

① Izvršiti konstrukciju Hamingovog (7,4) koda.

①

a) Za dve proizvoljno odabrane ~~4-bitne~~ informacione reči odrediti kodne reči
 (odgovoraj's ec)

b) Za jednu od kodnih reči odredenu u tački (a) odrediti sindrom molimo pri prenosu nijedno do greške, molimo je došlo do greške na jednom i na 2 bita

c) Odrediti ~~matricu~~ generisuću (G) i kontrolnu matricu (H)

Rešenje

a)

pozicija	z_3	z_2	z_1	
1	0	0	①	z_1
2	0	①	0	z_2
3	0	1	1	i_1
4	①	0	0	z_3
5	1	0	1	i_2
6	1	1	0	i_3
7	1	1	1	i_4

INFORMACIONA REČ			
i_1	i_2	i_3	i_4
0	0	0	0
0	0	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	1	0
1	1	1	1

$2^4 = 16$

KODNA REČ						
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
z_1	z_2	i_1	z_3	i_2	i_3	i_4

$$z_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7$$

$$z_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = i_1 + i_3 + i_4$$

$$z_3 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = i_2 + i_3 + i_4$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & 1 & z_3 & 0 & 1 & 0 \\ z_1 & z_2 & 1 & z_3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$z_2 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$z_3 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & 1 & z_3 & 0 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 & z_3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$z_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

$$z_3 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

b) Za $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

došlo je do greške na 5. bitu $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

PRIMENJENA REČ: $Y = X \oplus E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$Y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6 \ y_7] \Rightarrow S_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \text{ (LSB)}$$

$$S_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$S_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \text{ (MSB)}$$

$S = 110_2 = 6 \Rightarrow$ greške na 6. bitu $\Rightarrow \hat{X} = [01110011]$ (2)
 $\hat{I} = [1011]$ ✓

⊕ greške na 6. i 7. bitu $\Rightarrow E = [0000011]$

$Y = X + E = [011000011] \Rightarrow$
 $S_1 = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$
 $S_2 = 1 + 1 + 0 + 0 = 0$
 $S_3 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$
 $S = 001 = 1$

$\hat{X} = [1110000] \Rightarrow \hat{I} = [1000]$ POGREŠNO!
 ↑ ↑ ↑
 3. GREŠKE!
 ↑
 1. GREŠKA

c)

$X = I G$

$[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7] = [i_1 i_2 i_3 i_4] \cdot G$
 $n = 7, k = 4$

1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1

$x_1 = z_1 = i_1 + i_2 + i_4$
 $x_2 = z_2 = i_1 + i_3 + i_4$
 $x_3 = i_1$
 $x_4 = z_3 = i_2 + i_3 + i_4$

$x_5 = i_2$
 $x_6 = i_3$
 $x_7 = i_4$

$GH^T = 0$

$S = [s_1 s_2 s_3] = Y \cdot H^T = [y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 y_7] \cdot H^T$
 $z = 3, n = 7$

$s_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7$
 $s_2 = y_2 + y_3 + y_6 + y_7$
 $s_3 = y_4 + y_5 + y_6 + y_7$

1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	1	1
1	1	1

H^T

$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$

2) Za Hammingov (7,4) kod konstruisati odgovarajući sistematski kod.

3

a) Odrediti matrice G i H sistematskog koda

b) Odrediti sve kodne reči

c) Za proizvoljno odabrani kodnu reč \vec{v} odrediti sindrom i pokazati kako se vrši korekcija greške

kod nije je pri prenosu došlo do greške na jednom bitu

d) Nacrtati spektar sistematskog (7,4) koda koliku grešaka može da koriguje, a koliku da detektuje kod (7,4) kod.

Rešenje:

a) $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 $x_1 x_2 x_3 x_4 z_1 z_2 z_3$

NESISTEMATSKI

PREDNOST: SINDROM UKAZUJE NA GREŠKU DIREKTNO

$G_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 $x_1 x_2 x_3 x_4 z_1 z_2 z_3$

SISTEMATSKI

PREDNOST: INFO BITI SU IZDVOJENI PA JE LAKO DEKODOVATI

b) $X = I G = \begin{bmatrix} 0000 \\ 0001 \\ 0010 \\ 0011 \\ 0100 \\ 0101 \\ 0110 \\ 0111 \\ 1000 \\ 1001 \\ 1010 \\ 1011 \\ 1100 \\ 1101 \\ 1110 \\ 1111 \end{bmatrix}$

↑
SVE INFO

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

↑
I

$\begin{bmatrix} 0000 & 0000 & \rightarrow 0 \\ 0001 & 1111 & \rightarrow 4 \\ 0010 & 0111 & \rightarrow 3 \\ 0011 & 1000 & \rightarrow 3 \\ 0100 & 1011 & \rightarrow 3 \\ 0101 & 0110 & -3 \\ 0110 & 1100 & -4 \\ 0111 & 0011 & -4 \\ 1000 & 1100 & -3 \\ 1001 & 0011 & -2 \\ 1010 & 1011 & -4 \\ 1011 & 0110 & -4 \\ 1100 & 0111 & -4 \\ 1101 & 1000 & -4 \\ 1110 & 0000 & -3 \\ 1111 & 1111 & -7 \end{bmatrix}$

↑
SVE KODNE

8 c) $X = I \cdot G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{I_k} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_P$

$$H_S = \left[P^T \mid I_{m-k} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$k=4, n=7$
 $m=n-k=3$

$$S = [s_1 s_2 s_3] = Y H_S^T =$$

⊗ $E = [0000000]$ — keine Fehler $\Rightarrow Y = X$

$$S = [0001111] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [000]$$

⊗ $E = [1000000] \Rightarrow Y = X + E = [1001111]$

$$S = \cancel{E} \cdot Y H_S^T = [1001111] \cdot H_S = [110] \Rightarrow S^T = \text{Prva kolona } H_S$$

⊗ $E = [0100000] \Rightarrow Y = X + E = [0101111]$

$$S = Y H_S^T = [101] \Rightarrow S^T = 2. \text{ kol. } H_S$$

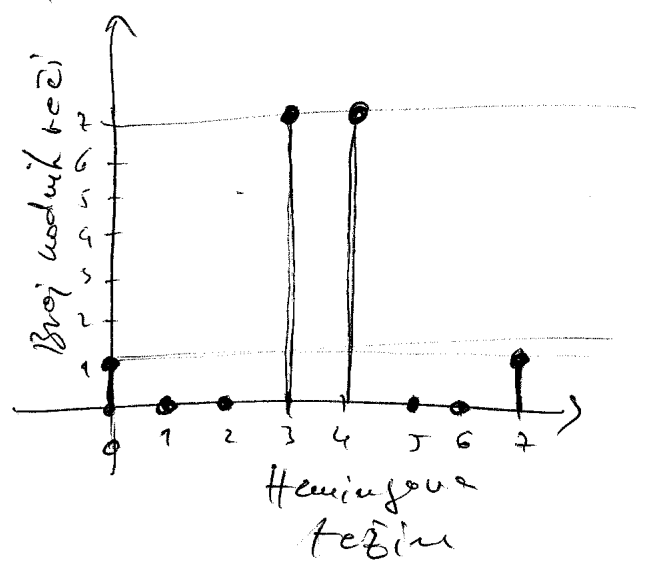
⋮

⊗ $E = [0000001] \Rightarrow Y = X + E = [0001110]$

$$S = Y H_S^T = [001] \Rightarrow S^T = 7. \text{ kol. } H_S$$

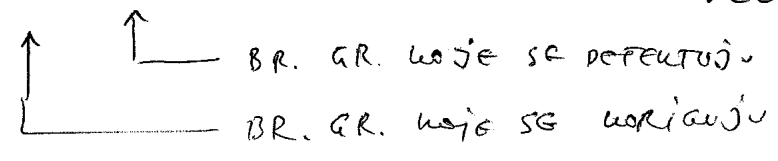
d) ~~težina~~ Hemingova težina

- 0 - 1 već
- 1 - nula
- 2 - 11 -
- 3 - 7 veći
- 4 - 7 veći
- 5 - } nula
- 6 - }
- 7 - 1 već



$3 = d_{min}$ - min razlika između kodnih reči

$$d_{min} \geq e_c + e_d + 1$$



* Samo korekcija \Rightarrow detekcija nije potrebna
 međutim da bi se koristile neophodno je da se
 detektuju $e_c = e_d$

$$d_{min} \geq 2e_c + 1 \Rightarrow 3 \geq 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow e_c = 1$$

* Samo detekcija \Rightarrow za detekciju korekcije
 nije neophodno $e_c = 0$

$$d_{min} \geq e_d + 1 \Rightarrow 3 \geq 2 + 1 \Rightarrow e_d = 2$$

Ki ako se vrši korekcija

$$3 \geq \textcircled{1} + \textcircled{1} + 1$$

$e_c = 1$ $e_d = 1$

!!!

3) Konstruisati Hamming (8, 4) kod,

6

a) ~~Odrediti~~ a) ~~Odrediti~~ G i H

b) ~~za proizvoljno odabranu informaciju i ee odrediti, u koliko odjeljivaci u kodu vec~~ Odrediti sve udne reci i ~~odrediti~~ G i H kod (8, 4)
 koliko grešaka može da se detentuje a koliko da koriguje ovim kodom?

c) Odrediti sindrome ~~u koliko~~ u pri prenosu ~~u koliko~~ u kod u
~~došlo~~ - nije bilo grešaka
 - ako je došlo do jednostavne greške
 - ako je došlo do dvostrukog greške
 → šta se dešava ako $\frac{1}{4}$ u kodu ~~dođe~~ do promene višestruke greške \geq više od 2 bite?

Rešenje:

kodna reč

a)

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline z_1 & z_2 & i_1 & z_3 & i_2 & i_3 & i_4 & t_4 \end{matrix} \leftarrow \text{razlike tj. dodatne u odnosu na (7, 4)}$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^7 x_i = z_1 + z_2 + i_1 + t_3 + i_2 + i_3 + i_4 = (i_1 + i_2 + i_4) + (i_1 + i_3 + i_4) + i_1 + (i_2 + i_3 + i_4) + i_2 + i_3 + i_4$$

$$z_1 = i_1 + i_2 + i_3 \rightarrow \text{(za konstruisanje po tabloni)}$$

$$S_4 = \sum_{j=1}^8 y_j = y_1 + y_2 + \dots + y_7 + y_8$$

$$x = I G$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline z_1 & z_2 & i_1 & z_3 & i_2 & i_3 & i_4 & t_4 \end{bmatrix}$$

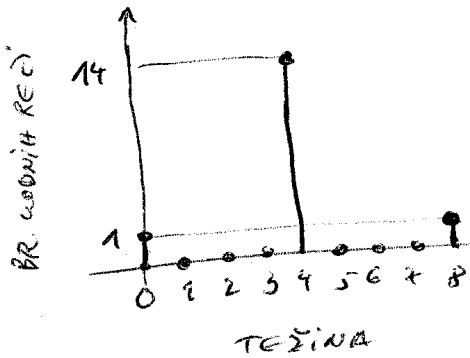
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix}$$

$$S = [s_1 s_2 s_3 s_4] = y \cdot H^T$$

$$X = I \cdot G = \begin{bmatrix} 0000 \\ 0001 \\ 0010 \\ 0011 \\ 0100 \\ 0101 \\ 0110 \\ 0111 \\ 1000 \\ 1001 \\ 1010 \\ 1011 \\ 1100 \\ 1101 \\ 1110 \\ 1111 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 11 & 0000 & 1 \\ 1 & 00 & 1100 & 1 \\ 0 & 10 & 1010 & 1 \\ 1 & 10 & 1001 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0000 & 0000 & -0 \\ 1101 & 0010 & -4 \\ 0101 & 0101 & -4 \\ 1000 & 0111 & -4 \\ 1001 & 1001 & -4 \\ 0100 & 1011 & -4 \\ 1100 & 1100 & -4 \\ 0001 & 1110 & -4 \\ 1110 & 0001 & -4 \\ 0011 & 0011 & -4 \\ 1011 & 0100 & -4 \\ 0110 & 0110 & -4 \\ 0111 & 1000 & -4 \\ 1010 & 1010 & -4 \\ 0010 & 1101 & -4 \\ 1111 & 1111 & -8 \end{bmatrix}$$

7



$d_{min} = 4$

$d_{min} \geq e_c + e_d + 1 \Rightarrow e_c = 1, e_d = 2$

$d_{min} \geq e_d + 1 \Rightarrow e_d = 3$

$d_{min} \geq 2e_c + 1 \Rightarrow e_c = 1$

↳ ako se koristi 1 greška može se dodatno detektovati još jedna

c) $x = [11111111]$
 $e = [00000000]$
 $y = [11111111]$

$S = y \cdot H^T = [0000]$

s_1, s_2, s_3, s_4
 pozicija greške s_4 - detekcija 2 greške

$S_4 = 0$
 $S_{321} = 000 \Rightarrow 0$

NEMA GREŠKE

$x = [11111111]$
 $e = [10000000]$
 $y = [01111111]$

$S = y \cdot H^T = [1001]$

s_1, s_2, s_3, s_4

$S_4 = 1 \rightarrow$ nepravilno br. grešaka uključujući 1.

$S_{321} = 001 = 1 \rightarrow$ pozicija greške

POSTOJI 1 GREŠKA I ONA SE KORIGUJE

$x = [11111111]$
 $e = [00000001]$
 $y = [11111110]$

$S = y \cdot H^T = [0001]$

$S_4 = 1 \rightarrow$ -1-

$S_{321} = 000 = 0 \Rightarrow$ nema greške

POSTOJI 1 GREŠKA KOJA JE BILA NA BITU S_4

$$\begin{aligned}
 \textcircled{*} \quad x &= [1111 \ 1111] \\
 e &= [11000000] \\
 y &= [0011 \ 1111] \\
 S &= y \cdot H^T = [1100]
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x \\ e \\ y \\ S \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$S_4 = 0 \rightarrow$ parni br. grešaka najverovatnije
 2. greške

$S_{321} = 011 \rightarrow$ sindrom ne ukazuje
 na poziciju jer postoje
 2 GREŠKE

DETEKTOJU SE 2 GREŠKE, I
 NE VRŠI SE KOREKCIJA

$\textcircled{*}$ možemo imati više od 2 greške vodi se na neki
 od prethodnih slučajeva i ne može se otkriti