_k} = a$.

Сучај 1.2 Не постоји бесконачно много чланова низа који су једнаки a . Пошто је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, онда у његовој 1-околини има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, од којих је највише коначно много једнако a . Изаберимо један различит од a и са n_1 означимо његов индекс.

Ако смо изабрали n_k , онда n_{k+1} бирамо на следећи начин: У $\frac{1}{k}$ -околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (јер је a тачка нагомилавања тог низа), од којих је највише коначно много једнако a . Тада у тој околини мора бити и бесконачно много чланова низа чији индекс је већи од n_k и који су различити од a . Изаберимо један такав и означимо његов индекс са n_{k+1} .

На овај начин смо формирали растући низ природних бројева $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ такав да је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено $x_{n_k} \in (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$. Како за свако $M > 0$, постоји $k > \frac{1}{M}$, то ће скуп чланова низа $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ који су ван M -околине тачке a бити подскуп скупа $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}\}$. Дакле, ван сваке M -околине тачке a је највише коначно много чланова низа $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, што по дефиницији значи да је $\lim x_{n_k} = a$.

Покажимо да ако постоји подниз $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ који тежи ка $a \in \mathbb{R}$, онда је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Из дефиниције лимеса следи да се ван сваке M -околине тачке a налази највише коначно много чланова подниза $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Зато се унутар околине налази бесконачно много чланова подниза $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. С обзиром да је сваки члан подниза, уједно и члан низа, закључујемо да у свакој

M -околини тачке a има бесконачно много чланова низа, што по дефиницији значи да је a тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(2) Ако се ван неке M -околине тачке $a \in \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$ налази највише коначно много чланова низа, онда се ван те околине налази највише коначно много чланова сваког његовог подниза. Зато из $\lim x_n = a$ следи $\lim x_{n_k} = a$ за сваки подниз $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Претпоставимо да сваки подниз низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има границу. Како је сам низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ себи подниз, следи да низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има границу. На основу претходно доказаног следи $\lim x_n = \lim x_{n_k}$ за сваки подниз $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Последица 3.3. (1) Ако постоји подниз који нема границу, онда ни низ нема границу.

(2) Ако постоје два подниза чије су границе различите, онда низ нема границу.

Доказ. Последица директно следи из дела (2) теореме 3.2. Део (1) ове последице је контрапозиција исказа „ако низ има границу, онда и сваки његов подниз има границу”, док је други део ове последице контрапозиција исказа „ако низ има границу, онда сваки његов подниз има исту границу као и сам низ”. \square

Особине низова који имају границу

У наставку описујемо неке особине низова који имају границу.

Теорема 4.1. Нека $a_n \leq b_n$ важи за довољно велико n . Тада:

- (1) Ако је $\lim a_n = +\infty$, онда је $\lim b_n = +\infty$;
- (2) Ако је $\lim b_n = -\infty$, онда је $\lim a_n = -\infty$;
- (3) Ако су $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни, онда је $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Доказ. (1) Нека је $M > 0$. Из $\lim a_n = +\infty$ по дефиницији закључујемо да постоји највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ван интервала $(M, +\infty)$. Дакле, постоји неки природан број k_0 такав да је $M < a_n$, кад год је $n > k_0$. С обзиром да је $a_n \leq b_n$ испуњено за довољно велико n , постоји природан број l_0 , такав да је $a_n \leq b_n$ испуњено за свако $n > l_0$. Нека је $n_0 = \max\{k_0, l_0\}$. Тада из $n > n_0$ следи да је и $n > k_0$ и $n > l_0$, а тиме и да је $M < a_n$ и да је $a_n \leq b_n$, одакле закључујемо да за свако $n > n_0$ важи $M < b_n$. Дакле, постоји највише коначно много чланова низа $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ван интервала $(M, +\infty)$. Како ово резонување не зависи од избора броја M , закључујемо да је $\lim b_n = +\infty$.

Део тврђења под (2) се доказује слично као и део под (1).

(3) Нека је $\lim a_n = a$ и нека је $\lim b_n = b$. Претпоставимо да је $b < a$. Нека је $M = \frac{a-b}{2}$. Тада су M -окоLINE тачака a и b дисјунктне и важи

$$b - M < b + M = a - M < a + M.$$

Из дефиниције границе следи да је ван $(b-M, b+M)$ има највише коначно много чланова низа $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Нека је k_0 највећи индекс за који је b_n ван интервала $(b-M, b+M)$. Слично, нека је l_0 највећи индекс за који је a_n ван интервала $(a-M, a+M)$. Нека је $n_0 = \max\{k_0, l_0\}$. Тада за свако $n > n_0$ важи

$$b - M < b_n < b + M = a - M < a_n < a + M,$$

одакле следи да није испуњено $a_n \leq b_n$ за довољно велико n . Контрадикција. Дакле, претпоставка да је $b < a$ је неодржива, па мора бити $a \leq b$. \square

Последица 4.2. Нека је $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$

- (1) Ако је $b < a < c$, онда је $b < a_n < c$ за довољно велико n .

(2) Ако је $b \leq a_n \leq c$ за довољно велико n , онда је $b \leq a \leq c$.

Доказ. (1) Нека је $M = \frac{1}{2} \min\{a - b, c - a\}$. Тада је $b < a - M < a + M < c$. Из дефиниције границе, следи да постоји неко n_0 такво да важи $a_n \in (a - M, a + M)$, кад год је $n > n_0$. Дакле, за $n > n_0$ ће важити $b < a - M < a_n < a + M < c$. Одатле закључујемо да је $b < a_n < c$ за довољно велико n .

(2) Нека је $b_n = b$ и $c_n = c$. Из $b_n \leq a_n$ за довољно велико n , по теореме 4.1, следи да је $b \leq a$. Из $a_n \leq c_n$ за довољно велико n , по теореме 4.1, следи да је $a \leq c$. \square

Теорема 4.3. (Теорема о два полицајца; Сендвич теорема): Нека је испуњено

- (1) За довољно велико n важи $a_n \leq b_n \leq c_n$;
- (2) $\lim a_n = \lim c_n \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$.

Тада важи и

- (3) Низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има границу. Ако су низови $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни, онда је и низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан;
- (4) $\lim a_n = \lim b_n$.

Доказ. Означимо са a границу низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Нека је $M > 0$. Из $\lim a_n = a$ следи да постоји k_0 такво да за свако $n > k_0$ важи $a_n \in \hat{O}(M, a)$. Слично, из $\lim c_n = a$ следи да постоји l_0 такво да за свако $n > l_0$ важи $c_n \in \hat{O}(M, a)$. Чињеница да за довољно велико n важи $a_n \leq b_n \leq c_n$, значи да постоји m_0 такво да за свако $n > m_0$ важи $a_n \leq b_n \leq c_n$. Нека је $n_0 = \max\{k_0, l_0, m_0\}$. Тада за свако $n > n_0$ важи и $n > k_0$ и $n > l_0$ и $n > m_0$, па важи и $a_n, c_n \in \hat{O}(M, a)$ и $a_n \leq b_n \leq c_n$, па закључујемо да за свако $n > n_0$ важи $b_n \in \hat{O}(M, a)$. Дакле, за свако $M > 0$ се може наћи n_0 такво да за свако $n > n_0$ важи $b_n \in \hat{O}(M, a)$, што управо значи да је $\lim b_n = a$. Ако су низови $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни, онда је $a \in \mathbb{R}$, па је и низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан. \square

На низовима се могу увести неке алгебарске операције.

Ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $c_n = a_n + b_n$, онда за низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ кажемо да је збир низова $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и пишемо

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Слично, ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $c_n = a_n \cdot b_n$, онда за низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ кажемо да је производ низова $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и пишемо

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Такође, ако за неки реалан број α и свако $n \in \mathbb{N}$ важи $c_n = \alpha \cdot a_n$, онда за низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ кажемо да је производ броја α и низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и пишемо

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = \alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Лема 4.4. Важи $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $\lim b_n = 0$, где је $b_n = a_n - a$. Специјално, $\lim(x_n + c) = c$ ако и само ако је $\lim x_n = 0$, за било које $c \in \mathbb{R}$.

Доказ. Нека је $M > 0$. Тада је $a - M < a_n < a + M$ еквивалентно са $-M < a_n - a < M$, тј. $-M < b_n < M$. Дакле, a_n је ван M -окоLINE тачке a ако и само ако је b_n ван M -окоLINE тачке 0. Одатле следи да је ван M -окоLINE тачке a највише коначно много чланова низа a_n ако и само ако је ван M -окоLINE тачке 0 највише коначно много тачака низа b_n . Дакле, $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $\lim b_n = 0$.

Други део тврђења следи из првог ако се стави да је $a_n = x_n + c$. □

Ова лема указује на то да је изучавање особина низова који теже нули од посебног интереса.

Дефиниција 4.5. За низ кажемо да је нула низ ако му је граница нула.

Теорема 4.6. Ако су $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низови и α реалан број, онда су и низови $\alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низови.

Доказ. Прво ћемо показати да производ броја α и нула низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, такође нула низ. То је јасно, ако је $\alpha = 0$. Зато претпоставимо да је $\alpha \neq 0$. Нека је $M > 0$. Показаћемо да се ван сваке M -окоLINE нуле постоји највише коначно много чланова низа $\alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. С обзиром да је $\lim a_n = 0$, то се ван сваке K -окоLINE нуле налази највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. То ће важити и за $K = \frac{M}{|\alpha|}$. Дакле, за највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не важи $-K < a_n < K$, тј. $-\frac{M}{|\alpha|} < a_n < \frac{M}{|\alpha|}$, а тиме и $-M < \alpha \cdot a_n < M$. Управо смо показали да се највише коначно много чланова низа $\alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ налази ван M -окоLINE нуле. Пошто наш доказ не зависи од избора броја $M > 0$, закључујемо да то важи за свако $M > 0$. То, по дефиницији, значи да је $\lim(\alpha \cdot a_n) = 0$.

Покажимо да је збир два нула низа такође нула низ. Дакле, радимо под претпоставком да важи $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Ван сваке $\frac{M}{2}$ -окоLINE тачке нуле се налази највише коначно много чланова низова $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле, за највише коначно много чланова низова $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не важи $-\frac{M}{2} < a_n < \frac{M}{2}$ и $-\frac{M}{2} < b_n < \frac{M}{2}$, а тиме за највише коначно много чланова низова $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не важи $-M < a_n + b_n < M$. Закључујемо да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низ. □

Последица 4.7. Ако су $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низови и α и β реални бројеви, онда је и $\alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta \cdot (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низ.

Доказ. Ако су $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низови, онда су, према теореме 4.6, и $\alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $\beta \cdot (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низови, а тада је, опет по теореме 4.6, и њихов збир нула низ. \square

Теорема 4.8. Производ ограниченог и нула низа је нула низ.

Доказ. Нека је $-K < a_n < K$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и $\lim b_n = 0$. Тада је, по теореме 4.6, $\lim(Kb_n) = 0$ и $\lim(-Kb_n) = 0$. По теореме 4.3, из $-Kb_n < a_n b_n < Kb_n$ следи да је и $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$. \square

Теорема 4.9. (Алгебра лимеса низова) Ако су $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни низови, тада је

- (1) $\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim a_n + \beta \lim b_n$;
- (2) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$;
- (3) Ако је $\lim c_n \neq 0$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $c_n \neq 0$, онда је $\lim \frac{1}{c_n} = \frac{1}{\lim c_n}$.

Доказ. (2) Нека је $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$. Нека су $x_n = a_n - a$ и $y_n = b_n - b$. Тада су, по леми 4.4, низови $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низови. Важи

$$a_n \cdot b_n = (x_n + a)(y_n + b) = x_n \cdot y_n + a_n \cdot y_n + b_n \cdot x_n + ab.$$

По првом делу теореме 2.21, низови $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ су ограничени, па су по теореме 4.8 низови $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низови, а по теореме 4.6 је и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n \in \mathbb{N}} + (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низ. На крају, по леми 4.4, је

$$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

(1) Нека је $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$. Нека је $c_n = \alpha$ и нека је $d_n = \beta$. По другом делу ове теореме су $c_n \cdot a_n$ и $d_n \cdot b_n$ конвергентни и важи $\lim(\alpha a_n) = \lim(c_n \cdot a_n) = \alpha \cdot a$ и $\lim(\beta b_n) = \lim(d_n \cdot b_n) = \beta \cdot b$. Нека су $x_n = c_n \cdot a_n - \alpha \cdot a$ и $y_n = d_n \cdot b_n - \beta \cdot b$. Тада су, по леми 4.4, низови $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нула низови.

Важи $\alpha a_n + \beta b_n = x_n + y_n + (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)$. По теореме 4.6 и низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је нула низ, па је по леми 4.4

$$\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \lim(x_n + y_n + (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

(3) Нека је $c = \lim c_n$. Без умањења општости претпоставимо да је $c > 0$ (у супротном разматрајмо низ $c'_n = -c_n$ и $c' = -c$).

Да бисмо показали да $\frac{1}{c_n}$ тежи ка броју $\frac{1}{c}$, довољно је да покажемо да је низ $\left(\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c}\right)$, тј. $\left(\frac{1}{c \cdot c_n} \cdot (c - c_n)\right)$ нула низ и применимо лему 4.4.

Из $\lim c_n = c$ следи да постоји n_0 такав да је c_n припада $\frac{c}{2}$ -околини тачке c (тј. $\frac{c}{2} < c_n < \frac{3c}{2}$) кад год је $n > n_0$. Тада је $\frac{2}{3c} < \frac{1}{c_n} < \frac{2}{c}$, кад год је $n > n_0$ и $\frac{2}{3c^2} < \frac{1}{c \cdot c_n} < \frac{2}{c^2}$, кад год је $n > n_0$. Одатле следи да је низ $\frac{1}{c \cdot c_n}$ ограничен бројем $\max\left(\left\{\left|\frac{1}{c \cdot c_n}\right| \mid n \leq n_0\right\} \cup \left\{\frac{2}{c^2}\right\}\right)$.

По леми 4.4 је $c - c_n$ нула низ, па је $\left(\frac{1}{c \cdot c_n} \cdot (c - c_n)\right)$ производ ограниченог и нула низа. По теореме 4.8 је $\left(\frac{1}{c \cdot c_n} \cdot (c - c_n)\right)$ нула низ, а по леми 4.4 је $\lim \frac{1}{c_n} = \frac{1}{c}$. \square

Теорема 4.10. Ако је $a_n \neq 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, онда важи

$$\lim |a_n| = +\infty \text{ ако и само ако } \lim \frac{1}{a_n} = 0.$$

Доказ. Покажимо прво да ако је $\lim |a_n| = +\infty$, онда је $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Довољно је да покажемо да се за свако $M > 0$, ван M -околине тачке 0 налази највише коначно много чланова низа $\frac{1}{a_n}$. Нека је $M > 0$ било које и за такво M , нека је $K = \frac{1}{M}$. Из $\lim |a_n| = +\infty$, следи да за највише коначно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не важи $K < |a_n|$. То је еквивалентно тврђењу да за највише коначно много природних бројева n није испуњено $\frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{K}$, тј. да за највише коначно много чланова низа $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ не важи $-M < \frac{1}{a_n} < M$. Како наше резонување не зависи од избора броја M , закључујемо да ван сваке M -околине тачке нула има највише коначно много чланова низа $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, што значи да је $\lim \frac{1}{a_n} = 0$.

Нека је $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ и $K > 0$. Тада је највише коначно много чланова низа $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ван $\frac{1}{K}$ -околине тачке 0, што је еквивалентно са тим да је највише коначно много чланова низа $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ван $(K, +\infty)$, а тиме да је $\lim |a_n| = +\infty$. \square

- Лема 4.11.** (1) Низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има границу ако и само ако низ $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ има границу и важи $\lim x_n = \lim x_{n+1}$;
 (2) Број a је тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако и само ако је тачка нагомилавања низа $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Доказ. Једини члан низа $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ који није члан низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је x_1 . Зато ван M -околине тачке a има коначно много чланова низа $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ако и само ако ван M -околине тачке a има коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и у M -околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ако и само ако у M -околини тачке a има бесконачно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, одакле следи тврђење. \square

Последица 4.12. Нека је $n_0 \in \mathbb{N}$ било који.

- (1) Низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има границу ако и само ако низ $(x_{n+n_0})_{n \in \mathbb{N}}$ има границу и важи $\lim x_n = \lim x_{n+n_0}$;
 (2) Број a је тачка нагомилавања низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако и само ако је тачка нагомилавања низа $(x_{n+n_0})_{n \in \mathbb{N}}$.

Доказ. Директна примена леме 4.11 n_0 пута. \square

Лема 4.13. а) Нека је $\lim x_n = +\infty$. Тада

- 1) ако је $a > 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = +\infty$;
- 2) ако је $a < 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = -\infty$;
- 3) ако је $a = 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = 0$.

б) Нека је $\lim x_n = -\infty$. Тада

- 1) ако је $a > 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = -\infty$;
- 2) ако је $a < 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = +\infty$;
- 3) ако је $a = 0$, онда је $\lim(a \cdot x_n) = 0$.

Доказ. Случајеви а.3) и б.3) тривијално важе. Показаћемо да важи случај 1.2., а осатли се слично доказују. Нека је $M > 0$. Означимо са K број $-\frac{M}{a}$. С обзиром да је $\lim x_n = +\infty$, ван интервала $(K, +\infty)$ може бити највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, тј. $K < x_n$, не важи за највише коначно много чланова низа. Уз то, $K < x_n$ важи ако и само ако важи $a \cdot x_n < -M$. Зато највише коначно много чланова низа не важи $a \cdot x_n < -M$. Како ово важи за свако $M > 0$, закључујемо да је $\lim(a \cdot x_n) = -\infty$ \square

Лема 4.14. Нека је $a > 0$ и $a_n \geq a$ за довољно велико n .

- (1) Ако је $\lim x_n = +\infty$, онда је

$$\lim(a_n \cdot x_n) = +\infty.$$

(2) Ако је $\lim x_n = -\infty$, онда је

$$\lim(a_n \cdot x_n) = -\infty.$$

Доказ. Следи директно из теореме 4.1 и леме 4.13. □

Лема 4.15. (1) Нека је $\lim x_n = +\infty$, нека је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен одоздо. Тада је

$$\lim(a_n + x_n) = +\infty.$$

(2) Нека је $\lim x_n = -\infty$, нека је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен одозго. Тада је

$$\lim(a_n + x_n) = -\infty.$$

Доказ. Нека је $K > 0$ такав да је $-K < a_n < K$ испуњено за свако n . Из $\lim x_n = +\infty$ следи да ван $(2K, +\infty)$ има највише коначно много чланова низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Дакле, за неко n_0 важи да је $2K < x_n$ кад год је $n > n_0$. Тада је $\frac{1}{2}x_n \leq x_n + a_n$ кад год је $n > n_0$. По леми 4.13 је $\lim \frac{1}{2}x_n = +\infty$, па је по теорему 4.1 $\lim(x_n + a_n) = +\infty$. Други део се слично показује. □

ПОГЛАВЉЕ 5

Број e

Лема 5.1. Берулијева неједнакост: Нека је $a > -1$ и n природан број. Тада важи

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Доказ. Математичком индукцијом.

(★) За $n = 1$ неједнакост постаје $(1 + a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a$, што је очигледно тачно.

(★★) Претпоставимо да неједнакост важи за $n = k$ и покажимо да важи за $n = k + 1$. Дакле, наша индуктивна хипотеза је да важи $(1 + a)^k \geq 1 + ka$. Тада $(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k (1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a) = 1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a$.

Прва неједнакост следи из индуктивне хипотезе, а друга из чињенице да је $ka^2 \geq 0$.

Из (★) и (★★) следи да за свако n важи

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

□

Теорема 5.2. Низови $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ су конвергентни и имају исту границу.

Доказ. Показаћемо да за свако n важи

$$0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Одатле ћемо закључити да су низови $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотони и ограничени, одакле ће, по теореме 2.22, следити да су конвергентни. Најпре приметимо да су a_n и b_n позитивни. Примењујући Бернулијеву неједнакост добијамо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Дакле $a_{n+1} \geq a_n$ важи за свако n . Слично, примењујући Бернулијеву неједнакост закључујемо да је

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq 1 + \frac{n+2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n},$$

одакле је
$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$
 Зато је

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Дакле, за свако n важи $b_{n+1} \leq b_n$. Како је $b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, закључујемо да је $a_n \leq b_n$ за свако n . Дакле, a_n је неопадајући низ, одозго је ограничен (било којим чланом низа b_n), док је b_n , нерастући, ограничен одоздо (било којим чланом низа a_n) низ. По теорему 2.22 следи да су $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни низови. По теорему 4.9, следи да је

$$\lim b_n = \lim a_n \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim a_n.$$

□

Дефиниција 5.3. Границу низа $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ означавамо са e .

Ознака e потиче од имена математичара Ојлера које се оригинално пише Euler. Број e је основа природног логаритма. То је ирационалан број, па сходно томе, нема коначан децимални запис, одакле и постоји потреба да му се додели ознака. Пошто је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неопадајући низ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нерастући низ и пошто имају исту границу, важи $a_n \leq \lim a_n = e = \lim b_n \leq b_n$. Одатле, за $n = 1$ добијамо $2 \leq e \leq 4$. За $n = 2$ добијамо $2,25 \leq e \leq 3,375$. За $n = 5$ добијамо $2,48832 \leq e \leq 2,985984$. Овим поступком¹ се број e може апроксимирати произвољно добро. Таквим оценама се добија да су 2,71828 првих неколико децимала броја e .

Лема 5.4. (1) $\lim \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n} = e;$

(2) Ако је $\lim x_n = +\infty$, онда је $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e;$

(3) Ако је $\lim x_n = -\infty$, онда је $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$

Доказ. Нека су, као у теорему 5.2, $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(1) $\lim \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \lim a_{n-1} \cdot (1+0) = e;$

(2) Нека је $y_n = [x_n]$, тј. y_n је цео део броја x_n . Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$y_n \leq x_n < 1 + y_n.$$

¹Постоје много бољи поступци за одређивање децимала броја e .

Како је $\lim x_n = +\infty$, то ће за довољно велико n бити $x_n > 1$, па је $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ природних бројева за довољно велико n и за свако n важи $x_n - 1 < y_n$, па, по теорему 4.1, важи $\lim y_n = +\infty$.

Из услова $y_n \leq x_n < 1 + y_n$ следи да важи

$$\left(1 + \frac{1}{1 + y_n}\right)^{1 + y_n} \left(1 - \frac{1}{2 + y_n}\right) < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right). \quad (1)$$

Означимо низ $\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}$ са c_n , а низ $\left(1 + \frac{1}{1 + y_n}\right)^{1 + y_n}$ са d_n . Приметимо да за довољно велико n важи $c_n = a_{y_n}$ и $d_n = a_{1 + y_n}$. Покажимо да је $\lim c_n = \lim d_n = e$. Нека је $M > 0$. Тада постоји k_0 такво да је $a_n \in (e - M, e + M)$ кад год је $n > k_0$. С обзиром да је $\lim y_n = +\infty$, постоји n_0 , такав да је $y_n \in (k_0, +\infty)$ кад год је $n > n_0$. Дакле, кад год је $n > n_0$, y_n је природан број већи од k_0 , па је $a_{y_n} \in (e - M, e + M)$. Управо смо показали да је $c_n \in (e - M, e + M)$ и да је $d_n \in (e - M, e + M)$, кад је $n > n_0$ (заправо смо показали да је $d_n \in (e - M, e + M)$, кад је $n > n_0 - 1$, али како је $n_0 > n_0 - 1$, наш закључак је исправан). Дакле, ван M -околице броја e је највише коначно много чланова низова $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Како ово резонување не зависи од избора броја $M > 0$, закључујемо да је $\lim c_n = \lim d_n = e$. Дакле важи

$$\lim c_n = \lim d_n = e. \quad (2)$$

Важи $\lim(2 + y_n) = +\infty$ (лема 4.15), па је, по теорему 4.10, $\lim\left(\frac{1}{2 + y_n}\right) = 0$, а по теорему 4.9 је $\lim\left(1 - \frac{1}{2 + y_n}\right) = 1$. Зато је, по теорему 4.9

$$\lim\left(1 + \frac{1}{1 + y_n}\right)^{1 + y_n} \left(1 - \frac{1}{2 + y_n}\right) = \lim d_n \cdot \lim\left(1 - \frac{1}{2 + y_n}\right) = e \cdot 1 = e. \quad (3)$$

Сличним резонувањем из $\lim y_n = +\infty$, користећи лему 4.15 и теорему 4.10, закључује да је $\lim\left(1 + \frac{1}{y_n}\right) = 1$ и да је

$$\lim\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right) = \lim c_n \cdot \lim\left(1 + \frac{1}{y_n}\right) = e \cdot 1 = e. \quad (4)$$

Из једнакости (1), (3) и (4), по теорему 4.3, следи да је

$$\lim\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e;$$

(3) Нека је $z_n = -x_n$. Тада је $\lim z_n = +\infty$. По делу (2) ове леме је

$$\lim\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim\left(1 + \frac{1}{z_n - 1}\right)^{z_n - 1} \left(1 + \frac{1}{z_n - 1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

□

Теорема 5.5. Ако је $\lim |x_n| = +\infty$, онда је $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$;

Доказ. Нека је $y_n = \left(1 + \frac{1}{-|x_n|}\right)^{-|x_n|}$ и $z_n = \left(1 + \frac{1}{|x_n|}\right)^{|x_n|}$. По лема 5.4 је $\lim z_n = y_n = e$, па је ван сваке M -околинe тачке e највише коначно много чланова низова $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Тиме је испуњено и да је ван сваке M -околинe тачке e највише коначно много чланова низа $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$, што управо значи да је $\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. □

Основни лимеси низа

Лема 6.1. $\lim n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$

Доказ. Означимо n^α са a_n .

1. случај: $\alpha = 0$. Тада је $a_n = 1$. У свакој M -околини тачке 1 су сви чланови низа a_n , одакле по дефиницији следи да је $\lim a_n = 1$.

2. случај: $\alpha > 0$. Нека је $M > 0$ и $n_0 = [M^{\frac{1}{\alpha}}]$. Тада је

$$n > n_0 \implies n > M^{\frac{1}{\alpha}} \implies M < n^\alpha \implies M < a_n,$$

па, како то важи за свако $M > 0$, закључујемо да је $\lim a_n = +\infty$.

3. случај: $\alpha < 0$. Тада је $-\alpha > 0$ и $\frac{1}{a_n} = n^{-\alpha}$, па је по претходном, $\lim \frac{1}{a_n} = +\infty$. По теореме 4.10 је $\lim a_n = \lim \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = 0$. □

Лема 6.2. Нека је $a > 0$. Тада је $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Доказ. Означимо $\sqrt[n]{a}$ са a_n .

1. случај: $a = 1$. Тада је $a_n = 1$. У свакој M -околини тачке 1 су сви чланови низа a_n , одакле по дефиницији следи да је $\lim a_n = 1$.

2. случај: $a > 1$. Тада је за свако n испуњено $\sqrt[n]{a} > 1$. За уочено n , нека је $h = \sqrt[n]{a} - 1$. Из $\sqrt[n]{a} > 1$ следи да је $h > 0$. Важи $\sqrt[n]{a} = h + 1$, па је, по Бернулијевој неједнакости,

$$a = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Из $a \geq 1 + nh$ следи да је $h \leq \frac{a-1}{n}$. С обзиром да је $h > 0$, важиће

$$0 \leq h \leq \frac{a-1}{n}.$$

Дакле, за свако n ће важити

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Нека је $x_n = 1$ и нека је $y_n = 1 + \frac{a-1}{n}$. Важи $\lim \frac{1}{n} = 0$ (лема 6.1), па је $\lim((a-1)\frac{1}{n}) = (a-1)0 = 0$ (теорема 4.9), а тиме је и (теорема 4.9) $\lim y_n = 1$.

Сада је $x_n \leq a_n \leq y_n$ и $\lim x_n = \lim y_n = 1$, па је по теореме 4.3 (Теорема о два полицајца) и $\lim a_n = 1$.

3. случај: $0 < a < 1$. Означимо $\frac{1}{a}$ са b . Тада је $b > 1$, па је по претходном $\lim \sqrt{b} = 1$. Тада је

$$\lim \sqrt{a} = \lim \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\lim \sqrt{b}} = \frac{1}{1} = 1,$$

при чему прва једнакост важи по избору броја b , друга по теореме 4.9, а трећа по израчунатом $\lim \sqrt{b} = 1$. \square

Лема 6.3. $\lim \sqrt{n} = 1$.

Доказ. Означимо \sqrt{n} са a_n . Означимо $\sqrt{n} - 1$ са h . За $n > 1$ је и $\sqrt{n} > 1$, па је $h > 0$ и важи $\sqrt{n} = 1 + h$, а тиме и

$$n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

Неједнакост следи из чињенице да је сваки од сабирака $\binom{n}{k}h^k$ позитиван, па збир нека два није већи од збира свих $k + 1$ сабирака. Неједнакост

$$n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

је еквивалента са

$$h^2 \leq \frac{2}{n}.$$

С обзиром да смо већ утврдили да је $h > 0$, биће $0 \leq h \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$. Дакле, за свако $n > 1$ важи

$$1 \leq \sqrt{n} \leq 1 + \sqrt{2} \cdot n^{-\frac{1}{2}}.$$

Нека су $x_n = 1$ и $y_n = 1 + \sqrt{2} \cdot n^{-\frac{1}{2}}$. Тада је

$$\lim y_n = 1 + \sqrt{2} \cdot \lim n^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{2} \cdot 0 = 1.$$

Прва једнакост следи из теореме 4.9, а друга по леми 6.1.

Сада је $x_n \leq a_n \leq y_n$ за довољно велико n (тачније за $n > 1$) и $\lim x_n = \lim y_n = 1$, па је по теореме 4.3 (Теорема о два полицајца) и $\lim a_n = 1$. \square

Лема 6.4. Нека је $a > 0$. Тада $\lim a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & |a| < 1 \\ \text{не постоји,} & a \leq -1. \end{cases}$

Доказ. Означимо a^n са a_n .

1. случај $a = 1$: Тада је $a^n = 1$, па је $\lim a^n = 1$.

2. случај $a > 1$: Означимо $a - 1$ са h . Тада је $h > 0$ и, по Бернулијевој неједнакости,

$$a_n = a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh.$$

Означимо nh са b_n . С обзиром да је $\lim n = +\infty$ (лема 6.1 за $\alpha = 1$), биће $\lim b_n = +\infty$ (лема 4.13). То, уз чињеницу да $a_n \geq b_n$ за свако n , по теорему 4.1, даје за резултат да је $\lim a_n = +\infty$.

3. случај $0 < a < 1$: Означимо $\frac{1}{a}$ са b . тада је $b > 1$, па је по претходном случају $\lim b^n = +\infty$. Тада је, по теорему 4.10, $\lim \frac{1}{b^n} = 0$. Дакле,

$$\lim a^n = \lim \frac{1}{b^n} = 0.$$

4. случај $a = 0$: Тада је $a_n = 0$, па је $\lim a_n = 0$.

5. случај $-1 < a < 0$: Тада је $a_n = (-1)^n |a|^n$. Нека је $b_n = |a|^n$. Пошто је $0 < |a| < 1$, онда, по доказаном под 3. случајем, $\lim b_n = 0$. Дакле, a_n је производ ограниченог ($-1 \leq (-1)^n \leq 1$) и нула низа (b_n), па је и он сам, по теорему 4.8, нула низ.

6. случај $a = -1$: Тада је $a_{2n} = 1$ и $a_{2n-1} = -1$, па, по последици 3.3, не постоји $\lim a_n$.

7. случај $a < -1$: Тада је $a_n = (-1)^n |a|^n$. Нека је $b_n = |a|^n$. Пошто је $1 < |a|$, онда, по доказаном под 1. случајем, $\lim b_n = +\infty$. По теорему 3.2 је $\lim b_{2n} = \lim b_{2n-1} = \lim b_n$. Тада је $\lim a_{2n} = \lim(1 \cdot b_{2n}) = +\infty$ и $\lim a_{2n-1} = \lim(-1 \cdot b_{2n-1})$, па је, по леми 4.13, $\lim a_{2n-1} = -\infty$. По последици 3.3, не постоји $\lim a_n$. \square

Лема 6.5. $\lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ за $a > 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказ. Означимо $\frac{n^\alpha}{a^n}$ са a_n .

1. случај $\alpha \leq 0$: Тада је $a_n = n^\alpha (a^{-1})^n$. По леми 6.1 је n^α конвергентан низ, па је ограничен. По леми 6.4 је $\lim (a^{-1})^n = 0$, па је a_n производ нула низа и ограниченог низа. По теорему 4.8 је $\lim a_n = 0$.

2. случај $\alpha > 0$: Тада је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha a^n}{n^\alpha a^{n+1}} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$$

Нека је $x_n = \frac{n+1}{n}$. Тада је $\lim x_n = \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$. Нека је $M = a^{\frac{1}{\alpha}} - 1$. Пошто је $a > 1$ и $\frac{1}{\alpha} > 0$, важиће $M > 0$. Из $\lim x_n = 1$ следи да постоји n_0 такав да је $1 - M < x_n < 1 + M$ кад год је $n > n_0$. Одатле уз чињеницу да је $x_n = 1 + \frac{1}{n} \geq 1$

за свако n , следи (последница 4.2 део 1) да ће важити $1 \leq x_n < 1 + M$ кад год је $n > n_0$, тј.

$$1 \leq \frac{n+1}{n} < a^{\frac{1}{\alpha}} \text{ кад год је } n > n_0, \text{ а тиме и}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha < a \text{ кад год је } n > n_0.$$

Закључујемо да за $n > n_0$ важи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha < 1.$$

$$\text{За } n > n_0 \text{ важи } a_{n_0} > a_n > a_{n+1},$$

одакле закључујемо две ствари:

- Сваки члан низа је одозго ограничен бројем $K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$;
- Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је опадајући за довољно велико n .

С обзиром да је $a_n \geq 0$, закључујемо да $0 \leq a_n \leq K$ важи за свако n тј. да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен. По теореме 2.22, закључујемо да је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан. Означимо са A његову границу. Из

$$a_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha a_n,$$

следи

$$A = \lim a_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \lim a_n = \frac{1}{a} A.$$

Прва једнакост следи из леме 4.11, друга из теореме 4.9. С обзиром да је $a > 1$, једино решење једначине

$$A = \frac{1}{a} A$$

је $A = 0$. Дакле важи

$$\lim \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

□

Лема 6.6. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ за $a > 0$.

Доказ. Означимо $\frac{a^n}{n!}$ са a_n .

1. случај $0 < a \leq 1$: Тада је $\lim a^n = 0$ или је $\lim a^n = 1$, па је a^n ограничен. Из $n < n!$, по теореме 4.1, следи да је $\lim n! = +\infty$, а по теореме 4.10 следи да је $\frac{1}{n!}$ нула низ. Дакле, $\frac{a^n}{n!}$ је производ ограниченог и нула низа па је, по теореме 4.8, и он сам нула низ.

2. случај $1 < a$: Важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1}$. Нека је $n_0 = \lceil \frac{1}{a} \rceil$. Тада је за $n > n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} < 1.$$

Дакле, низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је опадајући за довољно велико n и ограничен одозго (лема 2.5). Пошто је $0 < a_n$, низ је ограничен и одоздо. По теореме 2.22 закључујемо да је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан низ. Нека је $A = \lim a_n$. Из $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1}$ следи $a_{n+1} = \frac{a}{n+1} a_n$, а тиме и $A = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a}{n+1} \lim a_n = 0$.

Лема 6.7. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Доказ. Означимо $\frac{n!}{n^n}$ са a_n . За свако n важи

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Важи $\lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2}$, па је по првом делу последице 4.2,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2} < 1, \text{ за довољно велико } n.$$

Дакле, низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је опадајући за довољно велико n и ограничен одозго (лема 2.5). Пошто је $0 < a_n$, низ је ограничен и одоздо. По теореме 2.22 закључујемо да је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан низ. Нека је $A = \lim a_n$. Из $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$ следи $a_{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a_n$, а тиме и

$$A \cdot e = \lim a_{n+1} \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim a_n = A.$$

Једино решење оде једначине је $A = 0$, па закључујемо да је $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$. \square

Улажење лимеса у аргумент функције

У овом поглављу ћемо видети да за неке функције f и неке низове $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ важи

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

У тој ситуацији се каже „да је лимес ушао у аргумент функције”. Тако, на пример, ако је $f(x) = \sqrt{x}$ и ако важи $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$, тј. $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim x_n}$, кажемо „да је лимес ушао под корен”. Тврђења која ћемо овде доказати ће се највише користити у изучавању непрекидности функција. У делу 3.10.5 (Веза између непрекидности функције и лимеса) ћемо показати да то није случајно.

Теорема 7.1. Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан низ.

- (1) Нека је k природан број већи од 1. Тада је $\lim(x_n)^k = (\lim x_n)^k$.
- (2) Нека је k природан број већи од 1 и нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је $\sqrt{\lim x_n}$ дефинисан и да је за сваки природан број n дефинисан $\sqrt{x_n}$. Тада је $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim x_n}$.
- (3) Нека је q рационалан број већи од 1 и нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је $(\lim x_n)^q$ дефинисан и да је за сваки природан број n дефинисан $(x_n)^q$. Тада је $\lim(x_n)^q = (\lim x_n)^q$.

Доказ. (1) Примењујући други део теореме 4.9 за $a_n = b_n = x_n$ добијамо да је $\lim x_n^2 = (\lim x_n)^2$. Примењујући други део теореме 4.9 за $a_n = x_n^2$ и $b_n = x_n$ добијамо да је $\lim(x_n)^3 = (\lim x_n)^3$. Настављајући овај поступак још $k - 2$ пута, добијамо да је $\lim(x_n)^k = (\lim x_n)^k$.

(2) Користићемо чињеницу да за $0 < u < 1$ важи $u^k < u$, а тиме и $u < \sqrt{u}$ и да је за $u > 1$ важи $u^k > u$, а тиме и $\sqrt{u} < u$ као и неједнакост троугла $|v + w| \leq |v| + |w|$.

Размотримо прво случај $\lim x_n \neq 0$. Означимо са a границу низа $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. По теореме 4.9, из $\lim x_n = a \neq 0$ следи да је $\lim \frac{x_n}{a} - 1 = 0$. Означимо $\frac{x_n}{a} - 1$ са y_n . Из

$$-|y_n| \leq y_n \leq |y_n|,$$

тј. из

$$-|y_n| \leq \frac{x_n}{a} - 1 \leq |y_n|$$

следи да је

$$1 - |y_n| \leq \frac{x_n}{a} \leq 1 + |y_n|. \quad (1)$$

Из чињенице да је $\lim y_n = 0$, по првом делу последице 4.2, следи да је $-1 < y_n < 1$ за довољно велико n . Дакле, за довољно велико n важи

$$0 < 1 - |y_n| \leq 1 \leq 1 + |y_n|. \quad (2)$$

То даље повлачи да је за довољно велико n (за $0 < u < 1$ важи $u < \sqrt{u}$ и за $u > 1$ важи $\sqrt{u} < u$)

$$1 - |y_n| \leq \sqrt{1 - |y_n|} \quad \text{и} \quad \sqrt{1 + |y_n|} \leq 1 + |y_n|. \quad (3)$$

Из неједнакости (1) и (3) следи

$$1 - |y_n| \leq \sqrt{1 - |y_n|} \leq \sqrt{\frac{x_n}{a}} \leq \sqrt{1 + |y_n|} \leq 1 + |y_n|,$$

па је за довољно велико n

$$\sqrt{a}(1 - |y_n|) \leq \sqrt{x_n} \leq \sqrt{a}(1 + |y_n|) \quad \text{ако је } a > 0 \text{ тј.} \quad (4)$$

$$\sqrt{a}(1 + |y_n|) \leq \sqrt{x_n} \leq \sqrt{a}(1 - |y_n|) \quad \text{ако је } a < 0. \quad (5)$$

По теорему 4.9 из $\lim y_n = 0$, следи да је

$$\lim \sqrt{a}(1 - |y_n|) = \lim \sqrt{a}(1 + |y_n|) = \sqrt{a}.$$

Одатле, по теорему 4.3 примењену на неједнакост (4), ако је $a > 0$ или на неједнакост (5), ако је $a < 0$, важи

$$\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{a} = \sqrt{\lim x_n}.$$

Ако је $\lim x_n = 0$, онда за $M > 0$ постоји природан број n_0 такав да је $|x_n| < M^k$, кад год је $n > n_0$. Зато, за свако $n > n_0$ важи $|\sqrt{x_n}| < M$. Како ово резонување не зависи од избора броја M , закључујемо да се ван свако M -околине налази највише коначно много чланова низа $\sqrt{x_n}$. Дакле $\lim \sqrt{x_n} = 0 = \sqrt{\lim x_n}$

(3) Ако је $q = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$, онда је по доказаном под (1) и (2)

$$\lim x_n^q = \lim \sqrt[k]{x_n^m} = \sqrt[k]{\lim x_n^m} = \sqrt[k]{(\lim x_n)^m} = (\lim x_n)^q.$$

□

Теорема 7.2. Ако је x_n конвергентан низ и $0 < a \neq 1$, онда је $\lim a^{x_n} = a^{\lim x_n}$.

Доказ. Размотримо прво случај кад је $\lim x_n = 0$ и $a = e$. Нека је M било који позитиван реалан број. Нека је $M_1 = \min\{\frac{1}{2}, M\}$. Из $0 < M_1 < 1$ следи да је $\frac{1}{1-M_1} > 1 + M_1 > 1$, па је $\ln \frac{1}{1-M_1} > \ln(1 + M_1) > \ln 1$ (јер је функција $\ln x$

растућа), а тиме и

$$\ln(1 - M_1) < -\ln(1 + M_1). \quad (1)$$

Нека је $M_2 = \ln(1 + M_1)$. Тада је $M_2 > 0$. Из $\lim x_n = 0$ следи да постоји n_0 такво да је x_n у M_2 -околини тачке 0 кад год је $n > n_0$. Дакле, за такво n је $-M_2 < x_n < M_2$, тј. $-\ln(1 + M_1) < x_n < \ln(1 + M_1)$. Одавде и из неједнакости (1) следи да је

$$\ln(1 - M_1) < x_n < \ln(1 + M_1). \quad (2)$$

С обзиром да је функција e^x растућа, из неједнакости (2) следи да је

$$1 - M_1 < e^{x_n} < 1 + M_1.$$

Одваде, с обзиром да је $0 < M_1 \leq M$, следи за свако $n > n_0$ важи

$$1 - M < e^{x_n} < 1 + M. \quad (3)$$

С обзиром да неједнакост (3) важи независно од избора броја $M > 0$, то, по дефиницији, значи да је $\lim e^{x_n} = 1$.

Размотримо сад случај када су a и $\lambda = \lim x_n$ било који реални бројеви уз услов $0 < a \neq 1$. Тада је

$$a^{x_n} = a^\lambda \cdot a^{x_n - \lambda} = a^\lambda \cdot e^{(x_n - \lambda) \ln a}.$$

Означимо са y_n низ $(x_n - \lambda) \ln a$. С обзиром да је $\lim x_n = \lambda$ и да је $\ln a$ константа, из теореме 4.9 следи да је y_n нула низ. По претходно доказаном је тад $\lim e^{y_n} = 1$. Дакле, важи

$$\lim a^{x_n} = \lim(a^\lambda \cdot e^{(x_n - \lambda) \ln a}) = a^\lambda \cdot \lim e^{(x_n - \lambda) \ln a} = a^\lambda \cdot \lim e^{y_n} = a^\lambda \cdot 1 = a^{\lim x_n}. \quad \square$$

Теорема 7.3. Ако је $\lim x_n = a > 0$, онда је $\lim \ln x_n = \ln(\lim x_n)$.

Нека је $\lim z_n = 1$ и нека $M > 0$. Услов $-M < \ln z_n < M$ је еквивалентан услову $e^{-M} < z_n < e^M$. Ако желимо да из услова $1 - K < z_n < 1 + K$ следи $e^{-M} < z_n < e^M$ мора бити $e^{-M} \leq 1 - K$ и $1 + K \leq e^M$. За то је довољно да је $K = 1 - e^{-M}$. Из $\lim z_n = 1$ следи да постоји n_0 такво да је z_n у K -околини броја 1, кад год је $n > n_0$. Тада ће за $n > n_0$ бити $e^{-M} < z_n < e^M$, а тиме и $-M < \ln z_n < M$. Дакле, за свако $M > 0$ постоји највише коначно много чланова низа $\ln z_n$ ван M -околине броја 0, па закључујемо да је $\lim \ln z_n = 0$.

Важи $\ln x_n = \ln(a \cdot \frac{x_n}{a}) = \ln a + \ln \frac{x_n}{a}$. С обзиром да је $\lim \frac{x_n}{a} = 1$, по претходно приказаном важи $\lim \ln \frac{x_n}{a} = 0$, а тиме и $\lim \ln x_n = \lim \ln(a \cdot \frac{x_n}{a}) = \ln a + \lim \ln \frac{x_n}{a} = \ln a$. Управо смо показали да је $\lim \ln x_n = \ln(\lim x_n)$. \square

Теорема 7.4. Ако је $\lim x_n = a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ и $\lim y_n = \lambda \in \mathbb{R}$, онда је $\lim x_n^{y_n} = a^\lambda$.

Доказ.

$$\lim x_n^{y_n} = \lim e^{y_n \cdot \ln x_n} = e^{\lim(y_n \cdot \ln x_n)} = e^{\lim y_n \cdot \lim \ln x_n} = e^{\lim y_n \cdot \ln \lim x_n} = (\lim x_n)^{\lim y_n}.$$

Прва једнакост следи из чињенице да су функције e^x и $\ln x$ једна другој инверзне и једнакости $\ln(A^B) = B \ln A$, друга је примена теореме 7.2, трећа је примена теореме 4.9, четврта је примена теореме 7.3, а последња поново следи из чињенице да су функције e^x и $\ln x$ једна другој инверзне и једнакости $\ln(A^B) = B \ln A$. \square

Последица 7.5. Ако је $\lim x_n = a > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, онда је $\lim(x_n)^\lambda = (\lim x_n)^\lambda$.

Доказ. Применом теореме 7.4 за $y_n = \lambda$, добија се тражена једнакост. \square

Теорема 7.6. Важи

- (1) Нека је $a > 1$
 - (а) из $\lim x_n = +\infty$ следи $\lim a^{x_n} = +\infty$.
 - (б) из $\lim x_n = -\infty$ следи $\lim a^{x_n} = 0$.
- (2) Нека је $0 < a < 1$
 - (а) из $\lim x_n = +\infty$ следи $\lim a^{x_n} = 0$.
 - (б) из $\lim x_n = -\infty$ следи $\lim a^{x_n} = +\infty$.

Доказ. 1а) Нека је $y_n = [x_n]$ и $z_n = a^n$. Из леме 4.15 следи да $\lim(x_n - 1) = +\infty$, па из чињенице да је $x_n - 1 < y_n$ и теореме 4.1 следи да је $\lim y_n = +\infty$. По леми 6.4 је $\lim z_n = +\infty$. Нека је $K > 0$. Тада постоји k_0 такав да је $z_n \in (K, +\infty)$, кад год је $n > k_0$. Из $\lim y_n = +\infty$ следи да постоји n_0 такав да је $y_n \in (k_0, +\infty)$, кад год је $n > n_0$. Дакле, кад год је $n > n_0$, биће $y_n > k_0$, одакле следи да ће бити $z_{y_n} \in (K, +\infty)$. Дакле, за било које $K > 0$ важи да ће се ван $(K, +\infty)$ наћи највише коначно много чланова низа a^{y_n} , што по дефиницији значи да је $\lim a^{y_n} = +\infty$. Из $y_n = [x_n]$ следи да је $y_n \leq x_n$, па је $a^{y_n} \leq a^{x_n}$. По теорему 4.1 следи да је $\lim a^{x_n} = 0$.

1б) $\lim a^{x_n} = \lim \frac{1}{a^{-x_n}}$. По претходном је $\lim a^{-x_n} = +\infty$, па је по теорему 4.10 $\lim a^{x_n} = 0$.

2а) и 2б) се добијају применом **1а)** и **1б)** на $\frac{1}{a}$ уместо a и применом теореме 4.10. \square