Statistička teorija telekomunikacija 17.06.2013.

1. (*10 poena*)

(*5p*) Gausova (normalna) raspodela – opis, funkcija gustine verovatnoće, funkcija raspodele, momenti, primer slučajnog procesa.

(*5p*) Kvadratna transformacija jedne slučajne promenljive. Navesti karakterističan primer.

2. (*10 poena*)

(*4p*) Viner-Hinčinova teorema – formulacija i značaj. Napisati definiciju autokorelacione funkcije slučajnog procesa po ansamblu i po vremenu.

(*6p*) Sinusoida sa slučajnom fazom – funkcija gustine verovatnoće, momenti, autokorelaciona funkcija, spektralna gustina srednje snage. Šta se može postići sumiranjem većeg broja sinusoida sa slučajnom fazom?

3. (*10 poena*)

(*4p*) Statistički kodovi. Pojam singularnog, jednoznačno dekodabilnog i trenutnog koda. Kodno stablo. Navesti primere.
(*6p*) Kaskadna veza binarnih simetričnih kanala – graf, prelazna matrica i kapacitet ekvivalentnog kanala.

4. *(10 poena)*

(*5p*) Formulacija i komentar druge Šenonove teoreme.

(*5p*) Objasniti način konstrukcije Hemingovog koda sa parametrima (12,7). Objasniti dekodovanje na jednom primeru.

5. *(15 poena)* Posmatraju se dve slučajne promenljive X i Y sa uniformnom raspodelom u opsegu od 0 do 5.Odrediti raspodelu slučajne promenljive Z=X+Y.

6. *(15 poena)* Na ulaz komunikacionog kanala dovodi se slučajni signal X čija je autokorelaciona funkcija data izrazom:

$$R_X(\tau) = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \delta(\tau).$$

Posmatrani komunikacioni kanal se ponaša kao idealni filtar propusnik niskih učestanosti koji ima graničnu učestanost 10kHz i konstantno slabljenje od 3dB u propusnom opsegu. Odrediti autokorelacionu funkciju i srednju snagu signala na izlazu komunikacionog kanala.

7. *(15 poena)* Digitalni izvor bez memorije generiše simbole A i B sa verovatnoćom P(A)=0.2 i P(B)=0.8 i brzinom od 10^6 simbola u sekundi. Za potrebe prenosa simbola kroz binarni kanal, najpre se vrši statističko kodovanje.

a) Izvršiti statističko kodovanje trećeg proširenja izvora korišćenjem Shannon-Fanoovog postupka i odrediti koeficijent efikasnosti i stepen kompresije.
b) Odrediti minimalnu potrebnu brzinu signaliziranja u kanalu tako da se omogući prenos simbola izvora kroz posmatrani binarni kanal, uz korišćenje statističkog kodera iz tačke (a).

8. (*15 poena*) Za prenos osam jednako verovatnih poruka kroz kanal sa šumom koristi se sistematski Hemingov zaštitni koder.

a) Odrediti minimalni broj redundantnih bita tako da zaštitni kod omogući detekciju i korekcija jedne greške.
b) Odrediti matrice G i H za sistematski Hemingov kod sa parametrima određenim u tački (a).
c) Na primeru proizvoljno odabrane kodne reči pokazati kako se na prijemu vrši korekcija greške, ako je pri prenosu kroz kanal došlo do greške na trećem bitu.

NAPOMENA: ***Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 3 sata. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.***

5

$$F_z(j\Omega) = F_x(j\Omega)\cdot F_Y(j\Omega) = F_x^2(j\Omega)$$

$$F_x(j\Omega) = F_Y(j\Omega) = \frac{\sin(2{,}5\Omega)}{2{,}5\Omega}\, e^{j2{,}5\Omega} = \frac{\sin(a\Omega)}{a\Omega}\, e^{ja\Omega}$$

$(a = 2{,}5)$

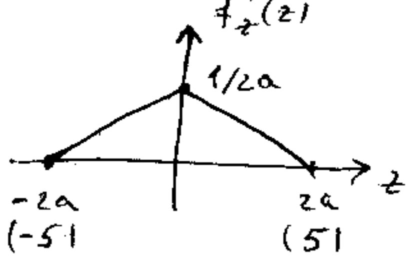
$$F_z(j\Omega) = \left[\frac{\sin(a\Omega)}{a\Omega}\, e^{ja\Omega}\right]^2$$

$$F_z(j\Omega) = \frac{\sin^2(a\Omega)}{(a\Omega)^2}\, e^{j2a\Omega}$$

$$f_z(z) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F_z(j\Omega)\right\}\Big|_{\Omega=-2\pi f}$$

$$F_z'(j\Omega) = \left(\frac{\sin(a\Omega)}{a\Omega}\right)^2 \Rightarrow$$

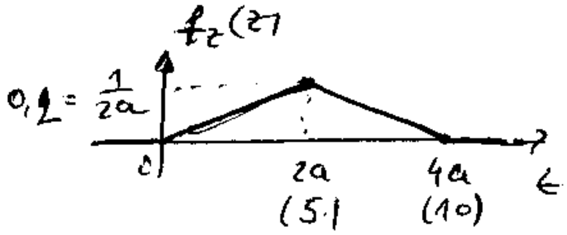
TABLICA



$$F_z(j\Omega) = F_z'(j\Omega)\, e^{j2a\Omega}$$

$$\Updownarrow$$

$$f_z(z) = f_z'(z-2a) \Rightarrow$$



$$f_z(z) = \begin{cases} z/25, & 0 < z \le 5 \\ (10-z)/25, & 5 \le z < 10 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

⑤ II NAČIN

$$\left.\begin{aligned} z &= x+y = Q_1(x,y) \\ w &= y = Q_2(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= z-w = S_1(z,w) \\ y &= w = S_2(z,w) \end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} \partial Q_1/\partial x & \partial Q_1/\partial y \\ \partial Q_2/\partial x & \partial Q_2/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_X(x) = f_Y(y) = \frac{1}{5}, \quad \begin{aligned} 0<x<5 \\ 0<y<5 \end{aligned}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{25}, & 0<x,y<5 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}(x,y)}{|J|} = \begin{cases} \frac{1}{25}, & \boxed{0<w<5},\ (0<z-w<5) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

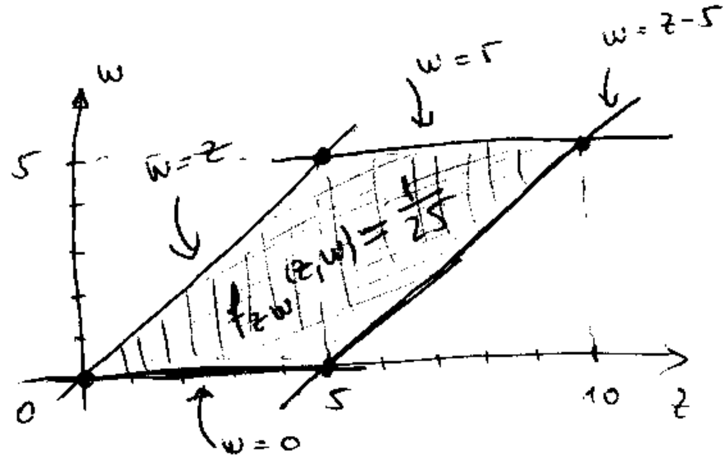
$$\downarrow$$

$$0 > w-z > -5$$

$$+z > w > z-5$$

$$\boxed{z-5<w<z}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZW}(z,w)\, dw$$



1) $\underline{z<0}$

$f_Z(z) = 0$

2) $\underline{0<z<5}$

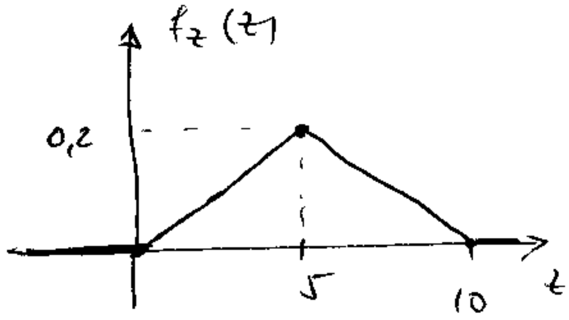
$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{25}\, dw = \frac{z}{25}$$

3) $\underline{5<z<10}$

$$f_Z(z) = \int_{z-5}^{5} \frac{1}{25}\, dw = \frac{1}{25} w \Big|_{z-5}^{5} = \frac{10-z}{25}$$

4) $z>10$

$f_Z(z) = 0$

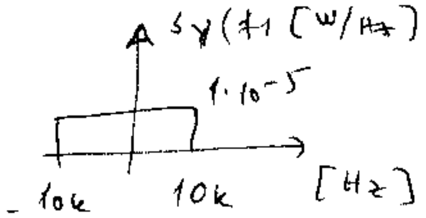


(6) $R_x(\tau) = 2\cdot 10^{-5}\,\delta(\tau)$

$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = 2\cdot 10^{-5}$

$|H(jf)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|f| \le 10\,kHz$

$S_Y(f) = |H(jf)|^2 \cdot S_x(f) = 1\cdot 10^{-5}$, $|f| \le 10\,kHz$



$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\,df = 20k \cdot 10^{-5} = 0{,}2\,W$

$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(f)\} = 2\cdot 10K \cdot 1\cdot 10^{-5} \cdot \mathrm{sinc}(2\cdot 10K\cdot\tau)$

$R_Y(\tau) = 0{,}2 \cdot \mathrm{sinc}(20\cdot 10^3\,\tau)$

7) a)

σ_i	p_i	x_i	l_i
BBB	0,512	0	1
ABB	0,128	100	3
BAB	0,128	101	3
BBA	0,128	110	3
AAB	0,032	11100	5
ABA	0,032	11101	5
BAA	0,032	11110	5
AAA	0,008	11111	5

$$\eta = \frac{H(S^3)}{L_3} = \frac{3H(S)}{L_3} = 99,17\%$$

$$\rho = \frac{\lceil ld\, 8 \rceil}{L_3} = \frac{ld\, 8}{L_3} = 1,374$$

$$H(S) = \sum_{i=1}^{2} P(s_i)\, ld \frac{1}{P(s_i)} = 0,7219 \frac{b}{simb.(S)}$$

$$L_3 = \sum_{i=1}^{8} P(\sigma_i)\, l_i = 2,184 \frac{b}{simb.(S^3)}$$

b)

$$v(S^3) = v(S) \cdot \frac{L_3}{3} = 10^6 \frac{simbol(S)}{s} \cdot \frac{2,184}{3} \frac{b}{simbol(S)}$$

$$v(S^3) = 728 \text{ kb/s}$$

(4) a) $2^m \geq 1+n$, $k=3$, $n=m+k=m+3$

$m=1: \quad 2^1 \geq 1+1+3 \quad \times$

$m=2: \quad 2^2 \geq 1+2+3 \quad \times$

$m=3: \quad 2^3 \geq 1+3+3 \quad ✓ \Rightarrow m=3, n=6 \rightarrow \underline{(6,3) \text{ kod}}$

b)

x_1	0 0 1	z_1
x_2	0 1 0	z_2
x_3	0 1 1	i_1
x_4	1 0 0	z_3
x_5	1 0 1	i_2
x_6	1 1 0	i_3

$\Rightarrow$ $z_1 = i_1 \oplus i_2$, $z_2 = i_1 \oplus i_3$, $z_3 = i_2 \oplus i_3$

↑ NESISTEMATSKI

SISTEMATSKI KOD:

i_1	i_2	i_3	z_1	z_2	z_3
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

$$x = I \cdot G_S \Rightarrow [x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6] = [i_1\, i_2\, i_3] \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{G_S} = [I_3\; P]$$

$$H_S = [P^T\; I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

c) $i = [100] \Rightarrow x = i \cdot G_S = [100\,110]$

$e = [001\,000]$

$y = x \oplus e = [101\,110]$

$$S = [S_1 S_2 S_3] = y \cdot H^T = [101\,110] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [011]$$

$S^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv$ 3. KOLONA $H_S \Rightarrow$ 3. bit je pogrešan

$\hat{x} = [10\boxed{0}\,110]$

$\hat{i} = [100]$ ✓