Statistička teorija telekomunikacija **02.09.2013.**

1. (*10 poena*)

(*5p*) Definisati *n*-ti početni moment, *n*-ti apsolutni moment i *n*-ti centralni moment kontinualne slučajne promenljive.

(*5p*) Kako se sve može odrediti funkcija gustine verovatnoće zbira dve slučajne promenljive?

2. (*10 poena*)

(*4p*) Definisati stacionarnost i ergodičnost slučajnog procesa. Navesti primer nestacionarnog i neergodičnog procesa.

(*6p*) Objasniti pojam srednje kvadratne greške. Kako se određuje optimalni filtar po Vineru? Napisati Viner-Hopfovu jednačinu i objasniti je.

3. (*10 poena*)

(*4p*) Pojam diskretnog izvora s memorijom, pridruženi izvor, entropija pridruženog izvora.

(*6p*) Kapacitet diskretnog kanala bez memorije – napisati izraz i objasniti šta on predstavlja, koji značaj ima.

4. *(10 poena)*

(*5p*) Blok kodovi i linearni blok kodovi – pojam, opis. Opisati jedan linearni blok kod.

(*5p*) Hemingova i Singltonova granica – napisati izraze i objasniti značenje. Proveriti da li važe za Hemingov kod (7,4).

5. *(15 poena)* Karakteristična funkcija slučajne promenljive *X* data je izrazom: $F_X(j\Omega) = \dfrac{12}{12+3\Omega^2}$.

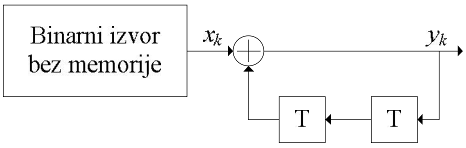
a) (*5p*) Odrediti raspodelu slučajne promenljive *X*.
b) (*10p*) Odrediti srednju vrednost i varijansu slučajne promenljive X.

6. *(15 poena)* Posmatra se naponski signal sinusoidalnog talasnog oblika sa slučajnom fazom, definisan izrazom: $X(t) = A\left[1+2\cdot\cos(2\pi f_0 t+\Theta)\right]$, pri čemu su A i f_0 konstante. Faza Θ ovog slučajnog signala ima uniformnu raspodelu u intervalu $[-\pi,\pi]$.

a) (*10p*) Odrediti i grafički prikazati autokorelacionu funkciju slučajnog signala *X*(*t*).
b) (*5p*) Odrediti amplitudu *A* tako da snaga naizmenične komponente slučajnog signala *X*(*t*) iznosi 500 mW.

7. (*15 poena*) Izvor bez memorije emituje binarnu sekvencu x_k. Verovatnoća emitovanja simbola „1“ binarne sekvence iznosi 0.2. Sekcenca x_k dovodi se na ulaz kodera prikazanog na slici 7, pri čemu su sa T označene ćelije za kašnjenje, a sabiranje se vrši po modulu dva.

a) (*10p*) Ako binarni izvor bez memorije i koder čine ekvivalentni izvor koji emituje sekvencu y_k, nacrtati dijagram stanja i trelis ekvivalentnog izvora.
b) (*5p*) Odrediti verovatnoće stanja i simbola koje emituje izvor y_k.



Slika 7

8. (*15 poena*) Posmatra se linearni blok kod koji je opisan generišućom matricom:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (*5p*) Odrediti generišuću i kontrolnu matricu ekvivalentnog sistematskog koda.
b) (*5p*) Odrediti težinski spektar ekvivalentnog sistematskog koda. Koliko grešaka može da koriguje, a koliko da detektuje (bez korekcije) ekvivalentni kod.
c) (*5p*) Ako predajnik koristi ekvivalentni zaštitni kod iz tačke (a) i ako je u prijemniku primljena reč 111101, proveriti da li je pri prenosu došlo do greške i odrediti poslatu informacionu reč.

***NAPOMENA**: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 3 sata. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.*

STATISTIČKA TEORIJA TELEKOMUNIKACIJA 2.9. 2013.

$\boxed{\text{Rešenja zadataka}}$

⑤ a) $F_X(j\Omega) = \frac{12}{12+3\Omega^2} \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_X(j\Omega)e^{-j\Omega x}d\Omega$

$$f_X(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F_X(j\Omega)\right\}\Bigg|_{\substack{2\pi f \Leftrightarrow -\Omega \\ t \Leftrightarrow x \\ (\text{tablica}}} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{12}{12+3(-2\pi f)^2}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\cdot\overset{\tau}{\textcircled{\tfrac{1}{2}}}}{1+(2\pi f\underset{\tau}{\textcircled{\tfrac{1}{2}}})^2}\right\}\Bigg|_{\substack{t\Leftrightarrow x \\ (\text{tablica})}}$$

$$\boxed{f_X(x) = e^{-2|x|}, \quad -\infty < x < \infty}$$

b) I način) $\overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \dots = 0$

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \dots = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \overline{X^2} - \cancel{(\overline{X})^2}^{\,0} = \frac{1}{2}$$

II način) $\overline{X^n} = \frac{1}{j^n}\frac{d^n}{d\Omega^n}\left[F_X(j\Omega)\right]\Big|_{\Omega=0}$

$$\overline{X} = \frac{1}{j}\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{12}{12+3\Omega^2}\right]\Bigg|_{\Omega=0} = \frac{1}{j}\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{2})^2}\right]_{\Omega=0}$$

$$\overline{X} = -\frac{1}{j}\frac{\Omega/2}{\left[1+(\Omega/2)^2\right]^2}\Bigg|_{\Omega=0} \Rightarrow \boxed{\overline{X}=0}$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{j}\left(-\frac{1}{j}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{\Omega}{\left[1+(\frac{\Omega}{2})^2\right]^2}\right]\Bigg|_{\Omega=0}$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2}\frac{1-\Omega^2/2}{\left[1+(\frac{\Omega}{2})^2\right]^3}\Bigg|_{\Omega=0}$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = \frac{1}{2}$$

⑥ $X(t) = A[1+2\cos(2\pi f_0 t+\theta)]$ $f_\theta(\theta) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\le\theta\le\pi\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$

a) $R_x(\tau) = \overline{X(t)\,X(t+\tau)} = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,x(t+\tau)\cdot f_\theta(\theta)\,d\theta$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1+2\cos(2\pi f_0 t+\theta)][1+2\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\theta)]\,d\theta$$

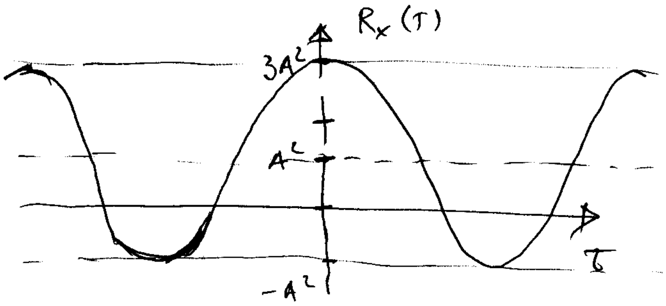
$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1+\overset{=0}{\cancel{2\cos(2\pi f_0 t+\theta)}} + \overset{=0}{\cancel{2\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\theta)}} + 4\cos(2\pi f_0 t+\theta)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\theta)]\,d\theta$$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2\pi}\left[2\pi + 4\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\overset{=0}{\cancel{\cos(2\pi f_0(2t+\tau)+2\theta)}} + \cos(2\pi f_0\tau)\right)d\theta\right]$$

$$R_x(\tau) = A^2 + \frac{A^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos(2\pi f_0\tau)}_{\text{const}}\,d\theta$$

$$R_x(\tau) = A^2 + \frac{A^2}{\pi}\cos(2\pi f_0\tau)\overset{=2\pi}{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}d\theta}}$$

$$\boxed{R_x(\tau) = A^2 + 2A^2\cos(2\pi f_0\tau)}$$



b) $P_{UK} = R_X(0) = A^2 + 2A^2 = 3A^2$

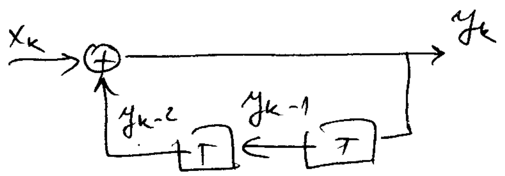
$P_{DC} = A^2$

$P_{AC} = P_{UK} - P_{DC} = 2A^2$

$P_{AC} = 0{,}5\,W \Rightarrow 2A^2 = 0{,}5$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0{,}5}$$

⑦



a)

Stanje: $y_{k-2}y_{k-1} = 00$, $x_k = 0$ $(1-p)$

$y_k = y_{k-2} \oplus x_k = 0 \oplus 0 = 0$

novo stanje: $y^*_{k-2}y^*_{k-1} = 00$

$\boxed{00} \leftarrow 0\ (y_k)$

$\boxed{00}$

$x_k = 1$ (p)

$y_k = y_{k-2} \oplus x_k = 0 \oplus 1 = 1$

novo stanje: $y^*_{k-2}y^*_{k-1} = 01$

$\boxed{00} \leftarrow 1\ (y_k)$

$\boxed{01}$

STANJE $y_{k-2}y_{k-1} = 01$, $x_k = 0$ $(1-p)$

$y_k = y_{k-2} \oplus x_k = 0$

novo stanje: $y^*_{k-2}y^*_{k-1} = 10$

$\boxed{01} \leftarrow \underset{(y_k)}{0} \Rightarrow \boxed{10}$

$x_k = 1$ (p)

$y_k = y_{k-2} \oplus x_k = 1$

$y^*_{k-2}y^*_{k-1} = 11$

$\boxed{01} \leftarrow \underset{(y_k)}{1} \Rightarrow \boxed{11}$

STANJE $y_{k-2}y_{k-1} = 10$, $x_k = 0$ $(1-p)$

$y_k = y_{k-2} \oplus x_k = 1 \oplus 0 = 1$

novo stanje: $y^*_{k-2}y^*_{k-1} = 01$

$\boxed{10} \leftarrow \underset{(y_k)}{1} \Rightarrow \boxed{01}$

$x_k = 1$ (p)

$y_k = 1 \oplus 1 = 0$

$y^*_{k-2}y^*_{k-1} = 10$

$\boxed{10} \leftarrow \underset{(y_k)}{0} \Rightarrow \boxed{00}$

Stanje $y_{k-2}y_{k-1} = 11$, $x_k = 0$ $(1-p)$

$y_k = 1 \oplus 0 = 1$

novo stanje: $y^*_{k-2}y^*_{k-1} = 11$

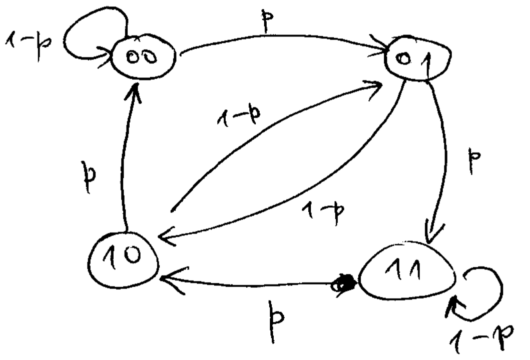
$\boxed{11} \leftarrow \underset{(y_k)}{1} \Rightarrow \boxed{11}$

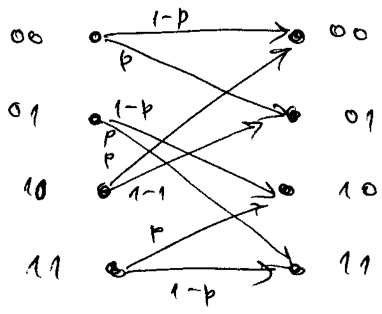
$x_k = 1$ (p)

$y_k = 1 \oplus 1 = 0$

$y^*_{k-2}y^*_{k-1} = 10$

$\boxed{11} \leftarrow \underset{(y_k)}{0} \Rightarrow \boxed{10}$





⑦ b)

$$P(00) = (1-p)\left[P(00)\right] + p \cdot P(10) \quad \text{---- } (1)$$

$$P(01) = p\,P(00) + (1-p)\,P(10) \quad \text{--- } (2)$$

$$P(11) = p\,P(01) + (1-p)\,P(11) \quad \text{--- } (3)$$

$$P(00) + P(01) + P(10) + P(11) = 1 \quad \text{--- } (4)$$

$$(1) \Rightarrow p\,P(00) = p\,P(10) \Rightarrow P(00) = P(10) \quad \text{--- } (5)$$

$$(3) \Rightarrow p\,P(11) = p\,P(01) \Rightarrow P(11) = P(01) \quad \text{--- } (6)$$

$$(2),(5) \Rightarrow P(01) = P(00) \quad \text{---- } (7)$$

$$(4),(5),(6),(7) \Rightarrow \boxed{P(00) = P(01) = P(10) = P(11) = \frac{1}{4}}$$

$$P(0) = P(00) + \frac{1}{2}\left(P(01) + P(10)\right) = 1/2$$

$$P(1) = P(11) + 1/2\left(P(01) + P(10)\right] = 1/2$$

② a)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{PROMENOM REDOSLEDA KOLONA}]{} G_s = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P} \right]$$

(dozvoljen je i drugačiji izbor matrice P)

$$H_s = [\, P^T \mid I_{6-3} \,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

b) kodne reči (rešenje zavisi od izbora matrice P):

$$c = I \cdot G = \begin{bmatrix} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 000 & 000 \\ 001 & 101 \\ 010 & 011 \\ 011 & 110 \\ 100 & 110 \\ 101 & 011 \\ 110 & 101 \\ 111 & 000 \end{array} \right] \begin{array}{l} \to 0 \\ \to 3 \\ \to 3 \\ \to 4 \\ \to 3 \\ \to 4 \\ \to 4 \\ \to 3 \end{array}$$

c) rešenje ove tačke zavisi od izbora matrice P. Za izabrano P iz tačke a) važi:

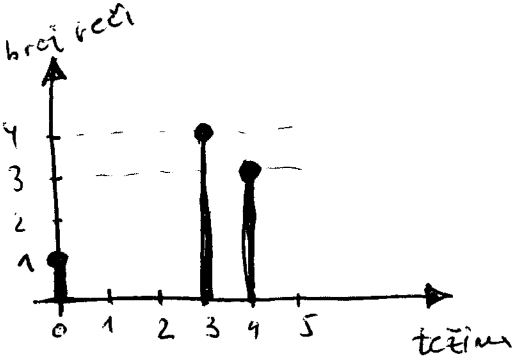
$$R = [1 1 1 1 0 1]$$

$$S = R \cdot H^T = [1 1 1 1 0 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 1 0 \\ 0 1 1 \\ 1 0 1 \\ \hline 1 0 0 \\ 0 1 0 \\ 0 0 1 \end{bmatrix} = [1 0 1]$$

Pošto se sindrom $S^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ poklapa se 3. kolonom matrice H, sledi da je greška na 3. bitu te je

$$\hat{c} = [1 1 0 1 0 1]$$

$$\hat{i} = [1 1 0]$$ (prva tri bita predstavljaju informacionu reč kod sistematskog koda)



$d_{min} = 3$ $\qquad d_{min} = e_c + e_d + 1$

1) ⇒ korekcija 1 greške

$$\boxed{e_c = e_d = 1}$$

2) ⇒ detekcija 2 greške

$$e_c = 0 \quad \boxed{e_d = 2}$$