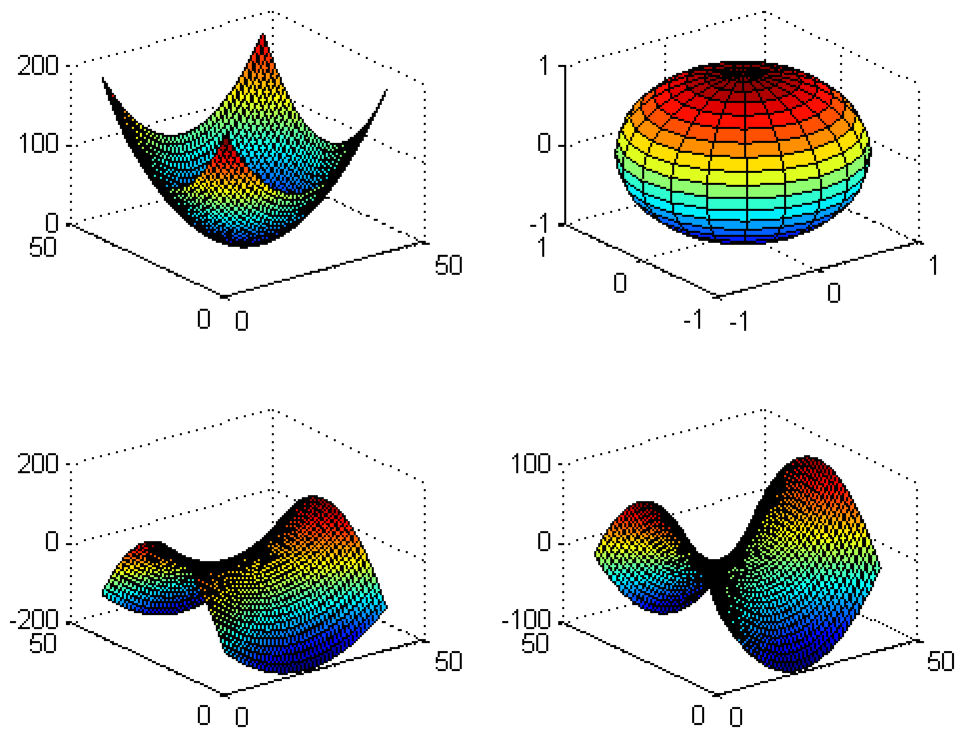
Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet

Matematika 3

Površi u prostoru



Površi u prostoru mogu biti zadate jednačinama:

1) u parametarskom obliku:

x=f(u,v), y=g(u,v), z=h(u,v),

$$u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2$$

2) u eksplicitnom obliku:

$$z = z(x, y), \qquad x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2$$

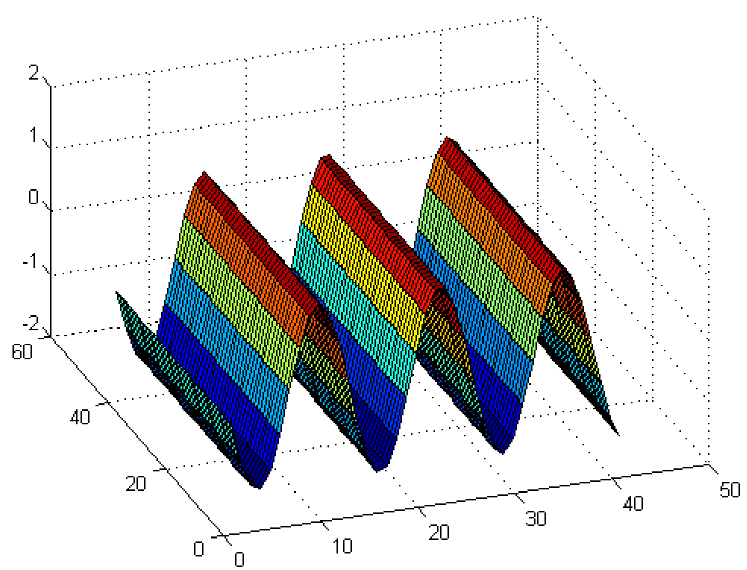
3) u implicitnom obliku:

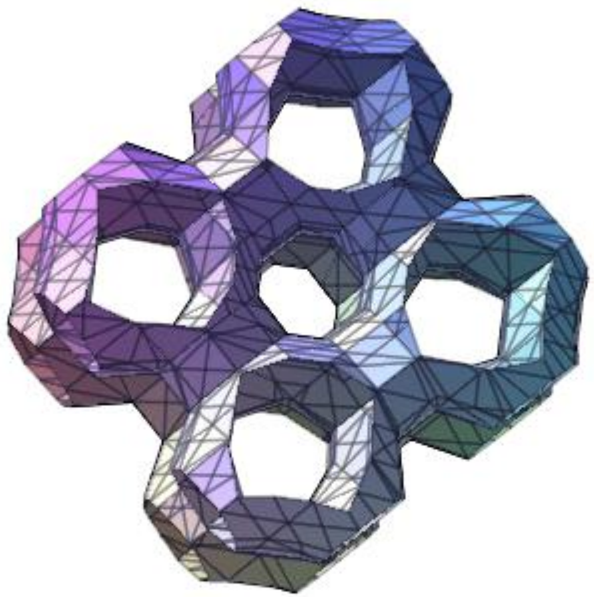
$$F(x, y, z) = 0.$$

Primeri:

Eksplicitno zadata površ jednačinom
$z = \sin x + siny, -10$**≤x,y≤10**

Implicitno zadata površ jednačinom
$\sin x + siny + sinz = 0.$





- Najjednostavnija površ u prostoru je ravan. Zadata je jednačinom
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$
- Sfera poluprečnika r zadaje se kao skup rešenja kvadratne jednačine
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

Ili opštije jednačinom

$$f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0.$$

Površi drugog reda

- Zadaju se jednačinom oblika:
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Mx + Ny + Pz + Q = 0.$$
- Teorema: Površ drugog reda predstavlja: elipsoid, jednograni hiperboloid, dvogradni hiperboloid, eliptički konus, eliptički cilindar, hiperbolički cilindar, eliptički paraboloid, hiperboloički paraboloid, parabolički cilindar, dve ravni (paralelne ili koje se seku), jedna ravan, prava, tačka ili prazan skup.

Korisno je najpre odrediti šta su preseci površi drugog reda sa ravnima paralelnim koordinatnim ravnima:

- x= a

$$Aa^2 + By^2 + Cz^2 + Day + Eyz + Faz + Ma + Ny + Pz + Q = 0$$

- y=b

$$Ax^2 + Bb^2 + Cz^2 + Dxb + Ebz + Fxz + Mx + Nb + Pz + Q = 0$$

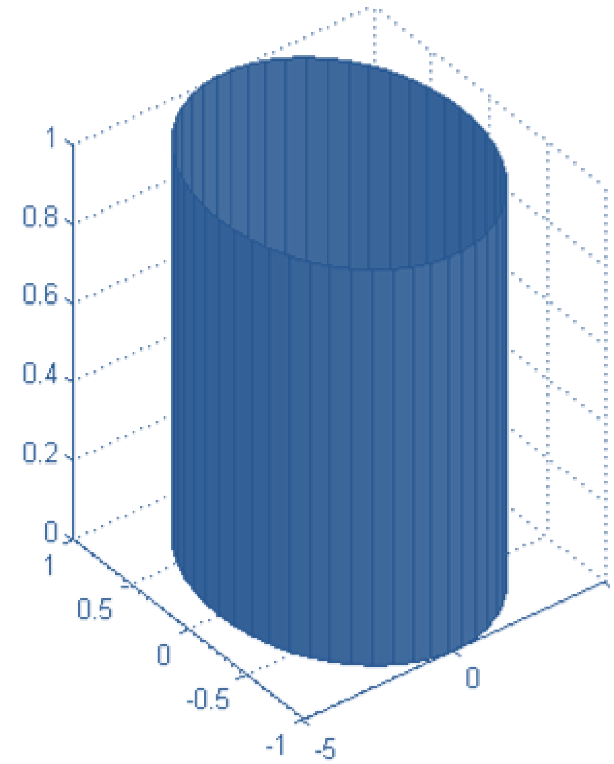
- z=c

$$Ax^2 + By^2 + Cc^2 + Dxy + Eyc + Fxc + Mx + Ny + Pc + Q = 0$$

Eliptički cilindar $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1

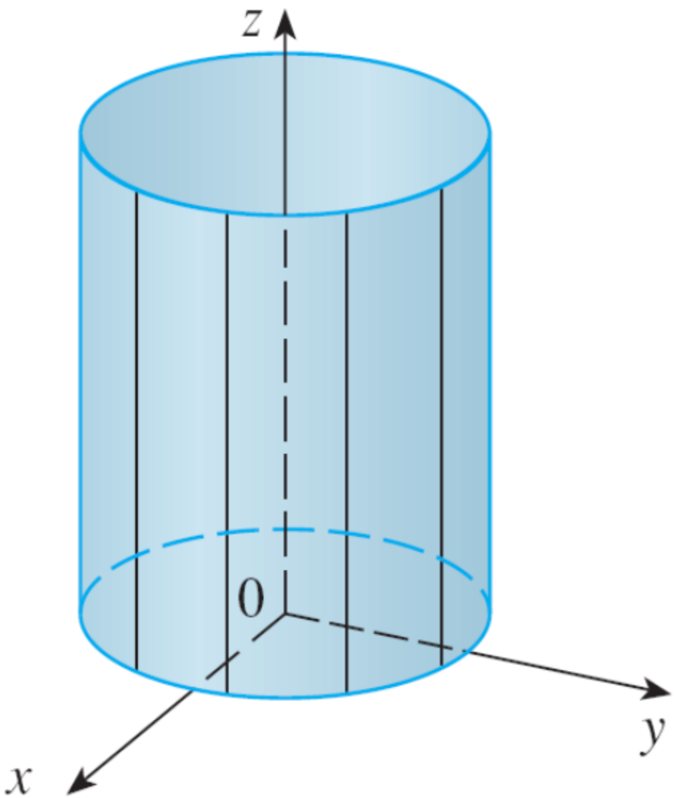
- VAŽNO: z nedostaje u jednačini, što ne znači da je z=0 već da je z proizvoljan realan broj
- Preseci sa ravnima z=k su elipse

  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1, z=k.
- Direktrisa (vodilja)
- Generatrisa (izvodnica) površi

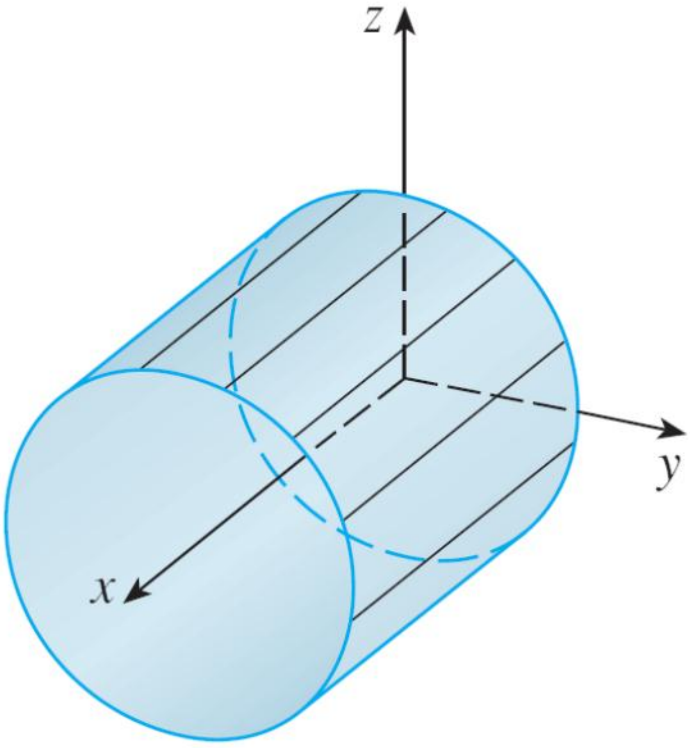


Primeri eliptičkih cilindara

$x^2+y^2=1$



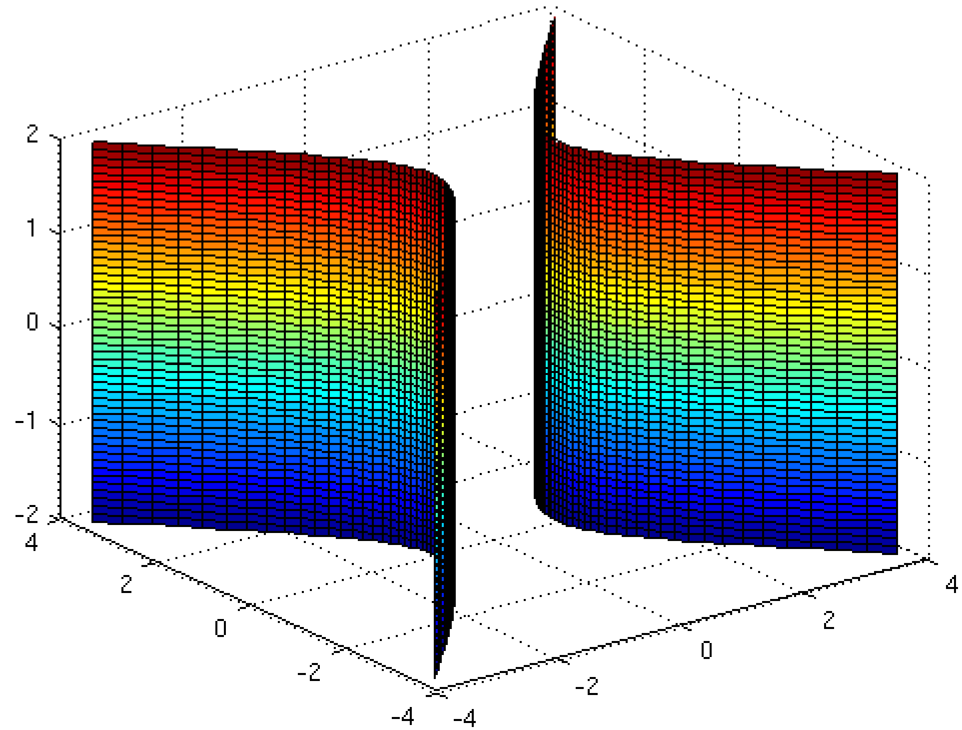
$y^2+z^2=1$



Hiperbolički cilindar $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$=1

- VAŽNO: z nedostaje u jednačini, što ne znači da je z=0 već da je z proizvoljan realan broj
- Preseci sa ravnima z=k su hiperbole

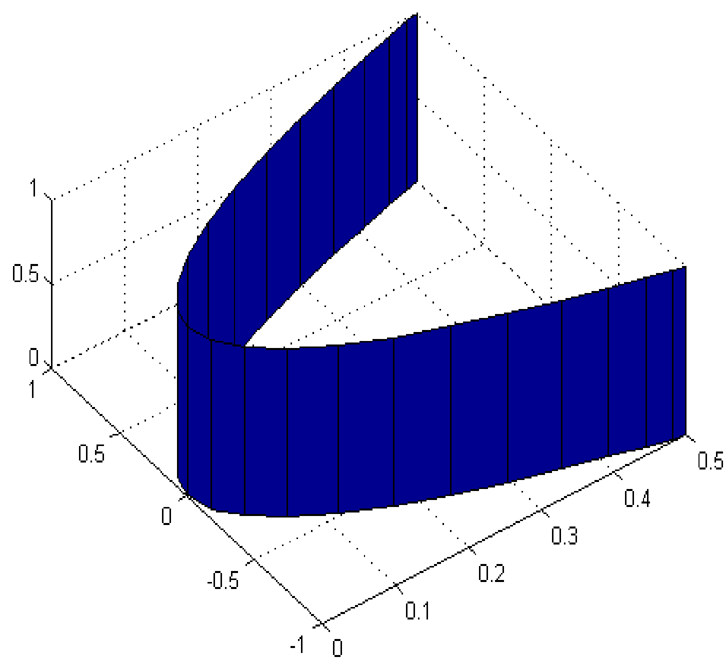
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}=1,\ z=k.$$

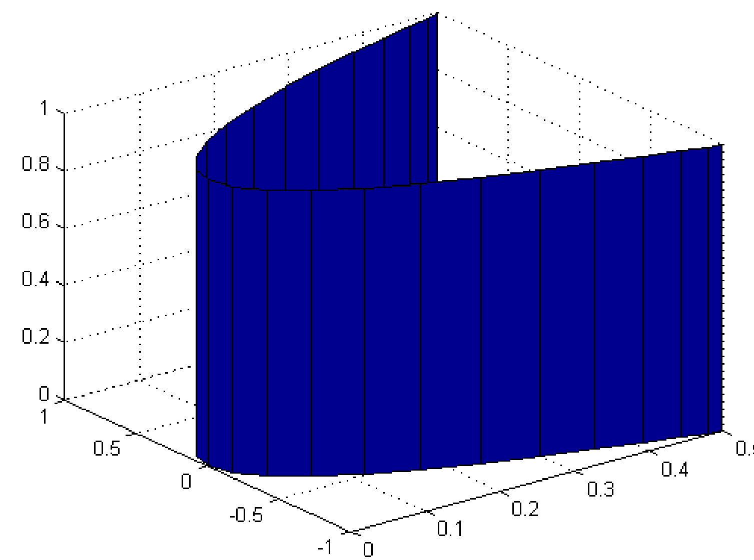


Parabolički cilindar y^2=2px

- Preseci sa ravnima z=k su parabole

  y^2=2px, z=k.



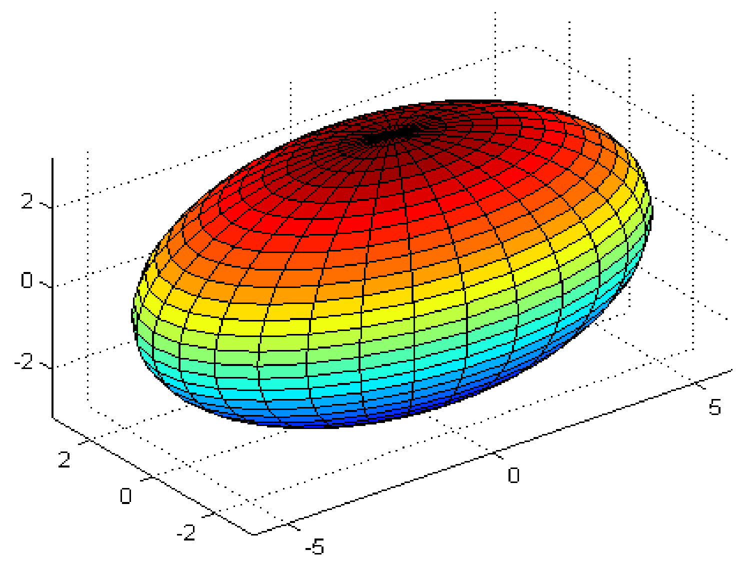


Elipsoid

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$
  $$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c$$

Poluose elipsoida: a, b i c.

Preseci sa ravnima paralelnim koordinatnim ravnima su elipse.



Primer: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$

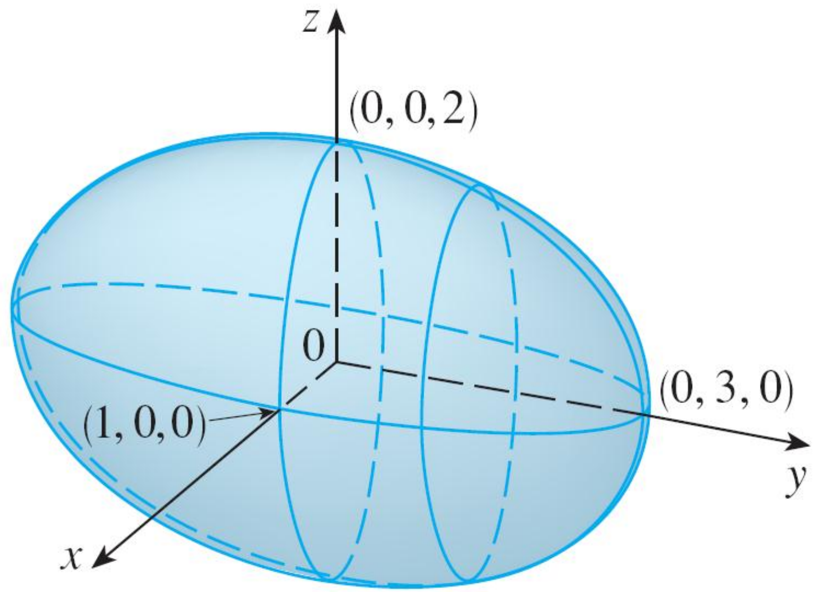
- Presek sa ravni x=0 je

elipsa $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$,

sa ravni y=0 elipsa $\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1$,

sa ravni z=0 elipsa $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1$.

I slično sa ravnima paralelnim koordinatnim ravnima: x=k, y=m, z=n

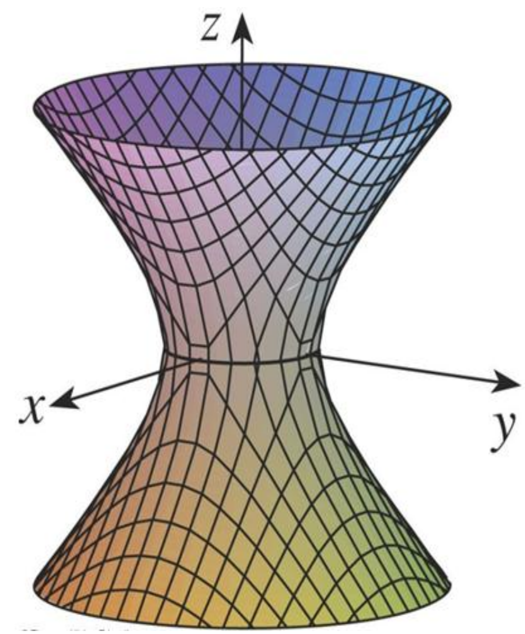


Jednograni hiperboloid

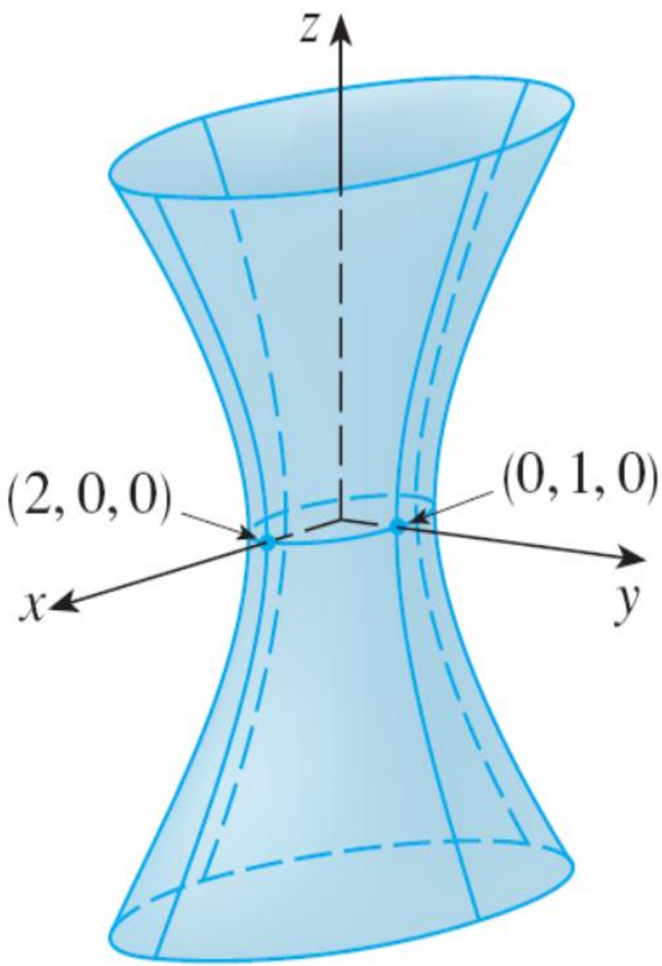
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$

poluose hiperboloida: a, b i imaginarna poluosa c.

Preseci sa ravnima paralelnim xy koordinatnoj ravni su elipse, a sa ravnima pa paralelnim xz i yz ravnima su hiperbole.



Primer: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{4}=1$



- $z=k$: $\frac{x^2}{4}+y^2=1+\frac{k^2}{4}$ i predstavlja elipsu u xy ravni
- $y=0$: $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$ i predstavlja hiperbolu u xz ravni
- x$=0$: $y^2-\frac{z^2}{4}=1$ i predstavlja hiperbolu u yz ravni.

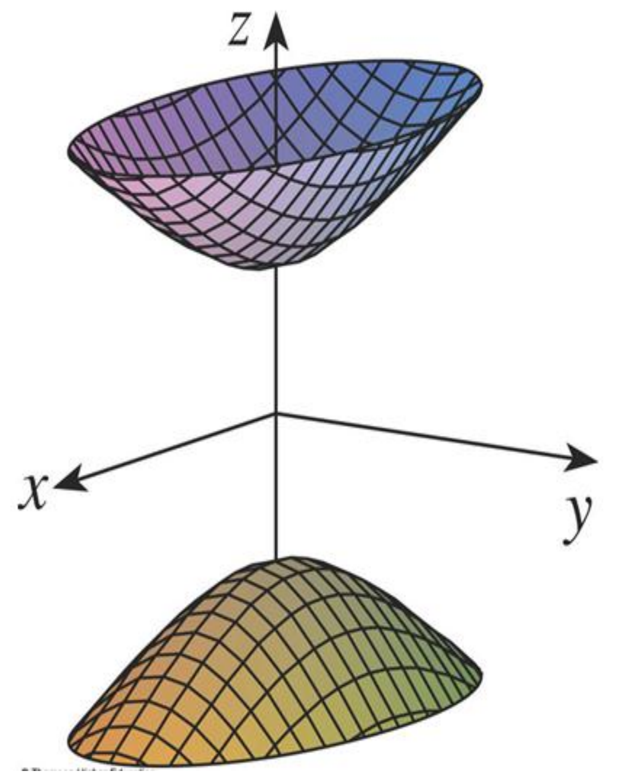
Dvograni hiperboloid

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$
- a i b su imaginarne

poluose, a c je poluosa i kažemo da je z osa osa ovakvog hiperboloida.
Slično: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ sa y osom, kao i

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

sa x osom.



Primer: $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

- Z=0: $-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ i predstavlja hiperbolu u xy ravni
- x=0: $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$ i takođe predstavlja hiperbolu u yz ravni
- Y=0: nema preseka jer za y=0 dobijamo

$$4x^2 + 2z^2 + 4 = 0$$

ali postoji presek sa nekim ravnima paralelnim xz ravni.

Neka je y=k

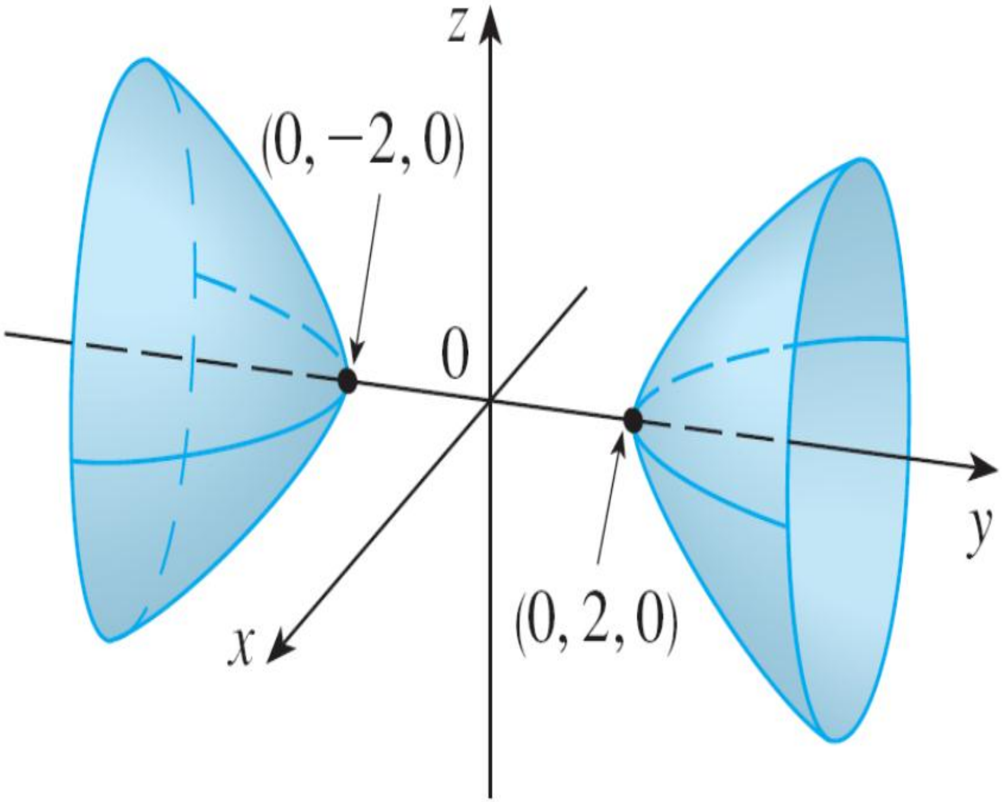
- Tada je

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1$$

- Za $|k|$ >2 preseci sa ravnima y=k su elipse

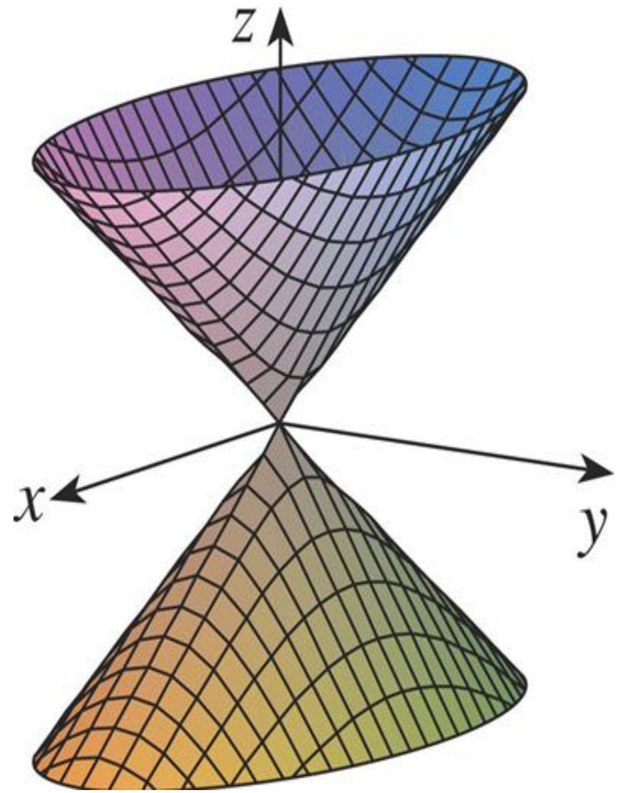
$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{4}-1} + \frac{z^2}{2(\frac{k^2}{4}-1)} = 1,$$

dok za $|k|$ <2 nema preseka.



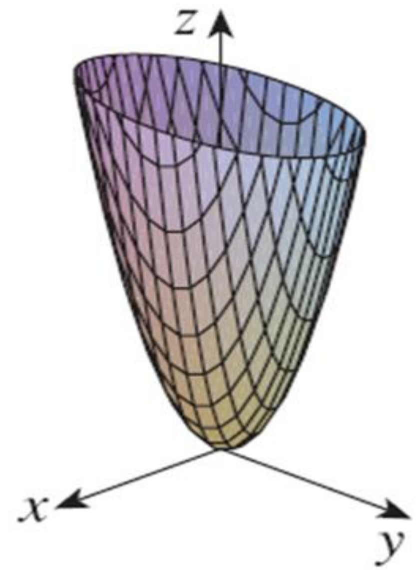
Konus $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

- x=k , $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2}$, dakle preseci sa ravnima paralelnim yz ravni su hiperbole
- y=k slično
- z=k, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$, dakle preseci sa ravnima paralelnim xy ravni su elipse



Eliptički paraboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

- Promenljiva stepena 1 u jednačini paraboloida određuje osu paraboloida (z osa u našem slučaju)
- Preseci sa ravnima x=k, y=k su parabole
- Presek sa ravni z=k, za k>0 je elipsa, dok za k<0 nema preseka



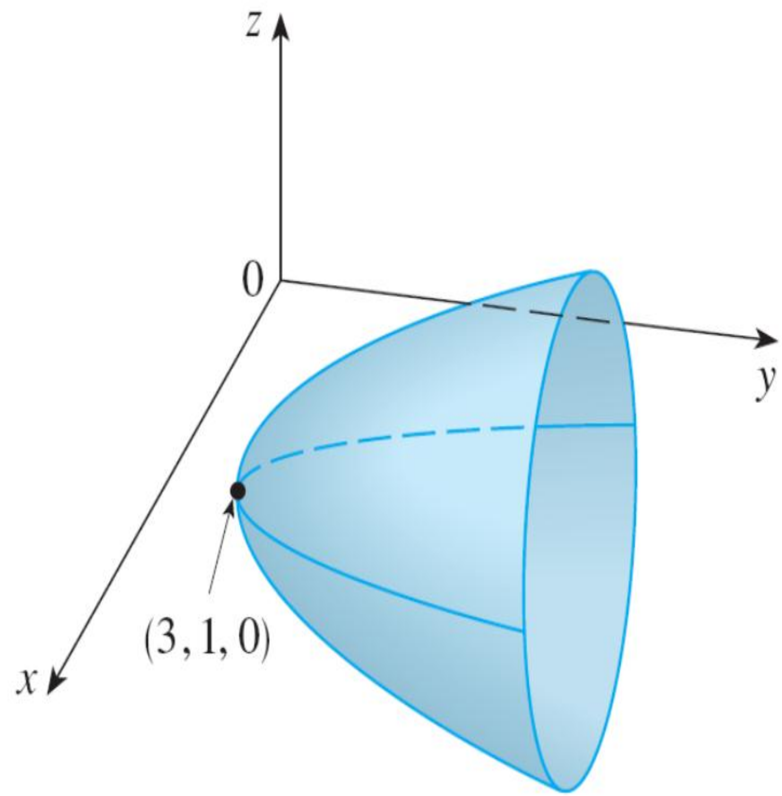
Primer: $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

- $y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$
- $y = k, k > 1,$

  elipsa

  $k - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$
- z=0, odnosno presek sa xy ravni je parabola

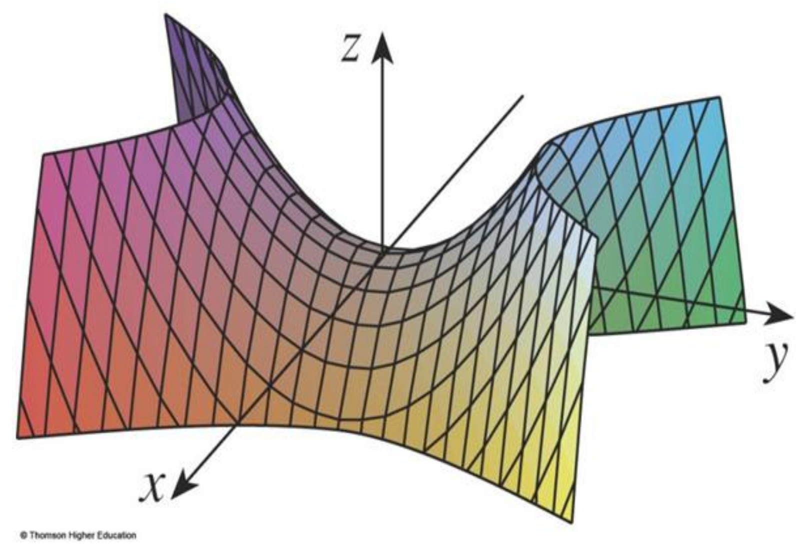
  $$y - 1 = (x-3)^2$$
- T(3,1,0)



Hiperbolički paraboloid ili sedlo

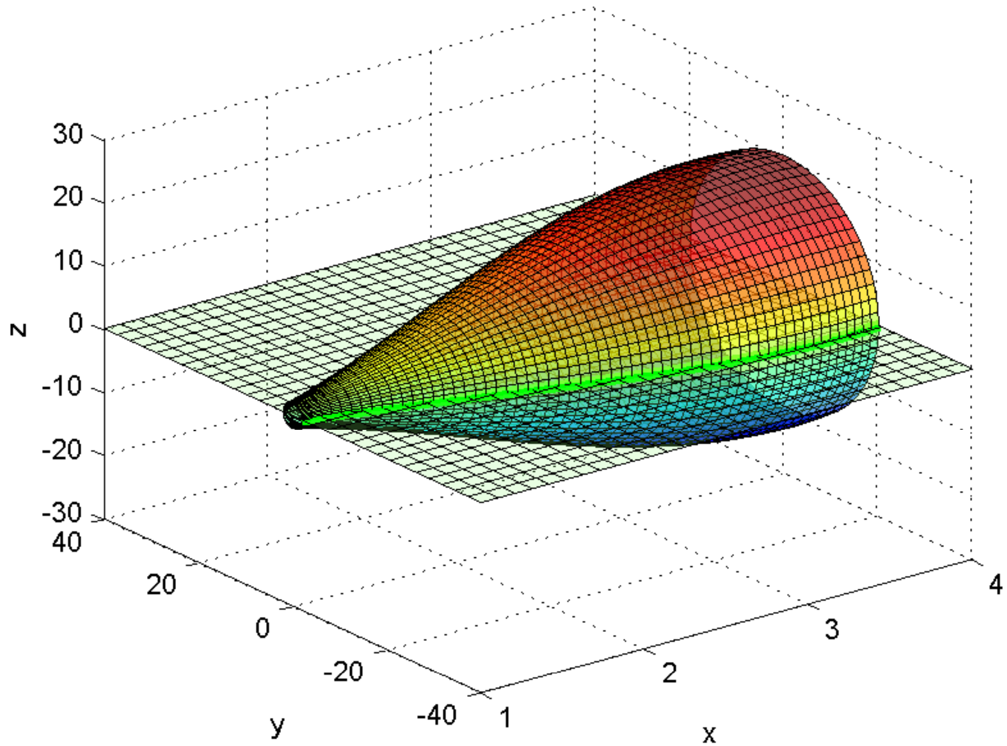
$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

- z=k, odnosno preseci sa ravnima paralelnim sa xy ravni su hiperbole
- x=k ili y=k, preseci sa odgovarajućim vertikalnim ravnima su parabole
- Kroz svaku tačku paraboloida postoje dve prave linije koje mu pripadaju

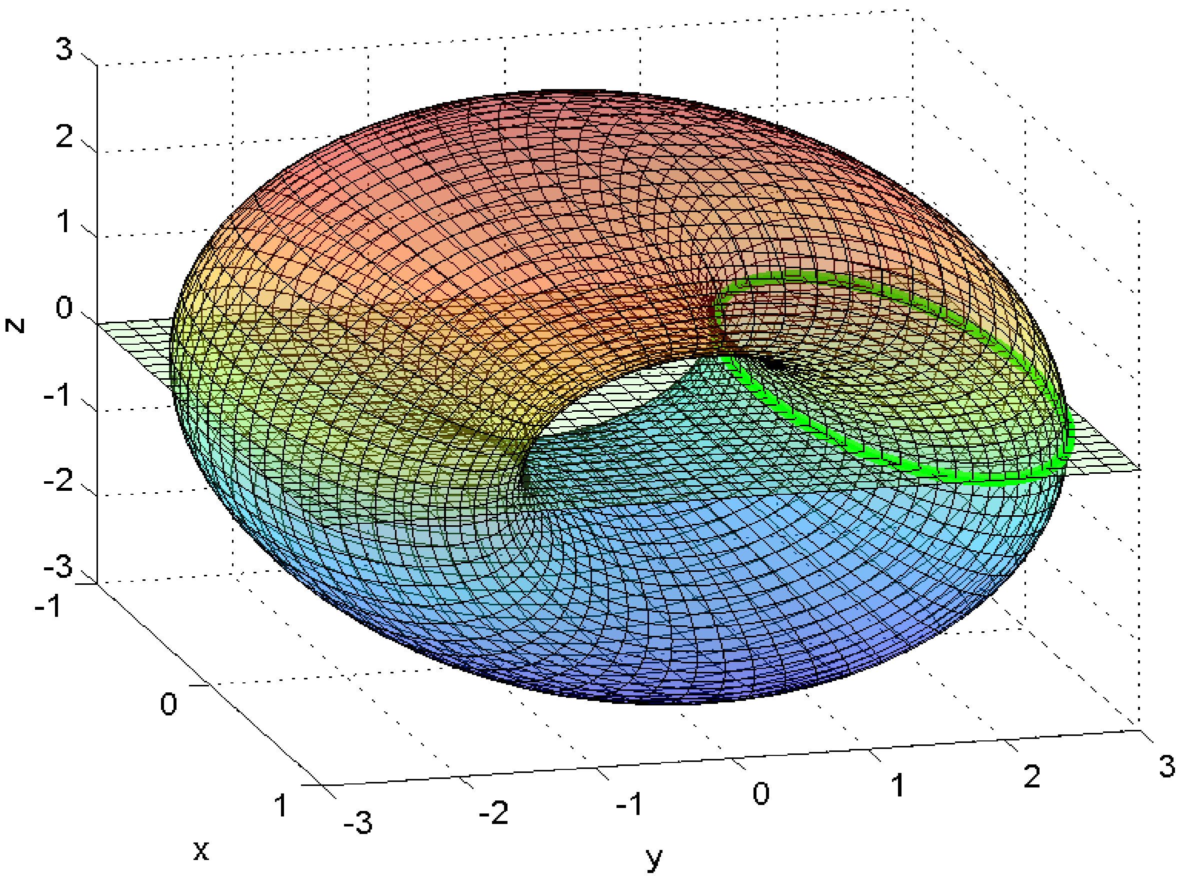


Primena:

Primeri:



Torus



Dva cilindra koja se seku