Statistička teorija telekomunikacija 26.2.2011.

1. (*10 poena*)
(*4p*) Kvadratna transformacija jedne slučajne promenljive. Navesti karakterističan primer.
(*6p*) Gausova (normalna) raspodela – opis, funkcija gustine verovatnoće, momenti, primer.

2. (*10 poena*)
Sinusoida sa slučajnom fazom – funkcija gustine verovatnoće, autokorelaciona funkcija, SGSS.

3. (*10 poena*)
(*5p*) Hafmenov postupak, objasniti i dati jedan primer.
(*5p*) Binarni kanal - opis, odnos verovatnoća, primer.

4. *(10 poena)*
(*4p*) Napisati generišuću matricu Hemingovog koda parametara (7,4).
(*6p*) Nacrtati strukturu jednog proizvoljno izabranog konvolucionog kodera, odgovarajući dijagram stanja i trelis.

5. *(15 poena)* Karakteristična funkcija slučajne promenljive X data je izrazom:
$F_X(j\Omega) = e^{-2\Omega(\Omega+j)}$.
a) Odrediti raspodelu slučajne promenljive X.
b) Odrediti srednju vrednost i varijansu slučajne promenljive X.

6. *(15 poena)* Telegrafski signal $X(t)$ čija je autokorelaciona funkcija $R_X(\tau) = 3e^{-4000|\tau|}$, dovodi se na ulaz komunikacionog kanala koji se može aproksimirati idealnim filtrom propusnikom niskih učestanosti. Srednja snaga signala $Y(t)$ na izlazu iz filtra na opornosti od 1Ω iznosi 5 W. Odrediti graničnu učestanost filtra.

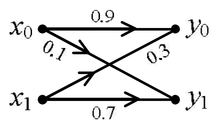
7. *(15 poena)* Diskretni izvor signala bez memorije opisan je tabelom 7. Simboli izvora generišu se brzinom od 1000 simbola u sekundi.

u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
P_i	0.25	0.21	0.18	0.14	0.08	0.06	0.04	0.03	0.01

Tabela 7

a) Koristeći Šenon-Fanoov metod izvršiti statističko kodovanje izvora.
b) Izračunati efikasnost kodovanja izvršenog u tački (a).
c) Odrediti kapacitet binarnog kanala koji je potreban za prenos simbola izvora nakon izvršenog statističkog kodovanja.

8. (*15 poena*) Diskretni izvor bez memorije generise simbole x_1 i x_0 sa verovatnoćom $P(x_1) = P(x_0) = 0.5$.



Slika 8

a) Ako se izvor drektno poveže na binarni asimetrični kanal sa slike 8, odrediti verovatnoće pojavljivanja simbola y_1 i y_0 i izračunati verovatnoću greške na izlazu iz kanala. Odrediti prenesenu informaciju (međuinformaciju) $I(X,Y)$.
b) Odrediti verovatnoće pojavljivanja simbola y_1 i y_0 i izračunati verovatnoću greške na izlazu iz kanala, ako se pre slanja simbola u kanal izvrši zaštitno kodovanje ponavljanjem bita tri puta, dok se na prijemu vrši većinsko odlučivanje.

***NAPOMENA:** Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 3 sata. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita. Studenti koji su položili kolokvijum mogu prva dva pitanja (1. i 2.) i prva dva zadatka (5. i 6.) zameniti rezultatom sa kolokvijuma, što treba jasno naznačiti na naslovnoj strani vežbanke! U tom slučaju ispit traje 2 sata.*

STT

26. 2. 2011.

REŠENJA ZADATAKA

1, 2, 3, 4 VIDETI PREDAVANJA

5 a) $F_X(j\Omega) = e^{-2\Omega^2 - j2\Omega}$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_X(j\Omega)\, e^{-j\Omega x}\, d\Omega$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[2\Omega^2 + j(x+2)\Omega\right]}\, d\Omega$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{2}\,\Omega + j\frac{x+2}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{(x+2)^2}{2\cdot 4}}\, d\Omega$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\frac{du}{\sqrt{2}}$$

smena: $\sqrt{2}\,\Omega + j\frac{x+2}{2\sqrt{2}} = u$

$\sqrt{2}\, d\Omega = du$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 4}}\, e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 4}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du}_{=1}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 4}}\, e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 4}}, \quad -\infty < x < \infty$$

b) X ima Gausovu raspodelu pa je

$E(X) = -2$, $Var(X) = \sigma^2 = 4$

6

$$R_X(\tau) = 3e^{-4000|\tau|}$$

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = 3\,\mathcal{F}\{e^{-4000|\tau|}\} = 3\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{4000}}{1+\left(2\pi f\cdot\frac{1}{4000}\right)^2}$$

$$S_X(f) = \frac{3\cdot\frac{1}{2000}}{1+\left(\frac{\pi}{2000}f\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$S_Y(f) = |H(jf)|^2 \cdot S_X(f)$$

$$|H(jf)|^2 = \begin{cases} 1, & -f_g \le f \le f_g \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \Rightarrow S_Y(f) = \begin{cases} S_X(f), & -f_g \le f \le f_g \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\,df = 2\cdot\int_0^{f_g} S_X(f)\,df = \frac{3}{1000}\cdot\int_0^{f_g}\frac{df}{1+\left(\frac{\pi}{2000}f\right)^2}$$

$$P = \frac{3}{1000}\,\frac{2000}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi f}{2000}\right)\Bigg|_0^{f_g} = \frac{6}{\pi}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\pi f_g}{2000}\right) \Rightarrow f_g = \frac{2000}{\pi}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$f_g = 1{,}63$ KHz

7) a)

u_i	p_i	I	II	III	IV	V	x_i	l_i
u_1	0,25	0	0				00	2
u_2	0,21	0	1				01	2
u_3	0,18	1	0	0			100	3
u_4	0,14	1	0	1			101	3
u_5	0,08	1	1	0	0		1100	4
u_6	0,06	1	1	0	1		1101	4
u_7	0,04	1	1	1	0		1110	4
u_8	0,03	1	1	1	1	0	11110	5
u_9	0,01	1	1	1	1	1	11111	5

b)

$$H(S) = \sum_{i=1}^{9} P_i \, ld \frac{1}{P_i}$$

$$H(S) = 2,7542 \text{ Sh/simbol}$$

$$L = \sum_{i=1}^{9} P_i l_i = 2,8 \text{ b/simbol}$$

$$\eta = \frac{H(S)}{L} = 98,37\ \%$$

c)

$$C \geq L\,v = 2,8 \frac{b}{simbol} \cdot 1000 \frac{simbol}{s} = 2,8 \text{ kb/s}$$

8) a)

$p_{e0} = 0,1$
$p_{e1} = 0,3$

$$P(Y=0) = P(y_0) = P(x_0)(1-p_{e0}) + P(x_1)\,p_{e1} = 0,5 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,6$$

$$P(Y=1) = P(y_1) = P(x_0)\,p_{e0} + P(x_1)(1-p_{e1}) = 1 - P(y_0) = 0,4$$

$$P_e = P(x_0)\,p_{e0} + P(x_1)\,p_{e1} = 0,5 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,2$$

b)

$$p'_{e0} = \binom{3}{2} p_{e0}^2 (1-p_{e0}) + \binom{3}{3} p_{e0}^3 = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 + 1 \cdot 0,1^3 = 0,028$$

$$p'_{e1} = \binom{3}{2} p_{e1}^2 (1-p_{e1}) + \binom{3}{3} p_{e1}^3 = 3 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,3^3 = 0,216$$

$$P(y_0) = P(x_0)(1-p'_{e0}) + P(x_1)\,p'_{e1} = 0,5 \cdot 0,972 + 0,5 \cdot 0,216 = 0,594$$

$$P(y_1) = P(x_0)\,p'_{e0} + P(x_1)(1-p'_{e1}) = 0,5 \cdot 0,028 + 0,5 \cdot 0,784 = 0,406 = 1 - P(y_0)$$

$$P_e = P(x_0)\,p'_{e0} + P(x_1)\,p'_{e1} = 0,5 \cdot 0,028 + 0,5 \cdot 0,216 = 0,122$$

a) (NASTAVAK)

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) = 0,971 - 0,6751 = 0,2958 \text{ Sh/simbol}$$

$$H(Y) = P(y_0)\, ld \frac{1}{P(y_0)} + P(y_1)\, ld \frac{1}{P(y_1)} = 0,971 \text{ Sh/simbol}$$

$$H(Y|X) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} P(x_i) P(y_j|x_i)\, ld \frac{1}{P(y_j|x_i)} = 0,6751 \text{ Sh/simbol}$$