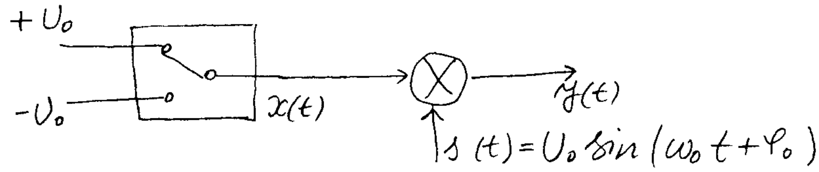
1 Dati analitički izraz za spektralnu gustinu snage slučajnog procesa $y(t)$ na izlazu radiotelegrafskog predajnika sa slike. Pretpostaviti da je noseća učestanost ω_0 dva puta veća od srednjeg broja nultih preseka C u telegrafskom signalu. Autokorelaciona funkcija telegrafskog signala je data izrazom $R_x(\tau)=U_0^2 e^{-2C|\tau|}$



Slučajni proces $y(t)$ predstavlja proizvod dva statistički nezavisna procesa, slučajnog procesa $x(t)$ i determinističkog sinusoidalnog signala.

$$y(t)=x(t)\cdot U_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

Autokorelaciona funkcija proizvoda dva statistički nezavisna procesa jednaka je proizvodu autokorelac. funkcija ovih pojedinač. procesa

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)\cdot R_s(\tau)$$

Poznata je autokorelaciona funkcija telegrafskog signala

$$R_x(\tau)=U_0^2 e^{-2C|\tau|}$$

i sinusoidalnog signala

$$R_s(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,s(t+\tau)\,dt$$

$$R_s(\tau)=\frac{U_0^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

te je

$$R_y(\tau)=U_0^2 e^{-2C|\tau|}\,\frac{U_0^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

kako je

$$\cos\omega_0\tau=\frac{e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau}}{2}$$

$$R_y(\tau)=\frac{U_0^4}{4}e^{-2C|\tau|}\left(e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau}\right)=\frac{U_0^4}{4}\left(e^{-2C|\tau|+j\omega_0\tau}+e^{-2C|\tau|-j\omega_0\tau}\right)$$

Na osnovu Wiener-Hinčinove teoreme može se pisati

$$S_y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{U_0^4}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-2C|\tau|+j\omega_0\tau-j\omega\tau}+e^{-2C|\tau|-j\omega_0\tau-j\omega\tau}\right)d\tau$$

S obzirom da τ može biti manje i veće od 0, gornji integral možemo napisati u sledećem obliku

$$S_y(\omega)=\frac{U_0^2}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{[2c+j(\omega_0-\omega)]\tau}\,d\tau+\frac{U_0^4}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{[2c-j(\omega_0+\omega)]\tau}\,d\tau+$$

$$+\frac{U_0^4}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-[2c-j(\omega_0-\omega)]\tau}\,d\tau+\frac{U_0^4}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-[2c+j(\omega_0+\omega)]\tau}\,d\tau$$

odnosno

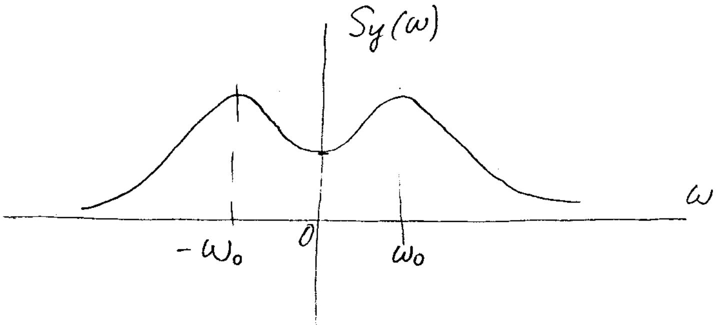
$$S_y(\omega)=\frac{U_0^4}{4}\left[\frac{1}{2c+j(\omega_0-\omega)}+\frac{1}{2c-j(\omega_0+\omega)}+\frac{1}{2c-j(\omega_0-\omega)}+\frac{1}{2c+j(\omega_0+\omega)}\right]$$

Nakon sređivanja:

$$S_y(\omega)=\frac{U_0^4}{4}\left[\frac{4c}{4c^2+(\omega_0+\omega)^2}+\frac{4c}{4c^2+(\omega_0-\omega)^2}\right]$$

kada je $\omega_0=2c$

$$S_y(\omega)=\frac{U_0^4}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(\omega_0-\omega)^2}+\frac{\omega_0}{\omega_0^2+(\omega_0+\omega)^2}\right)$$



minimum za $\omega=0$ $\quad \omega\to\pm\infty$

maksimumi $\omega=\pm\sqrt{-2+\sqrt{8}}\cdot\omega_0=\pm 0.91\omega$

II NAČIN

$$S_x(f) = \frac{4U_0^2 c}{(2c)^2 + (2\pi f)^2}$$

$$R_s(\tau) = \frac{U_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

$$S_s(f) = \frac{U_0^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{U_0^2}{4} \delta(f + f_0)$$

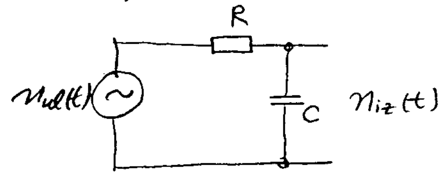
KONVOLUCIJA

$$S_y(f) = S_x(f) \circledast S_y(f) = \frac{U_0^2}{4} \frac{4U_0^2 c}{(2c)^2 + [2\pi(f - f_0)]^2} + \frac{U_0^2}{4} \frac{4U_0^2 c}{(2c)^2 + [2\pi(f + f_0)]^2}$$

$$= \frac{U_0^4}{2} \left(\frac{2c}{(2c)^2 + [2\pi(f - f_0)]^2} + \frac{2c}{(2c)^2 + [2\pi(f + f_0)]^2} \right)$$

2 Na ulazu filtra propusnika niskih učestanosti sa slike deluje beli Gausov šum čija je spektralna gustina snage $S_{nul}(f) = \frac{1}{2} N_0, -\infty < f < \infty$

Kolika je srednja snaga šuma na izlazu filtra?



$$H(j\omega) = \frac{X_C}{R + X_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Spektralna gustina snage šuma na izlazu filtra je:

$$S_{niz}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{nul}(\omega) \qquad \left[S_{niz}(f) = |H(jf)|^2 S_{nul}(f) \right]$$

Funkcija prenosa filtra propusnika niskih učestanosti je

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}, \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

Odnosno
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_g)^2}, \quad \left[|H(jf)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_g)^2} \quad f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \right]$$

Spektralna gustina snage šuma na izlazu je:

$$S_{niz}(\omega) = \frac{\frac{1}{2} N_0}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} = \frac{1}{2} N_0 \frac{\omega_g^2}{\omega_g^2 + \omega^2} \left[= \frac{\frac{1}{2} N_0}{1 + (2\pi f RC)^2} \right]$$

Preko $\mathcal{F}^{-1}$ spektralne gustine snage dobijamo autokorelacionu funkciju na izlazu:

$$R_{niz}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_{niz}(\omega))$$

Iz tablice $\mathcal{F}$ transformacija:

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \qquad \left[e^{-|t|/\tau} \longleftrightarrow \frac{2\tau}{1 + (2\pi f \tau)^2} \right]$$

Izraz za $S_{niz}(f)$ napišimo u pogodnijoj formi

$$S_{niz}(\omega) = \frac{1}{4} N_0 \omega_g \underbrace{\frac{2\omega_g}{\omega_g^2 + \omega^2}} \qquad \left[S_{niz}(f) = \frac{2 \overset{\tau}{RC}}{1 + (2\pi f \underbrace{RC}_{\tau})^2} \cdot \frac{N_0}{4RC} \right]$$

te je:

$$R_{niz}(\tau) = \frac{N_0}{4RC} e^{-|\tau|/RC}$$

Snaga šuma na izlazu filtra je:

$$\overline{n_{iz}^2(t)} = R_{niz}(0) = \frac{N_0}{4RC}$$

$$\left[\overline{n_{iz}^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{niz}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{niz}(f)\, df \right]$$

31.03.2003

dovde 5 dvočas

3

Posmatrani komunikacioni kanal se ponaša kao filtar propusnik niskih učestanosti koji ima impulsni odziv definisan sledećom funkcijom:

$$h(t) = e^{-2\pi f_g t} u(t),$$

pri čemu je sa *u(t)* označena jedinična odskočna funkcija, dok je f_g granična učestanost filtra. Na ulazu filtra deluje slučajan proces *X(t)* čija je srednja vrednost jednaka nuli a autokorelaciona funkcija je $20\pi\delta(\tau)$. Odrediti vrednost granične učestanosti filtra tako da srednja snaga signala na izlazu komunikacionog kanala iznosi 1 mW.

REŠENJE:

Funkcija prenosa kanala je Furijeova transformacija impulsnog odziva:

$$H(jf) = \mathfrak{F}[h(t)] = \mathfrak{F}\left[e^{-2\pi f_g t} u(t)\right] = \frac{1}{2\pi f_g + j2\pi f} = \frac{(2\pi f_g)^{-1}}{1 + j(f/f_g)}. \qquad 2.1$$

Kako je autokorelaciona funkcija signala $X(t)$ na ulazu filtra:

$$R_X(\tau) = 20\pi \cdot \delta(\tau), \qquad 2.2$$

odnosno njegova spektralna gustina snage:

$$S_{\underset{X}{\cancel{Nul}}}(f) = \mathfrak{F}[R_{\underset{X}{}}(\tau)] = \mathfrak{F}[20\pi \cdot \delta(\tau)] = 20\pi, \qquad 2.3$$

to se za spektralnu gustinu snage šuma na izlazu kanala dobija:

$$S_{\underset{X}{\cancel{Niz}}}(f) = |H(jf)|^2 S_{\underset{Y}{\cancel{Nul}}}(f) = \frac{(2\pi f_g)^{-2}}{1 + (f/f_g)^2} \cdot 20\pi. \qquad 2.4$$

Imajući u vidu da je autokorelaciona funkcija inverzna Furijeova transformacija spektralne gustine snage, dobija se:

$$R_{\underset{Y}{}}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}[S_{\underset{Y}{\cancel{Niz}}}(f)] = \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{20\pi \cdot (2\pi f_g)^{-2}}{1 + (f/f_g)^2}\right] \qquad 2.5$$

$$R_{\underset{Y}{}}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}[S_{\underset{Y}{\cancel{Niz}}}(f)] = \frac{5}{f_g}\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{2\frac{1}{2\pi f_g}}{1 + \left(2\pi f \cdot \frac{1}{2\pi f_g}\right)^2}\right] \qquad 2.6$$

$$R_{\underset{Y}{}}(\tau) = \frac{5}{f_g} e^{-2\pi f_g |\tau|}. \qquad 2.7$$

Srednja snaga šuma na izlazu kanala je:

$$\overline{\underset{y^2}{\cancel{n_{iz}^2}}(t)} = R(0) = \frac{5}{f_g}, \qquad 2.8$$

a kako je $\overline{\underset{y^2}{\cancel{n_{iz}^2}}(t)} = 1$ mW za graničnu učestanosti se dobija:

$$f_g = 5 \text{ kHz}. \qquad 2.9$$