1 | Posmatra se periodičan slučajan proces čiji je jedan član

$$n(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Theta),$$

pri čemu su A_0 i f_0 konstante a θ je slučajna promenljiva čija je funkcija gustine verovatnoće definisana na sledeći način:

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & , \ |\theta| \le \pi \\ 0 & , \ \text{drugde} \end{cases}$$

Izračunati jednosmernu komponentu signala slučajnog procesa i ukupnu srednju snagu slučajnog procesa.

*}

Jednosmerna komponenta predstavlja statističku srednju vrednost člana ansambla

$$\overline{n(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) f_\Theta(\theta)\, d\theta$$

$$\overline{n(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cdot f_\Theta(\theta)\, d\theta$$

$$\overline{n(t)} = \int_{-\pi}^{\pi} A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 0$$

Srednja snaga slučajnog procesa na otpornosti od 1Ω jednaka je drugom momentu slučajne funkcije:

$$\overline{n^2(t)} = \int_{-\pi}^{\pi} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{A_0^2}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\, d\theta}_{\pi}$$

$$= \frac{A_0^2}{2}$$

$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

novi zadatak (11)+

*) Izračunati prvi i drugi momenat ako je funkcija gustine verovatnoće definisana kao

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & |\theta| \le \frac{1}{4}\pi \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

U ovom slučaju je:

$$\overline{n(t)} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta) \frac{2}{\pi} d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} A_0 \sin(2\pi f_0 t + \theta)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2} A_0}{\pi} \cos \omega_0 t$$

1) $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$

2) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\overline{n^2(t)} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) \frac{2}{\pi} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{A_0^2}{\pi} \left[1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta)\right] d\theta = \frac{A_0^2}{\pi}\frac{\pi}{2} + \frac{A_0^2}{\pi}\frac{1}{2}\sin(4\pi f_0 t + 2\theta)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

koristiti (1)

$$\frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{\pi}\frac{1}{2} 2\cos\frac{8\pi f_0 t}{2} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{\pi}\cos 4\pi f_0 t$$

(2)

Za stacionarne procese važi da su svi momenti nezavisni od vremena, te ovaj proces nije stacionaran. Dakle, ovaj proces nije ni ergodičan jer

($\boxed{2}$) Slučajni proces $Z(t)$ opisan je sledećim izrazom:

$$Z(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \theta),$$

gde je $X(t)$ stacionaran slučajni proces kod koga je

$$E[X(t)] = \overline{X(t)} = 0$$

$$E[X^2(t)] = \overline{X^2(t)} = \sigma_x^2$$

a) Ako je $\theta = 0$ naći $E[Z(t)]$ i $E[Z^2(t)]$

b) ako je θ slučajna promenljiva nezavisna od $X(t)$ uniformno raspodeljena u opsegu $(-\pi, \pi)$ naći $E[Z(t)]$ i $E[Z^2(t)]$.

c) da li je $Z(t)$ stacionaran proces?

a) Srednja vrednost

$$\overline{Z(t)} = \overline{X(t)\cos\omega_0 t} = \cancelto{0}{\overline{X(t)}}\cdot\cos\omega_0 t = 0$$

$$E[Z^2(t)] = E\{[X(t)\cdot\cos(\omega_0 t)]^2\}$$

$$= E[X^2(t)]\cos^2\omega_0 t$$

$$= \sigma_x^2\cos^2(\omega_0 t)$$

*) *kod stacion. procesa srednj. vrednost po ansamblu ne zavisi od trenu. posmatranja

c) S obzirom da drugi momenat zavisi od t proces nije stacionaran. ovde to nije slučaj

b)

$$E[Z(t)] = 0$$

$$E[Z^2(t)] = E\{[X(t)\cos(\omega_0 t + \theta)]^2\}$$

$$= E[X^2(t)\cos^2(\omega_0 t + \theta)]$$

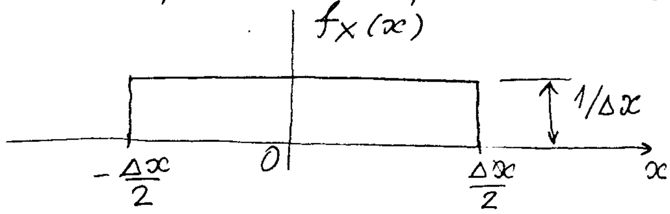
kako su $X(t)$ i θ nezavisne slučajne promenljive, važi:

$$= E[X^2(t)]\cdot\underbrace{E[\cos^2(\omega_0 t + \theta)]}$$

$$= \sigma_x^2\cdot\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$, videti zadatak 11, str. 14.

3. Informacija se prenosi putem kvantizovanih impulsa pri čemu je korak kvantizacije $\Delta x = 1V$. Pretpostavljajući da je greška kvantizacije ravnomerno raspoređena u opsegu kvantovanja i da ima srednju vrednost jednaku nuli, odrediti snagu šuma kvantovanja na otpornosti 1Ω.

Greška kvantovanja, koja iznosi $\pm 1/2$ LSB odnosno, u ovom slučaju $\pm 0.5V$, je slučajna veličina te se naziva i šum kvantovanja. Pretpostavljeno je da je ovoj šum ravnomerno raspoređen u opsegu kvantovanja. Gustina verovatnoće greške kvantovanja za jedan interval kvantovanja može se predstaviti slikom —.



Analitički izraz za verovatnoću greške kvantovanja ima oblik:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Delta x}, \quad -\frac{\Delta x}{2} \le x \le \frac{\Delta x}{2}$$

$$f_X(x) = 0 \qquad \text{drugde}$$

Varijansa šuma kvantovanja predstavlja srednju snagu ovog signala na otpornosti 1Ω.

$$\sigma^2 = E[(X-\bar{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f(x)\,dx$$

Srednja vrednost šuma (greške) kvantovanja jednaka je

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} x \frac{1}{\Delta x}\,dx = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{1}{2\Delta x}\left(\frac{\Delta x^2}{4} - \frac{\Delta x^2}{4}\right)$$

$$\bar{x} = 0$$

te je:

$$\sigma^2 = \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\Delta x}\,\frac{1}{3}\,x^3\Big|_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{1}{3\Delta x}\left(\frac{\Delta x^3}{8} + \frac{\Delta x^3}{8}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{\Delta x^2}{12}$$

odnosno, za $\Delta x = 1V$

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}\ W$$

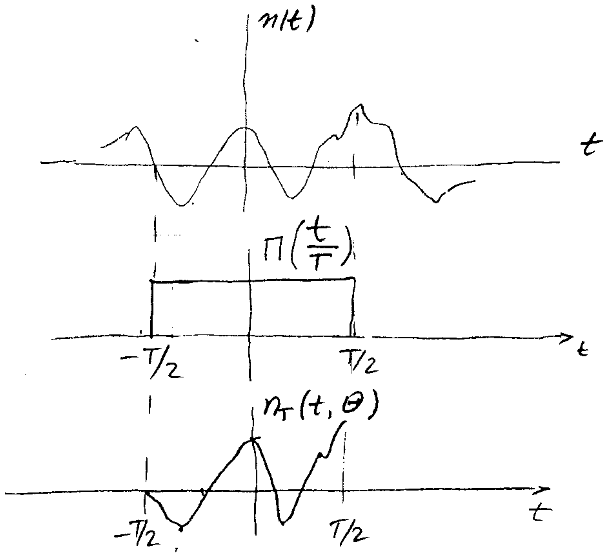
značenje sr. vr. ergodičnih procesa → . . .

4 Naći spektralnu gustinu snage slučajnog procesa čiji je jedan član dat sledećom funkcijom:

$$n(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta),$$

pri čemu je f_0 konstanta a Θ slučajna promenljiva. se unif. rasp. u opsegu $(-\pi, \pi)$

Posmatramo "isečak" funkcije $n(t)$ u intervalu T



Analitički novu funkciju možemo opisati na sledeći način:

$$n_T(t,\Theta) = A\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t + \Theta).$$

preko teoreme za $\mathcal{F}$ transf. proizvoda

$x(t) \leftrightarrow X(f)$

$x_1(t)\cdot x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) * X_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(f-\lambda)\,d\lambda$

$Z(f) * \delta(f-f_0) = Z(f-f_0)$

$Z(f) * \delta(f+f_0) = Z(f+f_0)$

Kako je $\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t + \Theta)] = \frac{1}{2}\delta(f-f_0)e^{j\Theta} + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)e^{-j\Theta}$

i $\mathcal{F}[\Pi(t/T)] = T\cdot \mathrm{sinc}(fT)$

dobija se: konvolucija, radi se o spektrima

$$N_T(f,\Theta) = (AT\,\mathrm{sinc}\,Tf) * \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0)e^{j\Theta} + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)e^{-j\Theta}\right]$$

na osnovu T. o proizvodu $\mathcal{F}$ transform.

$$N_T(f,\theta) = \frac{1}{2}AT\left[e^{j\Theta}\mathrm{sinc}(f-f_0)T + e^{-j\Theta}\mathrm{sinc}(f+f_0)T\right]$$

<u>Spektralnu gustinu energije</u> isečka funkcije dobijamo na sledeći način:

$$|N_T(f,\theta)|^2 = N_T(f,\theta)\cdot N_T^*(f,\theta) =$$

$$|N_T(f,\Theta)|^2 = \left(\frac{1}{2}AT\right)^2\{\mathrm{sinc}^2 T(f-f_0) + e^{2j\Theta}\mathrm{sinc}\,T(f-f_0)\,\mathrm{sinc}\,T(f+f_0) +$$

$$+ e^{-2j\Theta}\mathrm{sinc}\,T(f-f_0)\,\mathrm{sinc}\,T(f+f_0) + \mathrm{sinc}^2 T(f+f_0)\}$$

Da bi dobili $\overline{|N_T(f,\Theta)|^2}$ najpre treba uočiti da je

$$\overline{e^{\pm j2\theta}} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm j2\theta}\frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2\theta \pm j\sin 2\theta)\frac{d\theta}{2\pi} = 0$$

te je:

$$\overline{|N_T(f,\Theta)|^2} = \left(\frac{1}{2}AT\right)^2\left[\mathrm{sinc}^2 T(f-f_0) + \mathrm{sinc}^2 T(f+f_0)\right]$$

Spektralna gustina snage je: $S_n(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{N_T^2}{T}$

$$S_n(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4}A^2\left[T\cdot \mathrm{sinc}^2\, T(f-f_0) + T\,\mathrm{sinc}^2\, T(f+f_0)\right]$$

Kako je $\lim_{T\to\infty} T\,\mathrm{sinc}^2(Tu) = \delta(u)$

to je

$$S_n(f) = \frac{1}{4}A^2\,\delta(f-f_0) + \frac{1}{4}A^2\,\delta(f+f_0)$$

Srednja snaga procesa je.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)\,df = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^2 = \frac{1}{2}A^2$$

dakle, dobija se ista vrednost kao na str. 14.

dovde 4.

5

Spektralna gustina snage slučajnog procesa $n(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)$, pri čemu su A_0 i f_0 konstante a θ slučajna promenljiva čija je funkcija gustine verovatnoće def. na sledeći način

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & |\theta| \le \pi \\ 0 & , \text{drugde} \end{cases},$$

data je izrazom $S_n(f) = \frac{1}{4} A_0^2 \delta(f - f_0) + \frac{1}{4} A_0^2 \delta(f + f_0)$

Odrediti autokorelacionu funkciju procesa

a) kao srednju vrednost po ansamblu (po def.)

b) korišćenjem Wiener-Hinčinove teoreme

Prema Wiener-Hinčinovoj teoremi spektralna gustina snage i autokorelaciona funkcija su transformacioni par te se direktno dobija

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_n(f)]$$

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{4} A^2 \delta(f - f_0) + \frac{1}{4} A^2 \delta(f + f_0)\right]$$

(tablica $\mathcal{F}$ transf)

$$R_n(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)\right] = \cos \omega_0 t$

Izračunavamo $R_n(\tau)$ po definiciji, kao srednju vrednost po ansamblu

$$R_n(\tau) = \overline{n(t)\, n(t + \tau)} = E[n(t) \cdot n(t + \tau)]; \quad n(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

$$R_n(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} A^2 \cos(\underbrace{2\pi f_0 t + \theta}_{\alpha}) \cos[\underbrace{2\pi f_0 (t + \tau) + \theta}_{\beta}] \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot d\theta$$

$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

$$= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos 2\pi f_0 \tau + \underbrace{\cos[2\pi f_0 (2t + \tau) + 2\theta]}_{\int \to 0}\} d\theta \qquad \int d\theta \to 2\pi$$

$$= \frac{A^2}{4\pi} \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

što predstavlja isti rezultat koji je dobijen korišćenjem Winer-Hinčinove teoreme.

$> R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t + \tau) dt$