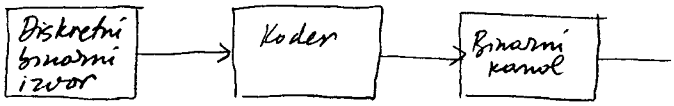
1 Posmatra se diskretan binarni izvor koji generiše dva moguća simbola A i B sa verovatnoćama $P(A)=0.9$ i $P(B)=0.1$. Brzina generisanja simbola je 3.5 simb/s. Izlaz ovog izvora povezuje se na binarni kanal koji prenosi binarne simbole brzinom 2 simbola/s sa zanemarivom greškom (Slika 1.)
Pokazati da je primenom statističkog kodovanja na prošireni izvor moguć prenos kroz dati kanal.



$V(S)=3.5$ simb/s $C = 2b/s$

Kapacitet kanala je 2 simbola/s odnosno 2 bita/s jer nema grešaka u prenosu (Ovo će kasnije na predavanjima biti analizirano)
Očigledno je da je brzina odašiljanja veća od kapaciteta kanala. Dakle, ne može se izvor direktno povezati na kanal. Moramo koristiti koder.

Koliki je informacioni fluks (informaciona brzina odašiljanja)

$$\phi(S) = H(S)\cdot V(S)\left[\frac{Sh}{simb}\cdot\frac{simb}{s} = \frac{Sh}{s}\right] \qquad \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Entropija binarnog izvora je:

$$H(S) = -(\alpha\, ld\, \alpha + (1-\alpha)\, ld(1-\alpha)) \quad [Sh/bit]$$

pri čemu je $\alpha = P(\text{"A"})$.

$$H(S) = -[0.9\, ld\, 0.9 + 0.1\, ld\, 0.1] =$$
$$= 0.1368 + 0.3322$$
$$= 0.469 \; Sh/bit \quad \text{ovde} \equiv \text{simb.} \quad (Sh/simb.)$$

teoretska granica pros. dužine kodne reči origin. izvora.

Informaciona brzina izvora je

brzina odašilj.

$$\phi(S) = 0.469\, \frac{Sh}{bit} \cdot 3.5\, \frac{bit}{s} = 1.642\; Sh/s$$

S obzirom da se radi o binarnom izvoru može se pisati

$$\phi(S) = 1.642\; bit/s$$

$\Rightarrow$ (ako bi 1 bit prenosio 1 shanon) onda bi

S obzirom da je informaciona brzina manja od kapaciteta kanala, prenos je moguć. Potrebno je koristiti statističko kodovanje.

kom je potrebno kodovati pri čemu se kodne reči pridružuju grupama simbola izvora. Najkraća kodna reč se pridružuje grupi simbola čija je verovatnoća najveća a najduža kodna reč se pridružuje grupi simbola čija je verovatnoća najmanja. Na taj način, kodovanjem se smanjuje prosečna brzina odašiljanja simbola, čime se omogućuje povezivanje izvora na kanal

Tabela 1 prikazuje proširenje 1.-reda

Simboli izvora	Verovatnoća simbola $P(s_i)$	Kodna reč	l_i	$P(s_i)\,l_i$
A	0.9	0	1	0.9
B	0.1	1	1	0.1
				$\bar{L} = 1.0$

broj kodnih znakova po jednom originalnog simbolu izvora

$$\frac{\bar{L}}{n} = \frac{1.0}{1} = 1.0$$

Kao što se vidi, brzina odašiljanja proširenog izvora 1. reda ista je kao i originalnog tj. brzina simbola na ulazu veća je od kapaciteta kanala te prenos nije moguć

Tabela 2. Proširenje 2. reda

Simboli izvora	Verovatnoća simbola $P(s_i)$	Kodna reč	l_i	$P(s_i)\,l_i$
AA	0.81	0	1	0.81
AB	0.09	10	2	0.18
BA	0.09	110	3	0.27
BB	0.01	111	3	0.03

Prosečna dužina kodne reči $\bar{L} = \sum_{i=1}^{2^n} P(s_i)\,l_i = 1.29$ $\frac{b}{\text{simbol }(S^2)}$

Broj kodnih znakova po jednom simbolu originalnog izvora

$\frac{L(X^n)}{n}$

$$\frac{\bar{L}}{n} = \frac{1.29}{2} = 0.645 \text{ kodn. znakova / simbol. izvora}$$

b/simbol

← broj kodnih znak. po simbolu originalnog liste.

Brzina simbola na izlazu kodera

b/s

$$V(S)\cdot\frac{\bar{L}}{n} = 3.5 \cdot 0.645 = 2.258 \text{ kodnih znakova / sec.}$$

Brzina simbola je redukovana, ali ni ovu vrednost kanal ne može da prihvati.

Treće proširenje izvora prikazano je tabelom 3.

- Tabela 3 treće proširenje

Simboli izvora	Verov. simbola	Kodne reči	l_i	$P(s_i) l_i$
AAA	0.729	0	1	0.729
AAB	0.081	100	3	0.243
ABA	0.081	101	3	0.243
BAA	0.081	110	3	0.243
ABB	0.009	11100	5	0.045
BAB	0.009	11101	5	0.045
BBA	0.009	11110	5	0.045
BBB	0.001	11111	5	0.005

Srednja dužina kodne reči

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{2^3} P(s_i) l_i = 1.598 \quad \frac{b}{\text{simbol}(S^3)}$$

Broj kodnih znakova po jednom simbolu originalnog izvora:

$$\frac{\bar{L}}{n} = \frac{1.598}{3} = 0.533 \text{ kodni znak / simbol izvora} \quad \frac{b}{\text{simbol}}$$

Brzina odašiljanja simbola na izlazu kodera

$$v\frac{\bar{L}}{n} = 3.5 \cdot 0.533 = 1.864 \text{ kodni znak / sec.} \quad b/s$$

Ova brzina je prihvatljiva za kanal te je prenos moguć preko proširenja izvora trećeg reda.

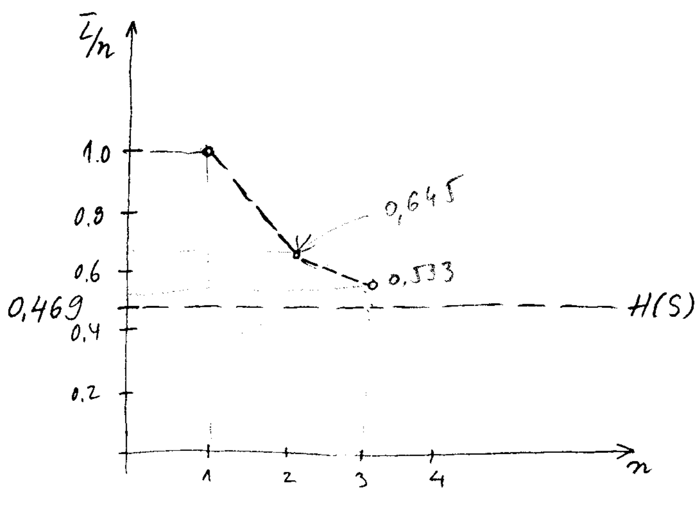
Kodovanjem nad 3-ćim proširenjem izvora broj kodnih znakova po izvornom simbolu je $\frac{\bar{L}}{n} = 0,533$.

Srednja dužina kodne reči smanjena je za 1 na 0,533 $\frac{\text{Kod. znak}}{\text{simbolu}}$

Međutim, umesto za $q=2$ simbola sada se operiše za $q^n = 2^3 = 8$ poruka

\+ proces je usporen jer je vreme dekodovanja proporcionalno dužini proširenih simbola.

Zavisnost $\bar{L}/n$ od n dato je na slici 2. O metodu izbora kodnih reči biće reči docnije



2 Korišćenjem Shannon-Fanoovog postupka izvršiti kodovanje simbola izvora čija je lista sa odgovarajućim verovatnoćama pojavljivanja data sledećom tabelom

Izvorna lista / lista kodnih reči

s_i	$P(s_i)$	1. podela	2. podela	3. podela	4. pod.	5. pod.	X_i
s_1	0.729	0					0
s_2	0.081	1	0	0			1 0 0
s_3	0.081	1	0	1			1 0 1
s_4	0.081	1	1	0			1 1 0
s_5	0.009	1	1	1	0	0	1 1 1 0 0
s_6	0.009	1	1	1	0	1	1 1 1 0 1
s_7	0.009	1	1	1	1	0	1 1 1 1 0
s_8	0.001	1	1	1	1	1	1 1 1 1 1

$H(S) = 1,407 \ \frac{Sh}{\text{simbol}}$

$L = 1,598 \ \frac{b}{\text{simbol}}$

$\eta = 88\,\%$

$\rho = \frac{3}{1,598} = 1,88$

Isti tekst kao i u (9) + izrač. koefic. kompresije i koefic. efikasnosti kodovanja

3

Simboli izvora s_i	Verovatnoće $P(s_i)$	I	II	III	IV	Kodne reči	$P_i l_i$
s_1	0.2500	0	0			00	0.5
s_2	0.2500	0	1			01	0.5
s_3	0.1250	1	0	0		100	0.375
s_4	0.1250	1	0	1		101	0.375
s_5	0.0625	1	1	0	0	1100	0.25
s_6	0.0625	1	1	0	1	1101	0.25
s_7	0.0625	1	1	1	0	1110	0.25
s_8	0.0625	1	1	1	1	1111	0.25
						$\bar{l}$	2.75

Koeficijent kompresije

$$\rho = \frac{\lceil ld\, q \rceil}{\sum P(s_i)\, l(s_i)}$$

broj bita kod nestatističkog kodovanja

prosečna dužina kodne reči

$q = 8 \quad ld\, q = 3$ bita/simb.

$\bar{l} = \sum P(s_i)\, l(s_i) = 2.75$ bita/simb.

$$\rho = \frac{3}{2.75} \cong 1.1$$

Koeficijent efikasnosti kodovanja

$$\eta = \frac{H(S)}{\bar{l}}$$

entropija – min broj kodnih znakova po izvornom simbolu

$$H(S) = \sum_i P(s_i)\, ld \frac{1}{P(s_i)} = 2 \cdot \frac{1}{4}\, ld\, 4 + 2 \cdot \frac{1}{8}\, ld\, 8 + 4 \cdot \frac{1}{16}\, ld\, 16$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{8}\, 3 + 4\, \frac{1}{16} \cdot 4$$

1 Sh = 1 bit komp. kod.

$$= 1 + \frac{6}{8} + 1 = 2.75 \ \text{bita/simb.}$$

$$\eta = \frac{2.75}{2.75} = 1 \qquad (100\,\%)$$

4 ~~5~~ Primenom Huffmanovog postupka izvršiti statističko kodovanje izvora sa listom simbola S i verovatnoćama pojavljivanja simbola $P(s_i)$

a)

S	$P(s_i)$	X_i	1. redukc	X_i	2. redukc	X_i	3 redukc	X_i	4 redukc	X_i
s_1	0.65	0	0.65	0	0,65	0	0.65	0	0.65	0
s_2	0.15	11	0.15	11	0.15	11	0.20	10	0.35	1
s_3	0.08	101	0.08	101	0.12	100	0.15	11		
s_4	0.05	1001	0.07	1000	0.08	101				
s_5	0.04	10000	0.05	1001						
s_6	0.03	10001								

b)

s_i	S: $P(s_i)$	X_i	S_1: $P(s_i)$	X_i	S_2: $P(s_i)$	X_i	S_3: $P(s_i)$	X_i	S_4: $P(s_i)$	X_i
s_1	0.28	01	0.28	01	0.28	01	0.28	01	0.31	00
s_2	0.18	11	0.18	11	0.18	11	0.23	10	0.28	01
s_3	0.15	001	0.15	001	0.16	000	0.18	11	0.23	10
s_4	0.13	100	0.13	100	0.15	001	0.16	000	0.18	11
s_5	0.10	101	0.10	101	0.13	100	0.15	001		
s_6	0.07	0001	0.09	0000	0.10	101				
s_7	0.05	00000	0.07	0001						
s_8	0.04	00001								

S_5: $P(s_i)$	X_i	S_6: $P(s_i)$	X_i
0.41	1	0.59	0
0.31	00	0.41	1
0.28	01		

5

Hafmenov postupak – primer 2

* **Izvršiti Hafmenovo kodovanje simbola iz zadate liste ako se novodobijeni simbol pri redukciji uvek stavlja na poslednje mesto u skupu jednakih verovatnoća ili se stavlja proizvoljno.**

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
$P(s_i)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.07	0.03

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0
s_2	0.2	11	s_2	0.2	11	s_2	0.2	11	$s_3s_4s_5s_6$	0.3*	10	$s_2s_3s_4s_5s_6$	0.5*	1
s_3	0.1	101	s_3	0.1	101	$s_4s_5s_6$	**0.2***	100	s_2	0.2	11			
s_4	0.1	1000	s_4	**0.1**	1000	s_3	**0.1**	101						
s_5	**0.07**	10010	s_5s_6	**0.1***	1001									
s_6	**0.03**	10011												

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0
s_2	0.2	11	s_2	0.2	11	s_2	0.2	11	$s_3s_4s_5s_6$	**0.3***	10	$s_2s_3s_4s_5s_6$	0.5*	1
s_3	0.1	1000	s_5s_6	0.1*	101	s_3s_4	**0.2***	100	s_2	**0.2**	11			
s_4	0.1	1001	s_3	**0.1**	1000	s_5s_6	**0.1**	101						
s_5	**0.07**	1010	s_4	**0.1**	1001									
s_6	**0.03**	1011												

Srednja dužina kodne reči, efikasnost – primer 2

* **Srednja dužina kodne reči:**

$$L_{sr} = 0.5*1 + 0.2*2 + 0.1*3 + 0.1*4 + 0.07*5 + 0.03*5 = 2.1 \; [b/s]$$

* **Entropija izvora**

$$H(s) = \sum_{i=1}^{6} P(s_i) ld \frac{1}{P(s_i)} = 2.0502 \; [Sh/simb]$$

* **Efikasnost**

$$\eta = \frac{H(s)}{Lsr} \cdot 100\% = 97.63\%$$