1

Kroz telekomunikacioni kanal prenose se binarni signali. Na mestu prijema logičkoj nuli odgovara 0V a logičkoj jedinici 1.2 V. U kanalu je prisutan Gausov beli šum srednje vrednosti jednake nuli a njegova ukupna snaga na prijemu je 0.2W.
Odrediti verovatnoću greške na prijemu u slučaju da je prag odlučivanja optimalno podešen. Pretpostaviti da je verovatnoća pojavljivanja nula i jedinica jednaka

S obzirom da su verovatnoće pojavljivanja 0 i 1 iste i da je funkcija gustine verovatnoće šuma simetrična (Gausova raspodela) optimalna vrednost praga detekcije je:

$$k_{opt} = \frac{s_0(t) + s_1(t)}{2} \qquad 1.1$$

$$k_{opt} = \frac{0V + 1.2V}{2} = 0,6\,V \qquad 1.2$$

Verovatnoća greške je:

$$P_\varepsilon = P_\varepsilon(1)\,P(1) + P_\varepsilon(0)\,P(0) \qquad 1.3$$

Imajući u vidu da je $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$ i da je $P_\varepsilon(1) = P_\varepsilon(0)$ dobija se:

$$P_\varepsilon = P_\varepsilon(1) = P_\varepsilon(0) \qquad 1.4$$

Verovatnoća pogrešnog prijema nule je:

$$P_\varepsilon(0) = \int_{k_{opt}}^{\infty} f_N(x)\,dx \qquad 1.5$$

Funkcija gustine verovatnoće šuma $f_N(x)$ koji podleže Gausovoj raspodeli i koji ima srednju vrednost jednaku nuli je:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_N^2}}, \qquad 1.6$$

pri čemu je, u ovom slučaju, σ_N^2 ukupna snaga šuma.
Zamenom (1.6) u (1.5) i imajući u vidu (1.4) može se pisati

$$P_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}} \int_{k_{opt}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_N^2}}\,dx \qquad (1.7)$$

Uvođenjem smene $\frac{x^2}{2\sigma_N^2} = u^2$ dobija se:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{k_{opt}}{\sqrt{2\sigma_N^2}}}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{k_{opt}}{\sqrt{2\sigma_N^2}}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{k_{opt}}{\sqrt{2\sigma_N^2}}\right)\right] \qquad (1.8)$$

Zamenom brojnih vrednosti $k_{opt} = 0.6V$ i $\sigma_N^2 = 0,2W$ u izraz (1.8) iz korišćenje tablice za izračunavanje Gausovog integrala greške, za grešku prenosa se dobija:

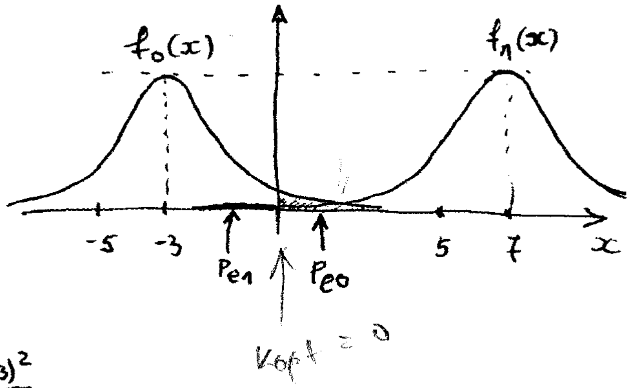
$$P_\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\overset{0,95}{0.9487}\right)\right] = \frac{1}{2}(1 - 0.82) = 0.09 \qquad (1.9)$$

$\boxed{2}$

3. *(20 poena)*
Kroz komunikacioni kanal se prenose binarni signali u osnovnom opsegu. Verovatnoća slanja binarnih signala je $P(1)=P(0)=0.5$. Na mestu prijema logičkoj nuli odgovara naponski nivo od -5 V a logičkoj jedinici napon od 5 V. U kanalu je prisutan beli Gausov šum čija je srednja vrednost 2 V i varijansa 1 V. Odrediti verovatnoću greške na prijemu. Smatrati da nivo praga odlučivanja prijemnika iznosi 0 V.

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_N} e^{-\frac{(x-\bar{n})^2}{2\sigma_N^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$\sigma_N = 1,\ \bar{n} = 2$: $\quad f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$



za "0": $\quad f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x-(\bar{n}-5)]^2}{2}}$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}$$

$$P_{e0} = \int_0^\infty f_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} dx, \quad \text{smena } u = \frac{x+3}{\sqrt{2}}$$

$$P_{e0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{3/\sqrt{2}}^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = 1{,}36 \cdot 10^{-3}$$

za "1": $\quad f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x-(\bar{n}+5)]^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-7)^2}{2}}$

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^0 f_1(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-7)^2}{2}} dx, \quad \text{smena } \frac{x-7}{\sqrt{2}} = u$$

$$P_{e1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-7/\sqrt{2}} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{7/\sqrt{2}}^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P_{e1} \cong \frac{1}{2} \frac{e^{-(7/\sqrt{2})^2}}{\sqrt{\pi} \cdot 7/\sqrt{2}} = 1{,}3 \cdot 10^{-12}$$

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1} = 0{,}5 \cdot 1{,}36 \cdot 10^{-3} + 0{,}5 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-12} \approx 0{,}68\ 10^{-3}$$

~~Drugo proširenje~~

G_i	P_i	x_i	l_i	$P_i l_i$
AA	0,64	0	1	0,64
AB	0,16	11	2	0,32
BA	0,16	100	3	0,48
BB	0,04	101	3	0,12

$L_2 = \sum_{i=1}^{4} P_i l_i = 1{,}56$ b/simbol^2

$\frac{L_2}{2} = 0{,}78$ b/simbol

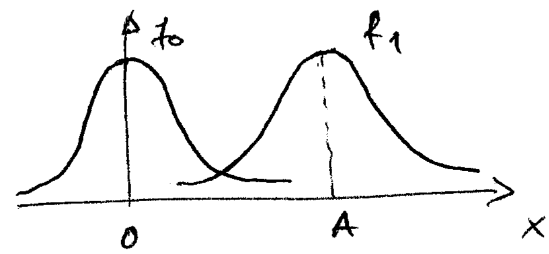
	x_i	I		II	
0,64	0	0,64	0	0,64	0
0,16	11	0,20	10	0,36	1
0,16	100	0,16	11		
0,04	101				

3 Kroz kanal sa ABGŠ šumom čija je srednja vrednost jednaka 0 i varijansa $\sigma^2 = 0{,}1$ prenosi se signal u osnovnom opsegu korišćenjem unipolarnih impulsa amplitude $A = 1$ V. Ako je verovatnoća prenosa logičke jedinice $P(1) = p = 0{,}8$, a verovatnoća prenosa logičke nule $P(0) = q = 0{,}2$, odrediti ~~optimalnu~~ ~~vre~~ optimalnu vrednost praga odlučivanja u prijemniku.

$$P_e = P(1)\,P(0|1) + P(0)\,P(1|0)$$

$$P(0|1) = \int_{-\infty}^{k} f_1(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{k} e^{-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$P(1|0) = \int_{k}^{\infty} f_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{k}^{\infty} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\,dx$$



$$\frac{dP_e}{dk} = 0$$

$$p\,\frac{dP(0|1)}{dk} + q\,\frac{dP(1|0)}{dk} = 0$$

$$p\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(k-A)^2}{2\sigma^2}} - q\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}} = 0$$

$$\frac{e^{\frac{(k-A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{\frac{k^2}{2\sigma^2}}} = \frac{p}{q}$$

$$e^{\frac{k^2 - 2Ak + A^2 - k^2}{2\sigma^2}} = \frac{p}{q}$$

$$\frac{-2Ak + A^2}{2\sigma^2} = \ln\frac{p}{q}$$

$$k = \left(A^2 - 2\sigma^2 \ln\frac{p}{q}\right) \Big/ (2A)$$

$$\boxed{k = \frac{A}{2} - \frac{\sigma^2}{A}\ln\frac{p}{q}}$$

$$k = 0{,}3614$$

$\boxed{4}$ Spektralna gustina snage šuma na ulazu integratora sa rasterećenjem, čija je funkcija prenosa data izrazom $H(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega RC}$, τ iznosi $\frac{1}{2}N_0$. Ako je srednja vrednost šuma jednaka nuli izračunati varijansu šuma na izlazu integratora.

Imajući u vidu da je $E[n(t)]=0$, varijansa šuma na izlazu filtra jednaka je ukupnoj snazi šuma na izlazu filtra. Da bi odredili ukupnu snagu šuma na izlazu filtra potrebno je odrediti spektralnu gustinu snage na izlazu. Ova snaga je data izrazom:

$$S_{ni} = |H(j\omega)|^2 S_{nu}$$

odnosno

$$S_{ni} = \frac{1}{2}N_0 |H(j\omega)|^2$$

II način

$$H(jf) = \frac{e^{+j\pi fT}-e^{-j\pi fT}}{2j}\cdot\frac{1}{\pi f \tau}e^{-j\pi fT} \quad 1$$

$$H(jf) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\cdot\frac{T}{\tau}e^{-j\pi fT}$$

$$H(jf) = \mathrm{sinc}(fT)\cdot\frac{T}{\tau}e^{-j\pi fT}$$

$$|H(jf)|^2 = \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 \mathrm{sinc}^2(fT) \quad 3$$

Polazeći od izraza:

I način

$$H(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega\tau} \quad \omega\to 2\pi f$$

uz korišćenje

$$e^{-j\omega T} = \cos\omega T - j\sin\omega T, \quad \omega = 2\pi f$$

dolazi se do:

$$|H(j\omega)|^2 = \left(\frac{T}{\tau}\right)^2\left[\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right]^2 \quad 4$$

UBACITI

$$\sigma_{Ni}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Ni}(f)\,df$$

Varijansa šuma na izlazu je:

$$\sigma_{Ni}^2 = \frac{1}{2}N_0\left(\frac{T}{\tau}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\pi T f}{\pi T f}\right)^2 df \quad 5$$

1/T

Imajući u vidu da je:

$$\boxed{\int_{0}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(x)\,dx = 1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi = \pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)^2 du = 2\pi\underbrace{\int_0^{\infty}\mathrm{sinc}^2(u)\,du}_{1/2} = \pi \quad 6$$

$x=\pi u$, $dx=\pi du$

dolazi se do:

$$\sigma_{Ni}^2 = \frac{1}{2}\frac{N_0}{\tau^2}T \quad 7$$

Ako je $\tau=RC=1$ onda je varijansa šuma na izlazu filtra

$$\sigma_{Ni}^2 = \frac{1}{2}N_0 T$$

$$H(j\omega) = \frac{1-(\cos\omega T - j\sin\omega T)}{j\omega\tau}$$

$$H(j\omega) = \frac{\sin\omega T}{\omega\tau} + j\frac{\cos\omega T - 1}{\omega\tau}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\sin^2\omega T}{(\omega\tau)^2} + \frac{(\cos\omega T-1)^2}{(\omega\tau)^2}$$

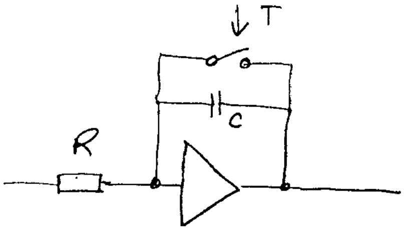
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\sin^2\omega T + \cos^2\omega T - 2\cos\omega T + 1}{(\omega\tau)^2}$$

$$|H(j\omega)|^2 = 2\,\frac{1-\cos\omega T}{(\omega\tau)^2}$$

$$|H(j\omega)|^2 = 4\,\frac{\frac{1}{2}(1-\cos(2\pi fT))}{(2\pi f\tau)^2}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\sin^2\pi fT}{(\pi f\tau)^2}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \left(\frac{T}{\tau}\right)^2\left(\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}\right)^2$$

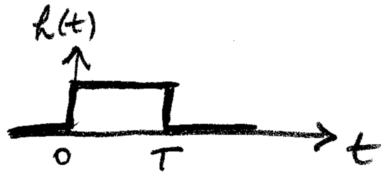


INTEGRATOR SA RASTEREĆENJEM

Integrator sa rasterećenjem

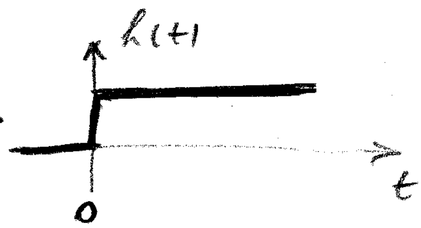
IMPULSNI ODZIV

Funkcija prenosa $H(j\omega) = \dfrac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega RC} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$



Funkcija prenosa integratora bez rasterećenja

$$H(j\omega) = \frac{X_c}{R} = \frac{1}{j\omega RC} \longleftrightarrow$$



impulsni odziv

$$H(jf) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(jf)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(jf)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

5 Digitalni podaci prenose se u osnovnom opsegu preko sistema u kome je prisutan šum spektralne gustine snage $\frac{1}{2} N_0 = \frac{1}{2} 10^{-7} \frac{W}{Hz}$. Amplituda signala na prijemu iznosi A, a pri detekciji signala koristi se optimalni filtar.

a) Ako se podaci prenose brzinom $10^3\ b/s$, i amplituda A iznosi 20 mV kolika je verovatnoća greške na prijemu?

b) Ako je amplituda $A = 2\ mV$ odrediti maksimalnu brzinu prenosa podataka v tako da greška na prijemu ostane ista kao u tački (a)

---

a)
$$P_E = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{z})$$

$$z = \frac{A^2 T}{N_0}, \quad T = \frac{1}{v} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}\ s$$

$$z = \frac{(0{,}02)^2 \cdot 10^{-3}}{10^{-7}} = 4$$

$$P_E = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(2) = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}(2)\right) = \underline{2{,}34 * 10^{-3}}$$

$\operatorname{erf}(2) = 0{,}99532$ (TABLICA)

(PRIBLIŽNI RAČUN: $P_E \approx \frac{e^{-z}}{2\sqrt{\pi z}} = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$)

b)
$$P_E = 2{,}34 \cdot 10^{-3} \Rightarrow z = 4$$

$$\frac{A^2 \cdot T}{N_0} = z \Rightarrow T = \frac{z N_0}{A^2} = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 10^{-6}} = 10^{-1}\ s \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{T} = 10\ b/s}$$

$$A^2 = (2 \cdot 10^{-3})^2 = 4 \cdot 10^{-6}$$

ZAKLJUČAK		
A ↓	10 X	P_E = const
⇒ v ↓	100 X	

$\pm \bar{x}$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{AT}{\sqrt{2\sigma_y^2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{A^2 T}{N_0}}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2} N_0 \frac{T}{\cancel{T^2}} \cdot 1 = \frac{1}{2} N_0 T$$