(Kroftov uslov) 1

1 Dati su sledeći binarni kodovi ($m=2$) za izvor sa 4 simbola ($q=4$).

S	(a)	(b)	(c)	(d)
s_1	00	0	0	10
s_2	01	100	10	01
s_3	10	110	110	100
s_4	11	111	11	011

Proveriti da li dati kodovi zadovoljavaju potreban uslov za jednoznačno dekodovanje

Opšti oblik Kroftove nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{q} m^{-l_i} \leq 1$$

Za binarne kodove i za $q=4$:

$$\sum_{i=1}^{4} 2^{-l_i} \leq 1$$

a) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ Nejednakost je zadovoljena

b) $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}+\frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ -11-

c) $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ nejednakost nije zadovoljena kod je singularan

d) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3} = 3/4 < 1$ (dati primere) — nejedn. zadovoljena ali postoji problem

c) 110 → { kodna reč 110; kodne reči 11 i 0 }

b) jednozn. dekodabilan

a) kodne reči su iste dužine i različite su

⇒ jednozn. dekod.

d) $s_3\, s_1\, s_1 \ldots = 100 | 10 | 10 | \ldots$?

⇒ 10 01 01 0 . . . .

$s_1 \quad s_2 \quad s_2 \quad s_2$

2 Odrediti entropiju diskretnog izvora informacija koji generiše listu simbola $S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Verovatnoće pojavljivanja simbola izvorne liste dati su u tablici

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4
$P(s_i)$	0.45	0,30	0.20	0.05

Po definiciji, entropija izvora informacije predstavlja statističku srednju vrednost količine informacije koju izvor emituje:

$$H(S)=\sum_i P(s_i)\,Q(s_i)=\sum_i P(s_i)\,ld\,\frac{1}{P(s_i)}$$

Zamenom brojnih vrednosti za verovatnoće pojavljivanja izvornih simbola dobija se:

$$H(S)=0.45\,ld\frac{1}{0.45}+0.30\,ld\frac{1}{0.30}+0.20\,ld\frac{1}{0.20}+0.05\,ld\frac{1}{0.05}$$

$$H(S)=1.72\ (Sh/izv.\ simb.)\ \checkmark$$

$$ld\,x=\frac{\ln x}{\ln 2}$$

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}=\frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

3 Neka je dat sledeći diskretni izvor bez memorije $(q=3)$

s_i	s_1	s_2	s_3
$P(s_i)$	1/2	1/4	1/4

Odrediti entropiju originalnog izvora i njegovog drugog proširenja

Entropija originalnog izvora $\quad H(S)=\sum_i P(s_i)\,ld\,\frac{1}{P(s_i)}$

$$H(S)=\frac{1}{2}\,ld\frac{1}{0.5}+2\cdot\frac{1}{4}\,ld\frac{1}{0.25}=1.5\left[\frac{Sh}{simb}\right]$$

$$ld\,X=\frac{\ln X}{\ln 2}$$

Novi izvor nastao drugim proširenjem originalnog izvora

$n=2$, $q=3$

broj simbola novog izvora $q^n=3^2=9$

Ovi simboli su sve moguće kombinacije od po 2 simbola originalnog izvora. Pošto izvor nema memoriju, verov. pojavljivanja novih simbola jednake su proizvodu verov. pojavlj. odgovarajućih simbola originalne liste.

$s_i\, s_j$	$s_1 s_1$	$s_1 s_2$	$s_1 s_3$	$s_2 s_1$	$s_2 s_2$	$s_2 s_3$	$s_3 s_1$	$s_3 s_2$	$s_3 s_3$
novi simbol σ_i	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9
$P(s_i, s_j)=P(s_i)\cdot P(s_j)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
$P(\sigma_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Entropija proširenog izvora je:

$$H(S^2) = 1 \cdot \frac{1}{4} ld 4 + 4 \cdot \frac{1}{8} ld 8 + 4 \frac{1}{16} ld 16$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1$$
$$= 3 \ Sh/simbol$$

$ld 2 = 1$
$ld 2^k = k\, ld 2$

Primenom jednačine
$$H(S^n) = n\, H(S),$$
dobija se
$$H(S^2) = 2 H(S)$$
$$= 2 \cdot 1.5 = 3 \ Sh/simb.$$

Kako bi izgledala lista simbola trećeg proširenja originalnog izvora
broj simbola novog izvora $q^n = 3^3 = 27$

$s_1 s_1 s_1$
$s_1 s_1 s_2$
$s_1 s_1 s_3$
$s_1 s_2 s_1$
$\vdots$

4 Nacrtati dijagram stanja binarnog Markovljevog izvora informacija drugog reda sa listom simbola $S=\{0,1\}$ i sa uslovnim verovatnoćama generisanja simbola:

$$P(0/00)=P(1/11)=1.0$$
$$P(1/00)=P(0/11)=0$$
$$P(0/01)=P(0/10)=P(1/01)=P(1/10)=0.5$$

Markovljev izvor drugog reda $(k=2)$ sa listom simbola $\{0,1\}$ $(q=2)$ ima ukupno $q^k=2^2=4$ stanja

(Ukupan broj uslovnih verovatnoća je $q^{k+1}=2^3=8$)

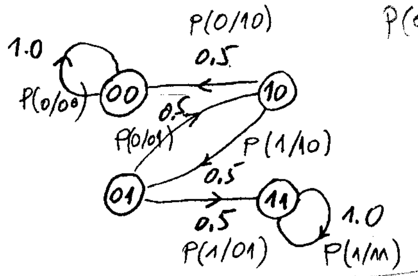
$P(00)=P(00)P(0|00)+P(10)P(0|10)$

$P(01)=P(00)P(1|00)+P(10)P(1|10)$

$P(11)=P(11)P(1|11)+P(01)P(1|01)$

$P(00)=P(00)+P(10)\,0.5$

$\boxed{P(10)=0}$ $\boxed{P(01)=0}$



$P(00)+P(01)+P(10)+P(11)=1$

$\boxed{P(00)+P(11)=1}$

sa memorijom ?

(K) ?

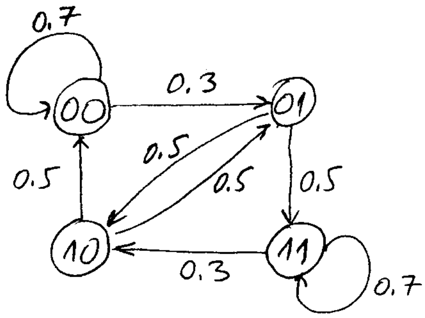
(4.) Dat je binarni izvor $(q=2)$ drugog reda $(k=2)$. Nacrtati dijagram stanja ovog Markovljevog izvora ako su uslovne verovatnoće pojavljivanja simbola

$$P(0/00)=P(1/11)=0.7$$
$$P(1/00)=P(0/11)=0.3$$
$$P(0/01)=P(0/10)=P(1/01)=P(1/10)=0.5$$

S obzirom da izvor generiše $q=2$ različitih simbola a pamti k prethodnih simbola, ukupan broj stanja izvora (broj kombinacija q simbola na k mesta sa ponavljanjem) je
$$q^k=2^2=4.$$

Iz svakog stanja može se emitovati bilo koji od q simbola, te je broj prelaznih verovatnoća
$$q\cdot q^k=q^{k+1}=2^3=8$$

Dijagram stanja



$P(00)=$ ___

(1) $P(01)-$ ___

(2) $H(S)=$?

(3) $H(S_{\text{pridruženo}})=$?

5. Diskretni izvor informacija koji generiše 4 simbola sa odgovarajućim verovatnoćama kodovan je na sledeća dva načina:

Primer koji će biti urađen na predavanjima str. 55.

a)

S	P_i	X_i
s_1	1/4	00
s_2	1/4	01
s_3	1/4	10
s_4	1/4	11

b)

S	P_i	X_i
s_1	1/2	0
s_2	1/4	10
s_3	1/8	110
s_4	1/8	111

· Izračunati entropiju izvora definisanog pod (a) i pod (b) i srednju vrednost dužine kodne reči u ova dva slučaja

Entropija izvorne liste pod (a) je

$$H_a(S) = \sum_{i=1}^{4} P(s_i)\, ld \frac{1}{P(s_i)}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{4}\, ld \frac{1}{0.25} = ld\, 4 = 2\ Sh/simb.$$

Srednji broj bita po izvornom simbolu je:

$$L_a = \sum_i P(s_i)\, l_i$$

$$= 4 \frac{1}{4} 2 = 2\ b/simb.$$

Verovatnoća pojavljivanja simbola je uniformna, svaki bit nosi max količinu informacije (1 šenon) te je broj bita po simbolu jednak entropiji izvora

Entropija izvorne liste pod (b) je:

$$H_b(S) = \frac{1}{2}\, ld \frac{1}{0.5} + \frac{1}{4}\, ld \frac{1}{0.25} + 2 \cdot \frac{1}{8}\, ld \frac{1}{0.125}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = 1.75\ Sh/simb.$$

Srednji broj bita po izvornom simbolu je:

$$L_b = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{8} 3 = 1.75\ bita/simb.$$

S obzirom da su verovat. pojavljivanja izvornih simbola pod (b) različite primenjeno je statističko kodovanje čime je ostvarena manja prosečna dužina kodne reči nego u slučaju nestatističkog kodovanja za $n=2$ kodnih znakova po kodnoj reči.

* Da nije izvršeno statističko kodovanje srednja dužina kodne reči bila bi kao pod (a) odnosno 2 bita/simb. Kako je entropija izvora 1.75 Sh/simb to bi jedan bit nosio 0.875 sh informacije.

6 Dat je binarni izvor bez memorije S opisan sledećom tabelom. Izračunati entropiju originalnog izvora i entropiju i prosečnu dužinu kodne reči drugog proširenja originalnog izvora.

S	P_i	X_i
s_1	$7/8$	0
s_2	$1/8$	1

$$H(S) = \frac{7}{8}\,ld\,\frac{1}{\frac{7}{8}} + \frac{1}{8}\,ld\,\frac{1}{\frac{1}{8}}$$

$$= \frac{7}{8}\,\frac{\ln 1.1429}{\ln 2} + \frac{1}{8}\,ld\,8$$

$$= \frac{7}{8}\cdot 0.1927 + \frac{3}{8}$$

$$= 0.1687 + 0.3750$$

$$= 0.5437 \text{ Sh/simb.}$$

$\Rightarrow$ $\bar{L} = 1$ b/simb.

Drugim proširenjem izvora dobija se:

S^2	P_i	Mogući način stat. kodovanja X_i
$s_1 s_1$	$49/64$	0
$s_1 s_2$	$7/64$	10
$s_2 s_1$	$7/64$	110
$s_2 s_2$	$1/64$	111

Entropija proširenog izvora je:

$$H(S^2) = 2H(S) = 1.0874 \text{ Sh/simb.}$$

Prosečna dužina kodne reči proširenog izvora:

$$\bar{L}_2 = \sum_{i=1}^{4} P_i\, l_i$$

$$= \frac{49}{64}\cdot 1 + \frac{7}{64}\cdot 2 + \frac{7}{64}\cdot 3 + \frac{1}{64}\cdot 3$$

$$= 0.7656 + 0.2188 + 0.3281 + 0.0469 =$$

$$\bar{L}_2 = 1.3594 \text{ b/simb } (S^2)$$

Srednji broj kodnih znakova po jednom simbolu originalne liste

$\Rightarrow$ je: $\dfrac{\bar{L}_2}{2} = \dfrac{1.3594}{2} = 0.68$ b/simb $\dfrac{L_m(X^n)}{n}$

što je znatno bliže entropiji originalnog izvora.