STATISTIČKA TEORIJA TELEKOMUNIKACIJA

RAČUNSKE VEŽBE

2010

Oznaka: | List:

Ø

T — KANAL → R

$P(H_0)$ | $P_{e0} = P(A_1 | H_0)$ | $P(A_0)$

$P(H_1)$ | $P_{e1} = P(A_0 | A_1)$ | $P(A_1)$

? $P(H_1 | A_1)$

① $\sum_j^{\ell} P(A_j) = 1$, $\sum_j^{\ell} P(A_j | B_k) = 1$ ← const

② $\sum_k^{\ell} P(A_j, B_k) = P(A_j)$

③ $P(A, B) = P(A|B) \cdot P(B)$, za nezav. $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$

④ $P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

1

1 Posmatra se prenos binarnih brojeva.

Verovatnoća da je primljena 0 kada je otpremljena 0 je $P(0p|0o) = 0.9$

Verovatnoća da je primljeno 1 kada je otpremljena 1 je $P(1p|1o) = 0.9$.

Hipoteza

Verovatnoća slanja 0 je $P(0o) = 0.8$

odrediti

Ako je primljena 1 kolika je verovatnoća da je ~~poslata~~ otpremljena 1 $P(1o|1p)$?

Uočiti razliku

Primenom Bayesove formule dobija se

otpremljeno, primljeno

$$P(A_j|B_k) = \frac{P(A_j)}{P(B_k)} P(B_k|A_j)$$

pod uslovom da je primljeno 1

$$P(1o|1p) = \frac{P(1o)}{P(1p)} P(1p|1o)$$

dato

kolika je verovatn. da je otpr. 1

verovatnoća da je otpreml. 1 kada je primljeno 1

Hipoteza

Poznato je $P(1p|1o) = 0.9$

Onda mora biti $P(1p|0o) = 1 - P(1p|1o) = 1 - 0.9 = 0.1$ i $P(0p|1o) = 0.1$

Verovatnoća slanja 0 je $P(0o) = 0.8$

te je $P(1o) = 1 - P(0o) = 1 - 0.8 = 0.2$ ✓

Treba naći $P(1p)$.

p - prijem ⟺ R - receiver

o - otprem. ⟺ T - transmiter

Ako se verov. združ. dog. $P(A_j, B_k)$ sumira po svim ishodima jednog eksperim. dobija se verovat. drugog eksperimenta

$$\sum_k P(A_j, B_k) = P(A_j)$$

$$P(1p) = P(1p, 1o) + P(1p, 0o)$$

Združene verovatnoće:

$$P(1p, 1o) = P(1o) \cdot P(1p|1o) = 0.2 \cdot 0.9 = 0.18$$

$H_0 \equiv 0_o$ $\quad A_0 = 0_p$

$H_1 \equiv 1_o$ $\quad A_1 = 1_p$

BOLJE SA OVIM OZNAKAMA

$$P(1p, 0o) = P(0o) \cdot P(1p|0o) = 0.8 \cdot 0.1 = 0.08$$

te je

$$\boxed{P(1p) = 0.18 + 0.08 = 0.26} ✓$$

Tražena verovatnoća je

$$P(1o|1p) = \frac{0.2}{0.26} 0.9 = 0.69$$

UPOREDI

$P(0o|0p) = 0.97$

$P(1o|0p) = 0.03$

Odmah se vidi (može se izračunati, za domaći)

$$P(0o|1p) = 0.31$$

$\boxed{2}$ Kroz kanal na koji deluju smetnje prenosi se jedna od dve komande kao kodovane informacije: 11111 i 00000. Verovatnoća predaje ovih komandi je $P(H_1) = 0.7$ i $P(H_0) = 0.3$. Usled smetnji, verovatnoća tačnog prijema svakog bita iznosi 0.6. Ako izobličenje jednog bita ne zavisi od izobličenja drugih, kada je primljena poruka 10110 kolika je verovatnoća da je poslata komanda 11111, odnosno da je poslata komanda 00000.

$$P(H_1|A) = ?$$
$$P(H_0|A) = ?$$

Za određivanje ove verovatnoće koristimo Bajesovu formulu

$$P(H_i|A_j) = \frac{P(H_i)\cdot P(A_j|H_i)}{P(A_j)}$$

Traži se verovatnoća hipoteze H_1 da je poslato 11111 ako je primljeno $A\,\{10110\}$.

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)}$$

verovatnoća da je primljeno A kada je poslato H_1

Potrebno je odrediti verovatnoće koje se javljaju u gornjem obrascu

Poznato je: $P(H_1) = 0.7$

Verovatnoća događaja A pod hipotezom da su poslate sve jedinice (hipoteza H_1):

$$A \rightarrow \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$
$$P(A/H_1) = P(1/1)\,P(0/1)\,P(1/1)\,P(1/1)\,P(0/1)$$

pošto su izobličenja bita nezavisna verovatnoće tačnog odnosno pogrešnog prenosa se množe.

$$\boxed{P(A/H_1) = 0.6\cdot \underset{pogr.}{0.4}\cdot 0.6\cdot 0.6\cdot \underset{pogr.}{0.4} = 0.035}$$

Videli smo da je združena verovatnoća $P(A_j, B_K) = P(B_K)\cdot P(A_j|B_K)$

Takođe, ako verovatnoće združenog događaja $P(A_j, B_K)$ sumiramo po svim mogućim ishodima jednog eksperimenta dobija se verovatnoća drugog eksperimenta.

$$\sum_K P(A_j, B_K) = \sum_K P(B_K)\cdot P(A_j|B_K) = P(A_j)$$

Na osnovu toga, može se pisati

$$P(A) = \underset{dato}{P(H_0)}\,P(A/H_0) + \underset{dato}{P(H_1)}\,P(A/H_1)$$

Potrebno je odrediti uslovnu verovatnoću $P(A/H_0)$, primljeno A kada su poslate sve nule (hipoteza H_0)

$$A \rightarrow \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$
$$P(A/H_0) = P(1/0)\cdot P(0/0)\cdot P(1/0)\,P(1/0)\,P(0/0)$$
$$P(A/H_0) = \underset{pogr.}{0.4}\quad 0.6\cdot \underset{pogr.}{0.4}\quad \underset{pogr.}{0.4}\cdot 0.6 = 0.023$$

Sada možemo izračunati verovatnoću događaja da je primljena poruka A :

$$P(A) = 0{,}3 \cdot 0.023 + 0{,}7 \cdot 0{,}035$$

$$P(A) = 0.0314$$

Tražena verovatnoća da je poslato 11111 kada je primljeno 10110

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)}$$

$$P(H_1/A) = \frac{0.7 \cdot 0.035}{0{,}0314}$$

$$\boxed{P(H_1/A) = 0{,}78}$$

Verovatnoće da su poslate sve nule kada je primljeno 10110

$$P(H_0/A) = \frac{P(H_0) \cdot P(A/H_0)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}023}{0.0314} = 0{,}22$$

Ova verovatnoća mogla se odrediti i iz uslova

$$P(H_1/A) + P(H_0/A) = 1$$

Domaći

$$\left.\begin{array}{l} P(H_0) = 0{,}7 \\ P(H_1) = 0{,}3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(H_0/A) = 0{,}605 \\ P(H_1/A) = 0{,}395 \end{array} \quad ?$$

4. Telegrafski signal se sastoji od niza crta i tačaka. U proseku se izobliči 2/5 tačaka (detektuju se kao crtice) i 1/3 crta (detektuju se kao tačke). Poznato je da je u prenošenoj poruci broj tačaka prema broju crta 5:3. Odrediti verovatnoće da je primljen signal tačan ako je a) primljena crta; b) primljena tačka.

H_1 - hipoteza da je poslati signal <u>tačka</u>

H_2 - hipoteza da je poslati signal <u>crta</u>

A_1 - događaj da je primljena <u>tačka</u>

A_2 - događaj da je primljena <u>crta</u>.

Poznato je: $P(H_1) : P(H_2) = 5:3$ $\qquad \dfrac{P(H_1)}{P(H_2)} = \dfrac{5}{3}$

Takođe, mora biti ispunjen uslov:

$$P(H_1) + P(H_2) = 1$$

Te je:

$$P(H_1) = \frac{5}{8}$$

$$P(H_2) = \frac{3}{8}$$

<u>Uslovne verovatnoće</u> su date:

$$P(A_2/H_1) = \frac{2}{5}$$ primljena crta (A_2) a poslata tačka (H_1)

$$P(A_1/H_2) = \frac{1}{3}$$ primljena tačka (A_1) a poslata crta (H_2)

Pošto je $\underbrace{P(A_1/H_1)}_{\text{tačka}} + \underbrace{P(A_2/H_1)}_{\text{crta}} = 1$ poslata tačka

$$\therefore\ P(A_1/H_1) = 1 - P(A_2/H_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Slično:

$$P(A_2/H_2) = 1 - P(A_1/H_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Verovatnoće događaja:

$$P(A_1) = P(H_1)P(A_1/H_1) + P(H_2)P(A_1/H_2) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = P(H_1)P(A_2/H_1) + P(H_2)P(A_2/H_2)$$

$$P(A_2) = \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

Primenom Bajesovog obrasca dobija se:

Verovatnoća da je poslata tačka kada je primljena tačka:

⇨ $$P(H_1/A_1) = \frac{P(H_1)P(A_1/H_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

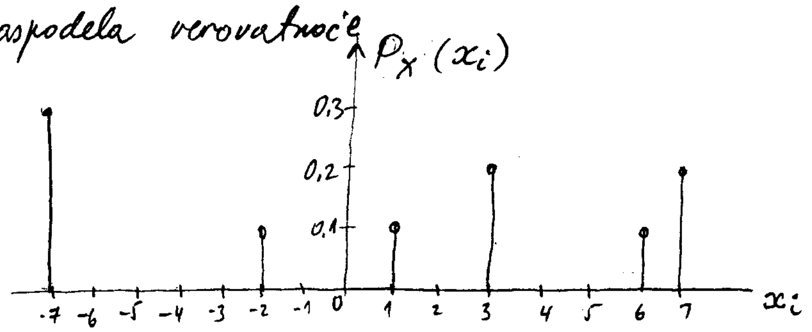
verovatnoća da je posla crta kada je primljena crta:

⇨ $$P(H_2/A_2) = \frac{P(H_2)P(A_2/H_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

dovde 3.03.2003
1. dvočas

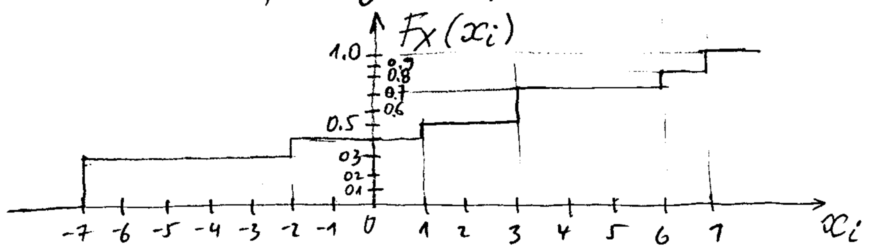
5 Nacrtati raspodelu verovatnoća, kumulativnu funkciju raspodele verovatnoće i odgovarajuću funkciju gustine verovatnoće kada je slučajna promenljiva X diskretna i može da uzme sledeće vrednosti $\{-7; -2; 1; 3; 6; 7\}$ sa verovatnoćama $\{0.3; 0.1; 0.1; 0.2; 0.1; 0.2\}$ respektivno.

raspodela verovatnoće



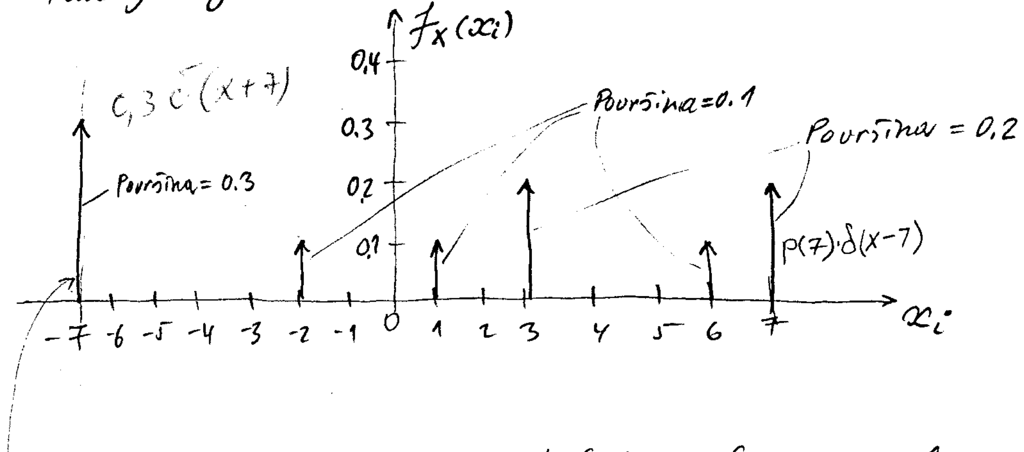
dato

kumulativna funkcija raspodele verovatnoće



$$F_X(x_i) = P(X < x_i)$$

Funkcija gustine verovatnoće



$$f_X(x_i) = \frac{d F_X(x_i)}{d x_i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_i)\, dx_i = 1$$

$$F_X(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_X(x_i)\, dx_i$$

Ovde bi gustina verovatnoće trebalo da bude ∞ velika.
Teškoću zaobilazimo tako što dodajemo jedan Dirakov impuls čija je "težina" numerički jednaka verovatnoći da će X uzeti diskretnu vrednost x_i

Korišćenjem Dirakovih impulsa može se u opštem slučaju definisati gustina verovatnoće za diskretnu stohastičku promenljivu kao prvi izvod kumulativne funkcije raspodele. Onda Dirakovi impulsi nastaju u svim tačkama diskontinuiteta