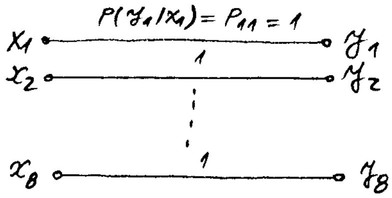
1. Odrediti kapacitet kanala bez šuma koji je predstavljen na slici:



Kapacitet kanala definiše se kao maksimalna vrednost transinformacije:

$$C_s=\max I(X,Y)$$

Polazeći od izraza za transinformaciju

$$I(X,Y)=H(X)-H(X|Y)$$

Prosečna neizvesnost

$$H(X|Y)=\sum_i\sum_j P(x_i,y_j)\log\frac{1}{P(x_i|y_j)}$$

Za kanal bez šuma sve združene i uslovne verovatnoće su jednake 0 osim ako je $i=j$. Za $i=j$ $P(x_i|y_j)=1$. Prema tome, za kanal bez šuma $H(X|Y)=0$, te je:

$$I(X,Y)=H(X).$$

Entropija izvora je:

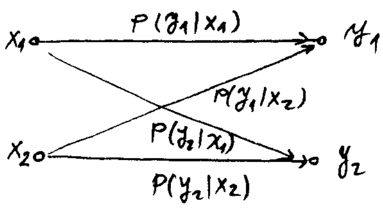
$$H(X)=\sum_i P(x_i)\log_2\frac{1}{P(x_i)}$$

Entropija izvora je najveća ako su verovatnoće simbola iste,

$$C_s=\max I(X,Y)=\max H(X)$$
$$=n\frac{1}{n}\,ld\,n$$
$$=ld\,n=ld\,8=ld\,2^3=3$$

$$C_s=3\ \text{Sh/simb.}$$

2. Odrediti kapacitet binarno simetričnog kanala sa slike (BSC)



$P(x_1)=\alpha$
$P(x_2)=1-\alpha$
$P(y_1|x_2)=P(y_2|x_1)=q$
$P(y_1|x_1)=P(y_2|x_2)=1-q=p$

Kapacitet ovog za praksu važnog kanala odredićemo tražeći max transinformacije:

$$I(X,Y)=H(Y)-H(Y|X),\quad \text{ili}\quad I(X,Y)=H(X)-H(X|Y)$$

(izbor odgovarajućeg izraza za $I(X,Y)$ može dosta da olakša rešavanje zadatka)

pri čemu je:

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}P(x_i,y_j)\,ld\,\frac{1}{P(y_j|x_i)}$$

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}P(x_i)P(y_j|x_i)\,ld\frac{1}{P(y_j|x_i)}$$

$$H(Y|X)=P(x_1)P(y_1|x_1)\,ld\frac{1}{P(y_1|x_1)}+P(x_1)P(y_2|x_1)\,ld\frac{1}{P(y_2|x_1)}$$
$$+P(x_2)P(y_1|x_2)\,ld\frac{1}{P(y_1|x_2)}+P(x_2)P(y_2|x_2)\,ld\frac{1}{P(y_2|x_2)}$$

Zamenom vrednosti za verovatnoće simbola izvora i uslovne (prelazne) verovatnoće, dobija se:

$$H(Y|X)=\alpha p\,ld\frac{1}{p}+\alpha q\,ld\frac{1}{q}+(1-\alpha)q\,ld\frac{1}{q}+(1-\alpha)p\,ld\frac{1}{p}$$
$$H(Y|X)=p\,ld\frac{1}{p}+q\,ld\frac{1}{q}$$

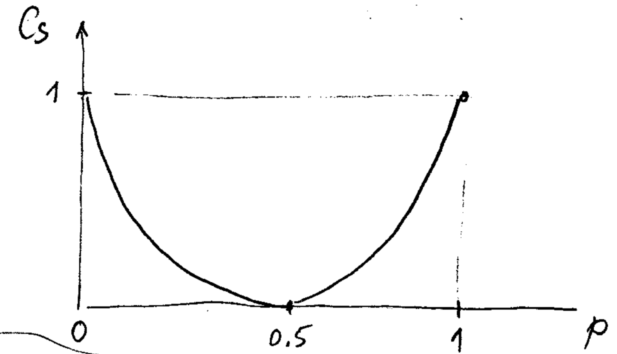
Sada je transinformacija:

$$I(X,Y)=H(Y)+p\cdot ldp+q\cdot ld\,q\ ,$$

ona ima max vrednost kada je $H(Y)$ maksimalno

$H(Y)$ je max kada je $P(y_1)=P(y_2)=\frac{1}{2}$. (Za BSC ovaj uslov je zadovoljen ako je $P(x_1)=P(x_2)=\frac{1}{2}$). Tada je $H(Y)=1$ te je kapacitet kanala

$$C_s=1+p\,ld\,p+q\,ld\,q \qquad q=1-p$$



$C_s=C_{s\,max}$ za $p=0$ i $p=1$

ako je $p=1$ prenos bez greške

ako je $p=0$ preno je takođe bez greške, samo u prijemu treba obrnut. logiku pri dekodovanju

$P(y_1)=P(y_2)=1/2$

$P(x_1)=?$

$P(x_2)=?$ DOKAZ

$$P(y_1)=P(x_1)P(y_1|x_1)+P(x_2)P(y_1|x_2)$$

$$\frac{1}{2}=\alpha\cdot p+(1-\alpha)q$$

$$\frac{1}{2}=\alpha p+(1-\alpha)(1-p)$$

$$\frac{1}{2}=\alpha(2p-1)+1-p$$

$$\alpha=\frac{p-1/2}{2(p-1/2)}=\frac{1}{2}$$

$$1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

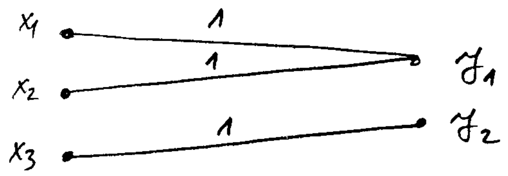
3. Prenosni kanal opisan je sledećom matricom

$$[P(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(Y|X) \doteq \begin{array}{c|c} & y_1 \quad \cdots \quad y_r \\ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array} & \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & \cdots & P(y_r|x_1) \\ \vdots & \cdots P(y_j|x_i) \cdots & \\ P(y_1|x_m) & \cdots & P(y_r|x_m) \end{bmatrix} \end{array}$$

Odrediti kapacitet kanala i verovatnoću simbola izvora za taj kapacitet.

Dijagram kanala



$P(y_1|x_1) = 1 \qquad P(y_2|x_1) = 0$

$P(y_1|x_2) = 1 \qquad P(y_2|x_2) = 0$

$P(y_1|x_3) = 0 \qquad P(y_2|x_3) = 1$

$$H(Y/X) = P_1 P_{11} ld \frac{1}{P_{11}} + P_1 P_{21} ld \frac{1}{P_{21}} + P_2 P_{12} ld \frac{1}{P_{12}} + P_2 P_{22} ld \frac{1}{P_{22}} + P_3 P_{13} ld \frac{1}{P_{13}} + P_3 P_{23} ld \frac{1}{P_{23}}$$

Transinformacija je:

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)$$

$$H(Y/X) = \sum_i \sum_j P(x_i, y_j)\, ld \frac{1}{P(y_j|x_i)}$$

$$= \sum_i \sum_j P(x_i) P(y_j|x_i)\, ld \frac{1}{P(y_j|x_i)}$$

$P(x_i) = P_i$

$P(y_j/x_i) = P_{ji}$

S obzirom da su svi članovi zbira 0, to je i zbir

$$H(Y/X) = 0$$

Kapacitet kanala je

$$C = max\, I(X,Y) = max\, H(Y)$$

$$C = 1 \text{ Sh/simbol}$$

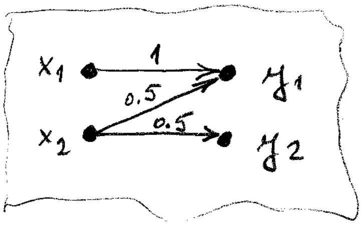
Ovaj kapacitet postiže se ako je $P(y_1) = P(y_2) = 1/2$

Da bi bilo $P(y_1) = \frac{1}{2}$ i $P(y_2) = \frac{1}{2}$

Potrebno je $P(x_1) + P(x_2) = \frac{1}{2}$ i $P(x_3) = \frac{1}{2}$

SEPTEMBAR 2004

4 Odrediti raspodelu verovatnoća pojavljivanja binarnih simbola na ulazu komunikacionog kanala sa slike pri kojoj je kapacitet ovog kanala maksimalan. Koliko iznosi kapacitet kanala sa slike?



REŠENJE:

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} P(x_i)P(y_j|x_i)\, ld\frac{1}{P(y_j|x_i)}$$

za $P(x_1)=\alpha$; $P(x_2) = 1-\alpha$ **je:**

$$H(Y|X) = 0 + 0 + (1-\alpha)\tfrac{1}{2}\, ld\, 2 + (1-\alpha)\tfrac{1}{2}\, ld\, 2$$

$H(Y|X) = 1-\alpha$ $\leftarrow$ ZAVISI OD α !?!

$$P(y_1) = P(x_1)P(y_1|x_1) + P(x_2)P(y_1|x_2)$$

$$P(y_1) = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha)\tfrac{1}{2}$$

$$P(y_1) = \frac{1+\alpha}{2}$$

$$P(y_2) = P(x_1)P(y_2|x_1) + P(x_2)P(y_2|x_2)$$

$$P(y_2) = 0 + (1-\alpha)\tfrac{1}{2}$$

$$P(y_2) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{2} P(y_j)\, ld\frac{1}{P(y_j)} = -\frac{1+\alpha}{2}\, ld\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{2}\, ld\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I(X,Y) = -\frac{1+\alpha}{2}\, ld\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{2}\, ld\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) - (1-\alpha)$$

$$C_S = \max_{\alpha}\{I(X,Y)\} \Rightarrow \frac{\partial I(X,Y)}{\partial\alpha} = 0$$

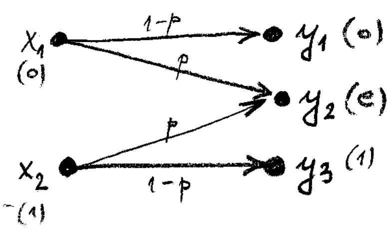
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[-\frac{1+\alpha}{2}\,\frac{\ln\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\ln 2} - \frac{1-\alpha}{2}\,\frac{\ln\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\ln 2} - 1 + \alpha\right] = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}\, ld\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 3/5 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P(x_1) = \alpha = 3/5 \\ P(x_2) = 1-\alpha = \frac{2}{5} \end{array}}$$

$$C_S = I(\alpha = 3/5) = 0{,}3219 \text{ Sh/Simbol}.$$

4/a

5 Na slici je prikazan binarni kanal sa brisanjem. Odrediti kapacitet kanala i verovatnoće ulaznih simbola koje odgovaraju određenom kapacitetu.



Rešenje:

$$C_s = \max_{\alpha} \{ I(x,y) \}, \qquad \alpha = P(x_0), \quad 1-\alpha = P(x_1)$$

$$I(x,y) = H(y) - H(y|x)$$

$$H(y|x) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} P(x_i) P(y_j|x_i) \underbrace{}_{ld\frac{1}{P(y_j|x_i)}} = \alpha\left[(1-p)\,ld\frac{1}{1-p} + p\,ld\frac{1}{p} + 0\right] + (1-\alpha)\left[0 + p\,ld\frac{1}{p} + (1-p)\,ld\frac{1}{1-p}\right]$$

$$H(y|x) = p\,ld\frac{1}{p} + (1-p)\,ld\frac{1}{1-p} = const$$

$$\max\{I(x,y)\} = \max\{H(y)\} - H(y|x)$$

Međutim, $\max\{H(y)\} \neq 3\cdot\frac{1}{3}\,ld\frac{1}{1/3} = ld\,3$ jer je:

$$P(y_1) = (1-p)P(x_1) = \alpha(1-p)$$
$$P(y_2) = p\,P(x_1) + p\,P(x_2) = p = const \;!!!$$
$$P(y_3) = (1-p)P(x_2) = (1-\alpha)(1-p)$$

te u opštem slučaju ne važi uslov: $P(y_1) = P(y_2) = P(y_3) = 1/3$ (Jedini izuzetak je ako je $p = 1/3$).

$$I(x,y) = H(y) - H(y|x) = \sum_{j=1}^{3} P(y_j)\,ld\frac{1}{P(y_j)} - H(y|x)$$

$$I(x,y) = \left[\alpha(1-p)\,ld\frac{1}{\alpha(1-p)} + \cancel{p\,ld\frac{1}{p}} + (1-p)(1-\alpha)\,ld\frac{1}{(1-p)(1-\alpha)}\right] - \left[\cancel{p\,ld\frac{1}{p}} + (1-p)\,ld\frac{1}{1-p}\right]$$

$$I(x,y) = -\alpha(1-p)\left[ld\,\alpha + ld(1-p)\right] - (1-p)(1-\alpha)\left[ld(1-p) + ld(1-\alpha)\right] + (1-p)\,ld(1-p)$$

$$I(x,y) = -(1-p)\left[\alpha\,ld\,\alpha + (1-\alpha)\,ld(1-\alpha)\right]$$

$$I(x,y) = (1-p)\,H(x)$$

$$C_s = \max_{\alpha}\{I(x,y)\} = (1-p)\,\max_{\alpha}\{H(x)\} = 1-p$$

pri čemu je:

$$\alpha = 1/2 \quad \text{tj.} \quad P(x_1) = P(x_2) = 1/2, \; i$$

$$P(y_1) = P(y_3) = \frac{1}{2}(1-p), \quad P(y_2) = p$$

$\boxed{6}$ Izračunati maksimalni kapacitet telefonskog kanala čiji je frekven-cijski opseg $f_g = 3.1$ kHz (0.3 kHz do 3.4 kHz). Smatrati da je odnos signal-šum u kanalu 40 dB.

Maksimalni kapacitet telefonskog kanala je:

$$C = f_g \cdot ld\left(1 + \frac{\overline{x^2}}{\overline{n^2}}\right)$$

gde je f_g propusni opseg a $\frac{\overline{x^2}}{\overline{n^2}}$ odnos snage signala i šuma

Kako je

$$40\,dB = 10 \log \frac{\overline{x^2}}{\overline{n^2}}$$

to je $\frac{\overline{x^2}}{\overline{n^2}} = 10^4 = 10.000$.

Kapacitet opisanog telefonskog kanala je:

$$C = 3.100 \cdot ld\left(1 + 10^4\right)$$

$$C = 3.100 \cdot 4 \cdot \frac{\ln 10}{\ln 2} = 3.100 \cdot 4 \cdot \frac{2.3}{0.7} \qquad \ln 2 = 0.7$$

$$C = 40.743 \ b/s$$