$\boxed{1}$

Slučajna promenljiva X analitički se može predstaviti sledećom funkcijom gustine verovatnoće

$$f_X(x) = \begin{cases} a\cos(x) & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0 & x < -\pi/2, \quad x > \pi/2 \end{cases}$$

a) Izračunati vrednost koeficijenta a; b) nacrtati grafik funkcije gustine verovatnoće; c) odrediti kumulativnu funkciju raspodele verovatnoće i nacrtati njen grafik. d) Naći verovatnoću da se veličina X nađe u intervalu od 0 do $\pi/4$.

a) Za funkciju gustine verovatnoće važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

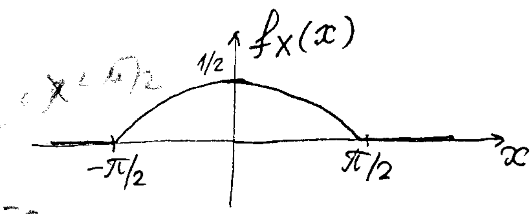
u našem slučaju je:

$$1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos x\,dx = a\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a(1-(-1)) = 2a$$

$$a = 1/2$$

b)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



c) Kumulativna funkcija raspodele verovatnoće definiše se na sledeći način:

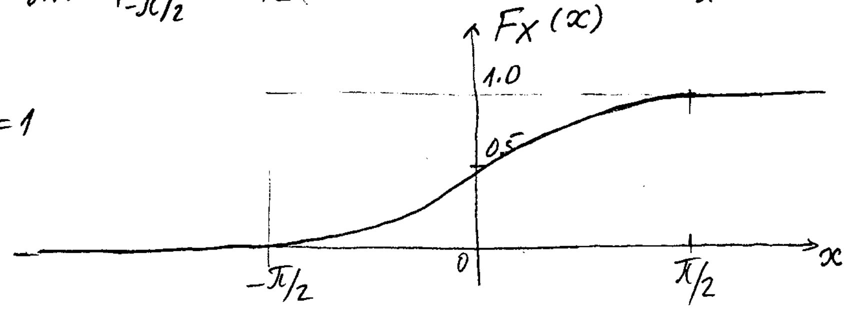
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \cancel{1/2\cos x}\; f_X(x)\,dx$$

trebalo bi uvesti smenu na pr. x' da se ne bi brkalo sa granicom x

$$F_X(x) = \cancel{\int \ldots} + \int_{-\pi/2}^{x} 1/2\cos x\,dx$$

$$= 1/2\sin x\Big|_{-\pi/2}^{x} = 1/2\big(\sin x - \overbrace{\sin(-\pi/2)}^{-1}\big) = \frac{1}{2}(\sin x + 1)$$

$$F_X(\infty) = 1$$



d)

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx \qquad x_1 = 0,\; x_2 = \pi/4$$

$$= \int_{0}^{\pi/4} 1/2\cos x\,dx = 1/2\sin x\Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

ili

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cancel{1} - \sin 0 - \cancel{1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\boxed{2}$ Funkcija gustine verovatnoće slučajne veličine X ima oblik

$$f_X(x) = A e^{-B|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

A i B su konstante.

a) Naći vezu između koeficijenata A i B.

b) Odrediti kumulativnu funkciju raspodele $F_X(x)$

c) Nacrtati dijagram funkcije gustine verovatnoće $f_X(x)$ i kumulativne funkcije raspodele $F_X(x)$ za slučaj $B=3$.

a) Iz uslova

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A e^{-B|x|}dx = A\int_{-\infty}^{0} e^{Bx}dx + A\int_{0}^{\infty} e^{-Bx}dx = A\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{B}\right)$$

dobija se

$$1 = \frac{2A}{B}$$

odnosno

$$B = 2A$$

b) Kumulativna funkcija raspodele je:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

<u>za $x<0$ je</u>

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} A e^{Bx}dx = \frac{A}{B}e^{Bx}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{Bx}, & x \leq 0 \\ 1-\frac{1}{2}e^{-Bx}, & x > 0 \end{cases}$$

kako je $B = 2A$

$$F_X(x) = \frac{1}{2}e^{Bx}$$

<u>za $x \geq 0$ je</u>

$$F_X(x) = F_X(0) + \int_{0}^{x} A e^{-Bx}dx = \frac{A}{B} - \frac{A}{B}\left(e^{-Bx}-1\right)$$

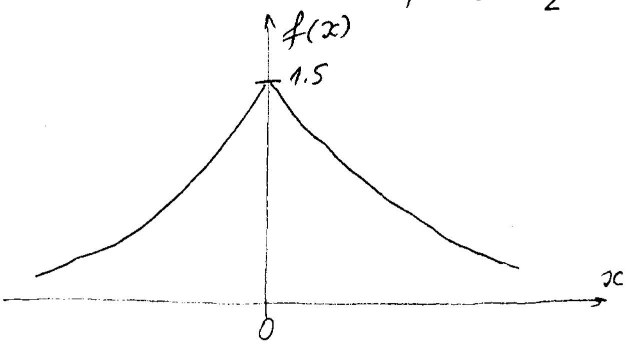
$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-Bx} = 1 - \frac{1}{2}e^{-Bx}$$

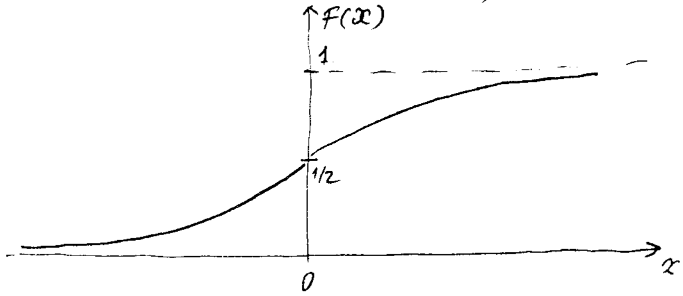
ako je $B=3$

$$A = \frac{B}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-3|x|} \quad ; \quad F(x) = \frac{1}{2}e^{3x}, \quad x<0$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-Bx}, \quad x \geq 0$$





3. Dve slučajne promenljive X i Y imaju združenu funkciju gustine verovatnoće definisanu na sledeći način

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)} & x,y\geq 0 \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

pri čemu je A konstanta.

a) Odrediti funkcije gustine verovatnoće i
b) kumulativne funkcije raspodele svake slučajne promenljive.
c) Odrediti uslovne funkcije gustine verovatnoće.

Konstanta A može se izračunati iz uslova:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy=1$$

kako je $f_{XY}(x,y)=0$ za negativne vrednosti x i y, može se pisati

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy=1$$

$$A\int_0^{\infty} e^{-2x}dx\int_0^{\infty} e^{-y}dy=1$$

$\int e^{kx}dx=\frac{e^{kx}}{k}$

$$A\left.\frac{e^{-2x}}{-2}\right|_0^{\infty}\cdot\left.\frac{e^{-y}}{-1}\right|_0^{\infty}=1$$

$$A\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$A=2$$

Funkcija gustine verovatnoće jedne slučajne promenljive:

$\int_0^{\infty} e^{-x}dx=1$

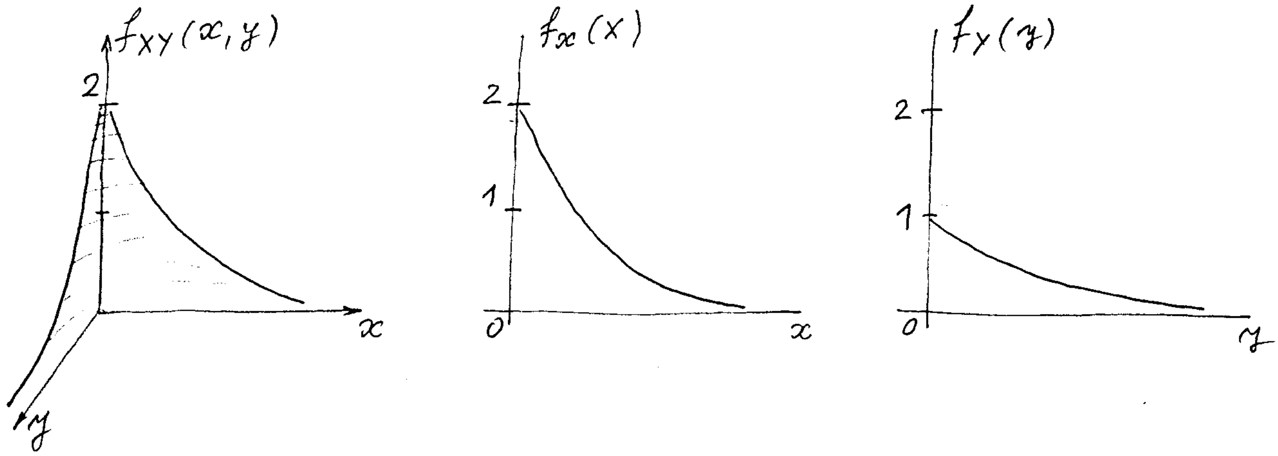
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dy, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

i

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_0^{\infty} 2e^{-(2x+y)}dx, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-y}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$



S obzirom da je $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$
može se zaključiti da su slučajne promenljive X i Y statistički nezavisne.

<u>Združena kumulativna funkcija raspodele</u> slučajnih promenljivih je

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x',y')\,dx'dy'$$

Pri integraciji je izvršena smena za promenljive kako bi se izbegla konfuzija

$$F_{XY}(x,y) = \underbrace{\int_0^y e^{-y'}dy'}\int_0^x 2e^{-2x'}dx'$$

$$\frac{1}{-1}e^{-y'}\Big|_0^y = \left[e^{-y}-(-1)\right] \quad = \begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}) & x,y\geq 0\\ 0 & \end{cases}$$

Kumulativna funkcija raspodele jedne slučajne promenljive:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x',y')\,dx'dy' \qquad x,y\geq 0$$

Gornji integral već je izračunat, te se može pisati

$$F_X(x) = F_{XY}(x,\infty) = \begin{cases}(1-e^{-2x}) & , x\geq 0\\ 0 & , \text{drugde}\end{cases}$$

odnosno

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty,y) = \begin{cases}(1-e^{-y}) & , y\geq 0\\ 0 & , \text{drugde}\end{cases}$$

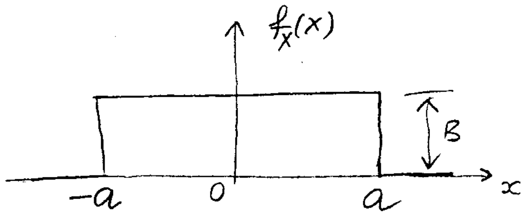
Po analogiji sa uslovnom verovatnoćom, može se pisati za uslovnu verovatnoću funkcije gustine verovatnoće

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases}2e^{-2x} & , x\geq 0\\ 0 & , x<0\end{cases}$$

dovde II dvočas

$$f_{Y|X}(y|x) = \left[\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}\right] = \{e^{-y},\ y\geq 0;\ 0,\ y<0\}$$

4 Slučajna veličina X ima uniformnu gustinu verovatnoće u opsegu $[-a, a]$. Potrebno je odrediti karakterističnu funkciju $F_X(j\Omega)$



$$1=\int_{-a}^{a} f_X(x)\,dx = Bx\Big|_{-a}^{a} = 2Ba$$

$$B=\frac{1}{2a}$$

Funkcija gustine verovatnoće ima oblik

$$f_X(x)=\frac{1}{2a} \qquad -a\le x\le a$$

$$f_X(x)=0 \qquad \text{drugde}$$

Karakteristična funkcija slučajne promenljive je

$$F_X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,e^{j\Omega x}\,dx$$

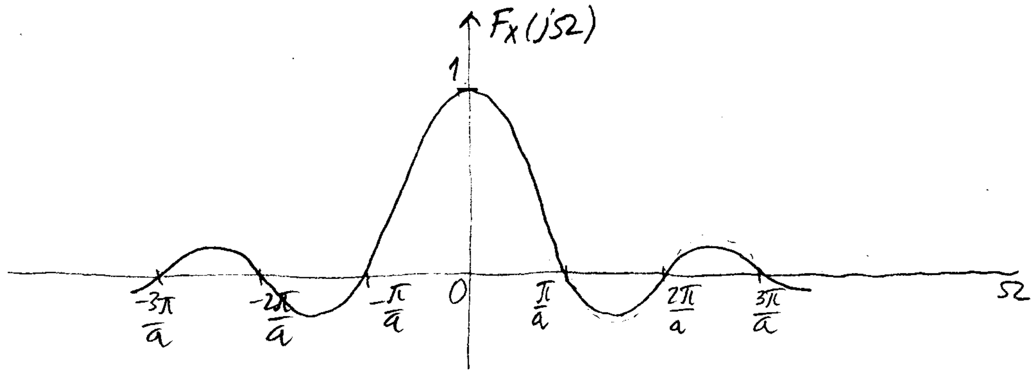
$e^{\pm jx}=\cos x \pm j\sin x$

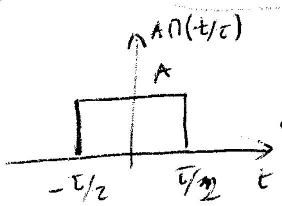
$$=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{j\Omega x}\,dx = \frac{1}{2a}\,\frac{1}{j\Omega}\left[e^{j\Omega a}-e^{-j\Omega a}\right]$$

$$=\frac{1}{a\Omega}\,\frac{1}{2j}\underbrace{\left(e^{ja\Omega}-e^{-ja\Omega}\right)}_{2j\sin a\Omega}$$

$$F_X(j\Omega)=\frac{\sin a\Omega}{a\Omega}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$





$$\overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow}\ A\tau\,\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$

$$=A\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$$

$\Omega=-2\pi f$, $a=\tau/2$ $\Rightarrow$ $A\tau\,\frac{\sin\left(-\frac{\Omega}{2}\cdot 2a\right)}{-\frac{\Omega}{2}\,2a}$

$\sin a\Omega=0$

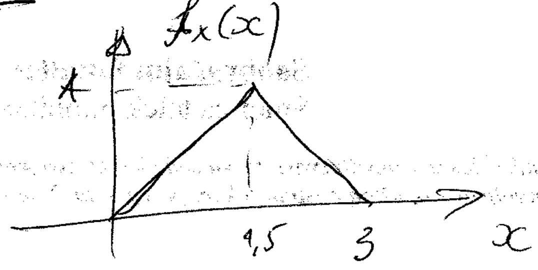
$a\Omega=k\pi$

$\Omega=k\frac{\pi}{a}$

$k=\pm1,\pm2,\dots$

(*) **DOMAĆI 1**

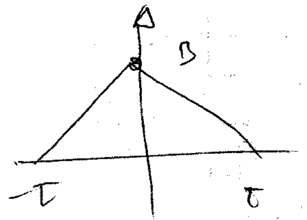
X :



a) $A = ?$

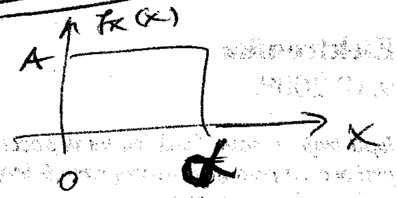
b) $F_X(j\Omega) = ?$

$\Updownarrow$



$B\,\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow B\tau\,\mathrm{sinc}^2(f\tau)$

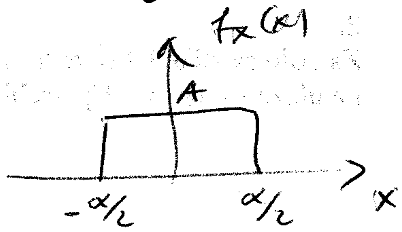
DOMAĆI 2



a) $A = ?$

b) $F_X(j\Omega) = ?$

$\Updownarrow$



TEOREMA OT 1

$f_a(x) = f(x \pm a) \longleftrightarrow \mathcal{F}$

$$F_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x) e^{-j\Omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \pm a) e^{-j\Omega x}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\Omega(u \mp a)}\,du = e^{\pm j\Omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\Omega u}\,du$$

$x \pm a = u$

$dx = du$

$$= e^{\pm j\Omega a} F(j\Omega)$$

5. Odrediti: karakteristicnu funkciju gustine verovatnoće date izrazom

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Karakteristična funkcija se definiše kao $\mathcal{F}$ transformacija funkcije gustine verovatnoće

$$F_X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\Omega x} dx$$

U ovom zadatku je

$$F_X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{j\Omega x} dx$$

$(j\Omega)^2 = -\Omega^2$

Uzimajući da je

$$-\frac{x^2}{2} + j\Omega x + \frac{\Omega^2}{2} - \frac{\Omega^2}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 2j\Omega x - \Omega^2) - \frac{\Omega^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(x - j\Omega)^2 + \frac{\Omega^2}{2}$$

dobija se

$$F_X(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Omega^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-j\Omega)^2} dx$$

smenom $\frac{x - j\Omega}{\sqrt{2}} = u$, dobija se

$$F_X(j\Omega) = e^{-\frac{\Omega^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du}_{1} = e^{-\frac{\Omega^2}{2}}$$

$$\frac{1}{2}[2\,\mathrm{erf}(\infty)]$$

$$-\frac{x^2}{2} + j\Omega x$$

$$-\frac{x^2}{2} + j\Omega x = -\frac{1}{2}(x^2 - 2j\Omega x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2j\Omega x \pm (j\Omega)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2j\Omega x + (j\Omega)^2\right) + \frac{1}{2}(j\Omega)^2$$

$$= -\frac{1}{2}(x - j\Omega)^2 - \frac{1}{2}\Omega^2$$

$$e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \tau e^{-\pi(f\tau)^2}$$

$$\frac{x^2}{2} = \pi \frac{t^2}{\tau^2} \qquad e^{-\frac{x^2}{2}} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sqrt{2\pi}\, e^{-\pi(f\sqrt{2\pi})^2}$$

$$\tau = \sqrt{2\pi} \qquad = \sqrt{2\pi}\, e^{-\left(\frac{2\pi f}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\Omega^2}{2}}$$