Statistička teorija telekomunikacija 29.09.2010.

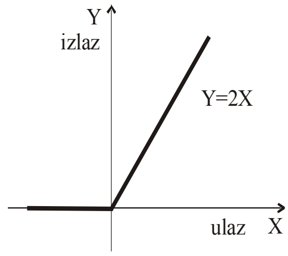
Ispit traje 3 sata. Studenti koji su položili kolokvijum u tekućoj školskoj godini rade zadatke 4, 5 i 6 u trajanju od 1.5 sati. Ovi studenti treba da na prvoj strani vežbanke u polja kod 1., 2. i 3. zadatka upišu «KOLOKVIJUM». Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog kalkulatora. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvog sata. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita. Svaki zadatak početi na novoj strani. Jasno označiti svaku tačku zadatka.

1. (*20 poena*)
a) Kako se definiše kumulativna funkcija raspodele verovatnoće kontinualne slučajne promenljive X i šta ona predstavlja?
b) Napisati izraz za funkciju gustine verovatnoće kontinualne slučajne promenljive koja podleže Gausovoj (normalnoj) raspodeli. Navesti značenje veličina u ovom izrazu.
c) Kako se definiše funkcija greške (Gausov integral) i komplementarna funkcija greške?
d) Ako kontinualna slučajna promenljiva X podleže Gausovoj raspodeli i ima srednju vrednost jednaku nuli, izvesti izraz za kumulativnu funkciju raspodele.

2. *(15 poena)* Slučajna promenljiva X ima funkciju gustine verovatnće:

$$f_X(x) = Ae^{-|x|/3}.$$

Promenljiva X transformiše se pri prolazu kroz usmerač čija je ulazno-izlazna karakteristika prikazana na slici P2.
a) Izračunati vrednost konstante A.
b) Odrediti funkciju raspodele i kumulativnu funkciju raspodele slučajne promenljive Y na izlazu usmerača.



Slika P2

3. *(15 poena)* Komunikacioni kanal se može aproksimirati sledećom funkcijom prenosa:

$$H(jf) = \frac{A_0}{1 + j\dfrac{f}{f_g}},$$

pri čemu granična učestanost f_g iznosi 15 kHz. U kanalu deluje beli Gausov šum spektralne gustine snage 10^{-6} W/Hz. Odrediti maksimalnu vrednost pojačanja kanala A_0 u decibelima, tako da snaga šuma na izlazu kanala ne prelazi 2 W.

---

4. (*20 poena*)
a) Navesti uslov koji mora biti ispunjen da bi kod bio kompaktan. Rečima navesti značenje veličina u izrazu kojim se opisuje traženi uslov.
b) Izvesti Prvu Šenonovu teoremu o kodovanju i komentarisati rečima rezultate ove teoreme.
c) Navesti osnovne razloge zbog kojih se vrši proširenje originalnog diskretnog izvora informacija bez memorije.

5. *(15 poena)* Izvor informacija bez memorije generiše listu simbola $U=\{u_i\}$, pri čemu su odgovarajuće verovatnoće pojavljivanja izvornih simbola date u tabeli P5. Izvršiti statističko kodovanje izvornih simbola primenom Shannon-Fanoovog postupka. Odrediti koeficijent kompresije i efikasnosti kodovanja.

Tabela P5

u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$P(u_i)$	0.72	0.06	0.06	0.06	0.03	0.03	0.03	0.01

6. *(15 poena)*
Telekomunikcioni kanal opisan je sledećom kanalnom matricom:

$$P(Y\,|\,X) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

a) Predstaviti kanal dijagramom na kome su označeni ulazi, izlazi i sve uslovne verovatnoće.
b) Odrediti kapacitet posmatranog kanala.
c) Izračunati verovatnoće ulaznih simbola koje odgovaraju ovom kapacitetu.

STATISTIČKA TEORIJA TELEKOMUNIKACIJA 29. 9. 2010.

REŠENJE ZADATAKA

1) VIDETI PREDAVANJA

2) a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/3}dx = A\int_{-\infty}^{0} e^{x/3}dx + A\int_{0}^{\infty} e^{-x/3}dx = 3Ae^{x/3}\Big|_{-\infty}^{0} - 3Ae^{-x/3}\Big|_{0}^{\infty} = 6A = 1$

$\Rightarrow A = 1/6$

b) $P(Y=0) = P(X\le 0) = A\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|/3}dx = \frac{1}{6}\int_{-\infty}^{0} e^{x/3}dx = \frac{1}{6}\cdot 3\, e^{x/3}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$

$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\Bigg|_{x=y/2} = \frac{\frac{1}{6}e^{-x/3}}{2}\Bigg|_{x=y/2} = \frac{1}{12}e^{-y/6}, \quad y>0$

$y = 2x \Rightarrow dy = 2dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2$

$x = y/2$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(y), & y\le 0 \\ \frac{1}{12}e^{-y/6}, & y>0 \end{cases}$ $\qquad F_Y(y) = 0, \quad y<0$

$F_Y(0) = \int_{-\infty}^{0+} f_Y(y)\,dy = 1/2$

$y>0: \quad F_Y(y) = F_Y(0) + \int_0^y f_Y(y)\,dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\int_0^y e^{-y/6}dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\cdot(-6)\,e^{-y/6}\Big|_0^y$

$F_Y(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-y/6} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(2 - e^{-y/6}\right), \quad y>0$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{1}{2}(2 - e^{-y/6}), & y\ge 0 \end{cases}$

3) $H(jf) = \frac{A_0}{1 + jf/f_g}, \qquad S_{nul}(f) = 10^{-6}\ \frac{W}{Hz}$

$|H(jf)|^2 = \frac{A_0^2}{1 + (f/f_g)^2}$

$S_{niz}(f) = |H(jf)|^2 S_{nul} = \frac{A_0^2 S_{nul}}{1 + (f/f_g)^2} = \frac{A_0^2 S_{nul}\cdot \pi f_g\, \frac{2}{2\pi f_g}}{1 + \left(2\pi f\cdot \frac{1}{2\pi f_g}\right)^2}$

$R_{iz}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{niz}(f)\} = A_0^2 S_{nul}\pi f_g\, \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{2\cdot \frac{1}{2\pi f_g}}{\left[1 + \left(2\pi f\cdot \frac{1}{2\pi f_g}\right)^2\right]} \right\}$

$R_{iz}(\tau) = A_0^2 S_{nul}\cdot \pi f_g\, e^{-2\pi f_g|\tau|}$

$P_{iz} = R_{iz}(0) = A_0^2 S_{nul}\pi f_g \Rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{P_{iz}}{S_{nul}\pi f_g}} = 6{,}51 \qquad a_0 = 20\log A_0 = 16{,}28\ dB$

(4) VIDETI PREDAVANJA

(5)

u_i	$P(u_i)$	I	II	III	IV	V	l_i
u_1	0,72	0					1
u_2	0,06	1	0	0			3
u_3	0,06	1	0	1			3
u_4	0,06	1	1	0	0		4
u_5	0,03	1	1	0	1		4
u_6	0,03	1	1	1	0		4
u_7	0,03	1	1	1	1	0	5
u_8	0,01	1	1	1	1	1	5

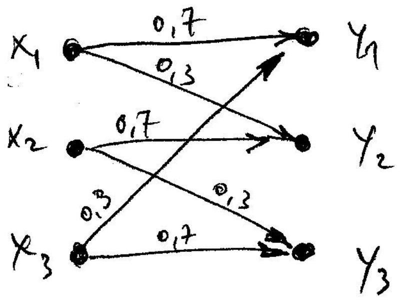
$$H(u) = \sum_{i=1}^{8} P(u_i)\, ld \frac{1}{P(u_i)} = 1{,}5936 \ \frac{Sh}{simbol}$$

$$L(u) = \sum_{i=1}^{8} P(u_i)\, l_i = 1{,}76 \ \frac{Sh}{b}$$

$$\eta = \frac{H}{L} = 0{,}9054 = 90{,}54\,\%$$

$$\rho = \frac{ld\, 8}{L} = 1{,}7$$

(6) a)



b) $C_s = \max\limits_{P(x_i)} I(X,Y)$

$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P(x_i)\, P(y_j|x_i)\, ld \frac{1}{P(y_j|x_i)} = 0{,}8813 \ Sh/Simbol$$

$$C_s = \max\{I(X,Y)\} = \max\{H(Y) - H(Y|X)\} = \max H(Y) - 0{,}8813$$

$\max H(Y) \Rightarrow P(y_1) = P(y_2) = P(y_3) = 1/3$

$\max H(y) = 3 \cdot \frac{1}{3}\, ld\, 3 = ld\, 3 = 1{,}585 \ Sh/Simbol$

$C_s = 1{,}585 - 0{,}8813 = 0{,}7037 \ Sh/Simbol$

c) Zbog simetrije kanala važi

$P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = 1/3$.