

1. (10 poena)

Kako se sve može odrediti funkcija gustine verovatnoće zbira dve slučajne promenljive? Navesti jedan primer!

2. (10 poena)

(4p) U čemu je razlika između slučajne promenljive i slučajnog procesa?

(6p) Napisati definiciju autokorelacione funkcije slučajnog procesa po ansamblu i po vremenu.

3. (10 poena)

(5p) Napisati Kraftovu nejednakost i objasniti je na jednom primeru. Definisati srednju dužinu kodne reči.

(5p) Formulacija i dokaz prve Šenonove teoreme. Ilustrovati je na jednom primeru.

4. (10 poena)

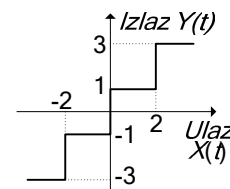
(3p) Blok kodovi i linearni blok kodovi – pojam, opis. Napisati generišuću matricu za jedan linearni blok kod.

(7p) Objasniti način konstrukcije Hemingovih kodova (8,4) i (11,7). Koliko grešaka ovi kodovi mogu da koriguju a koliko da detektuju?

5. (15 poena) Na ulazu kvantizera čija je funkcija prenosa prikazana na slici 5, deluje slučajni proces $X(t)$. Funkcija gustine verovatnoće trenutnih vrednosti procesa $X(t)$ je Gausova sa srednjom vrednošću nula i varijansom 4.

a) Odrediti raspodelu trenutnih vrednosti signala $Y(t)$ na izlazu kvantizera.

b) Izračunati srednju vrednost i varijansu raspodele određene u tački (a).



Slika 5

6. (15 poena) Posmatra se slučajni proces čiji je jedan član naponski signal oblika:

$$X(t) = 2 - 10 \cos(2\pi f_0 t + \Theta) \quad [\text{V}],$$

gde je f_0 konstanta a faza Θ ima uniformnu raspodelu u intervalu od $-\pi$ do π .

a) Odrediti autokorelacionu funkciju i spektralnu gustinu srednje snage slučajnog procesa.

b) Izračunati srednju snagu jednosmerne i naizmjenične komponente procesa na otpornosti od 1Ω .

7. (15 poena) Diskretni izvor signala bez memorije opisan je tabelom P7.

s_i	s_1	s_2	s_3
$P(s_i)$	0.8	0.15	0.05

Tabela P7

a) Koristeći Hafmenov metod izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja originalnog izvora.

b) Izračunati efikasnost kodovanja izvršenog u tački (a).

c) Izračunati verovatnoću pojavljivanja nule i jedinice i entropiju na izlazu statističkog koda.

8. (15 poena) Pri prenosu poruka kroz kanal sa šumom vrši se zaštitno kodovanje Hemingovim (8,4) kodom. Generišuća matrica blok koda ima oblik:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti sve kodne reči koje se koriste pri prenosu.

b) Odrediti kontrolnu matricu H . Ako je pri prenosu proizvoljne kodne reči došlo do greške na prvom bitu, pokazati kako se na prijemu vrši korekcija greške. Ako je pri prenosu kodne reči došlo do greške na prvom i trećem bitu, odrediti sindrome i protumačiti dobijeni rezultat.

NAPOMENA: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 3 sata. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita. Studenti koji su položili kolokvijum mogu prva dva pitanja (1. i 2.) i prva dva zadatka (5. i 6.) zameniti rezultatom sa kolokvijuma, što treba jasno naznačiti na naslovnoj strani vežbanke! U tom slučaju ispit traje 2 sata.

REŠENJA ZADATAKA

①, ②, ③, ④ VIDETI PREDAVANJA

$$⑤ \text{ a) } f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma = 2$$

$$P(Y=-3) = P(Y=3) = P(X \geq 2) = \int_2^{\infty} f_x(x) dx = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_2^{\infty} e^{-\frac{x^2}{8}} dx \quad \text{Substit: } u = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$P(Y=-3) = P(Y=3) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot 2\sqrt{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(0,71)$$

$$P(Y=-3) = P(Y=3) = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf}(0,71)) = \frac{1}{2} (1 - 0,68467) = 0,1577$$

$$P(Y=-1) = P(Y=1) = \frac{1}{2} (1 - 2P(Y=3)) = 0,3423$$

$$\text{b) } E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(y_i) = -3 \cdot P(-3) - 1 \cdot P(-1) + 1 \cdot P(1) + 3 \cdot P(3) = 0$$

$$\operatorname{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(Y^2) = \sum_{i=1}^4 y_i^2 P(y_i) = (-3)^2 \cdot P(-3) + (-1)^2 \cdot P(-1) + 1^2 \cdot P(1) + 3^2 \cdot P(3)$$

$$\operatorname{Var}(Y) = 3,5226$$

$$⑥ \quad X(t) = 2 - 10 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta), \quad f_{\theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\text{a) } R_X(\tau) = E[X(t) \cdot X(t+\tau)] = \int_{-\pi}^{\pi} X(t) X(t+\tau) f_{\theta}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ [2 - 10 \cos(2\pi f_0 t + \theta)] \cdot [2 - 10 \cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta)] \} d\theta$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ 4 - 20 \cos(2\pi f_0 t + \theta) - 20 \cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta) + 100 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cdot \cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta) \} d\theta$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 d\theta + \frac{1}{2\pi} \frac{100}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 (2t+\tau) + 2\theta) \} d\theta$$

$$R_X(\tau) = 4 + \frac{25}{\pi} \cos(2\pi f_0 \tau) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta$$

$$R_X(\tau) = 4 + 50 \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$S_x(t) = \mathcal{F}\{R_x(t)\} = 4 \cdot \mathcal{F}\{1\} + 50 \cdot \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\}$$

$$S_x(t) = 4 \cdot \delta(t) + 25 \delta(t - t_0) + 25 \delta(t + t_0)$$

b) UKUPNA SNAGA JE: $R_x(0) = 4 + 50 = 54 \text{ W} = P_{UK}$

DC snaga je: $P_{DC} = 4 \text{ W}$

AC snaga je: $P_{AC} = 50 \text{ W}$

ili:

DC komponenta spektralne gustine snage: $S_{xDC}(t) = 4 \delta(t)$

AC komponente spektralne gustine snage: $S_{xAC}(t) = 25 \delta(t - t_0) + 25 \delta(t + t_0)$

$$P_{DC} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xDC}(t) dt = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 4 \text{ W}$$

$$P_{AC} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xAC}(t) dt = 25 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt + 25 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) dt = 50 \text{ W}$$

$$P_{UK} = P_{DC} + P_{AC} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(t) dt = 54 \text{ W}$$

7 a)

S^2	P_i	X_i	i
$s_1 s_1$	0,64	0	1
$s_1 s_2$	0,12	11	2
$s_2 s_1$	0,12	100	3
$s_1 s_3$	0,04	1011	4
$s_3 s_1$	0,04	10100	5
$s_2 s_2$	0,0225	101010	6
$s_2 s_1$	0,0075	1010111	7
$s_1 s_2$	0,0075	10101100	8
$s_1 s_1$	0,0025	10101101	

b) $H(s) = \sum_{i=1}^3 P(s_i) \log \frac{1}{P(s_i)}$

$$H(s) = 0,8842 \text{ sh/symbol}$$

$$H(s^2) = 2H(s) = 1,7684 \text{ sh/symbol}^2$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^9 P_i \log \frac{1}{P_i} = 1,8675 \text{ b/symbol}^2$$

$$\eta = \frac{H(s^2)}{L_2} = \frac{H(s)}{L_2/2} = 94,69\%$$

c) $P(0) = (0,64 \cdot 1 + 0,12 \cdot 2 + 0,04 \cdot 1 + 0,04 \cdot 3 + 0,0225 \cdot 3 + 0,0075 \cdot 2 + 0,0075 \cdot 4 + 0,0025 \cdot 3) / L_2$

$$P(0) = 0,6212$$

$$P(1) = 1 - P(0) = 0,3788$$

$$H(s) = P(0) \log \frac{1}{P(0)} + P(1) \log \frac{1}{P(1)} = 0,9572 \text{ sh/symbol}$$

8) a)

$$X = \mathbb{I}G = \begin{bmatrix} 0000 \\ 0001 \\ 0010 \\ 0011 \\ \hline 0100 \\ 0101 \\ 0110 \\ 0111 \\ \hline 1000 \\ 1001 \\ 1010 \\ 1011 \\ \hline 1100 \\ 1101 \\ 1110 \\ 1111 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 & 1101 \\ 0100 & 1011 \\ 0010 & 0111 \\ 0001 & 1110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0000 & 0000 \\ 0001 & 1110 \\ 0010 & 0111 \\ 0011 & 1001 \\ \hline 0100 & 1011 \\ 0101 & 0101 \\ 0110 & 1100 \\ 0111 & 0010 \\ \hline 1000 & 1101 \\ 1001 & 0011 \\ 1010 & 1010 \\ 1011 & 0100 \\ \hline 1100 & 0110 \\ 1101 & 1000 \\ 1110 & 0001 \\ 1111 & 1111 \end{bmatrix}$$

b) $G = [I_k \ P] \Rightarrow H = [-P^T \ I_{m-k}] \quad k=4, n=8, m-k=n-k=4$

$$H = \begin{bmatrix} 1101 & 1000 \\ 1011 & 0100 \\ 0111 & 0010 \\ 1110 & 0001 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{4em}}_{P^T} \quad \underbrace{\hspace{4em}}_{I_4}$

⊕ JEDNA GREŠKA

kodna reč: $x = [0000 \ 0000]$

greška: $e = [1000 \ 0000]$

primljena reč: $y = x \oplus e = [1000 \ 0000]$

$$s = [s_1 s_2 s_3 s_4] = y \cdot H^T = [10000000], \quad \begin{bmatrix} 1101 \\ 1011 \\ 0111 \\ 1110 \\ 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{bmatrix} = [1101]$$

Po rešenju sindroma s sa matricom H vidi se da je s jednak prvoj koloni matrice H , te prijemnik zaključuje da je došlo do greške na prvom bitu i izvrši korekciju tog bita:

$$\hat{x} = [0000 \ 0000]$$

⊕ DVOSTRUKA GREŠKA

$x = [0000 \ 0000]$

$e = [1010 \ 0000]$

$y = x \oplus e = [1010 \ 0000]$

$s = [s_1 s_2 s_3 s_4] = y \cdot H^T = [1010]$

Pošto je $s_4 = 0$ prijemnik zaključuje da je došlo do dvostruke greške. U tom slučaju ne može se izvršiti korekcija. Međutim, ukoliko tehničke mogućnosti sistema omogućavaju prijemnik može zahtevati ponovno slanje kodne reči.