

1. (10 poena)

(5p) Definirati n-ti početni moment, n-ti apsolutni moment i n-ti centralni moment kontinualne slučajne promenljive.

(5p) Definicija karakteristične funkcije kontinualne i diskretne slučajne promenljive.

2. (10 poena)

(5p) Formulirati centralnu graničnu teoremu. Kako se pomoću slučajnih promenljivih sa uniformnom raspodelom na intervalu (0,1] može generisati slučajna promenljiva sa Gausovom raspodelom nulte srednje vrednosti i proizvoljne varijanse?

(5p) Sinusoida sa slučajnom fazom – funkcija gustine verovatnoće, momenti, autokorelaciona funkcija, SGSS. Sličnosti i razlike sa determinističkim prostoperiodičnim signalom. Šta se može postići sumiranjem većeg broja sinusoida sa slučajnom fazom?

3. (10 poena)

(5p) Definirati pojam količine informacija i izvesti izraz za entropiju za izvore bez memorije. Informacioni fluks izvora.

(5p) Statistički kodovi. Pojam singularnog, jednoznačno dekodabilnog i trenutnog koda. Kodno stablo. Navesti primere.

4. (10 poena)

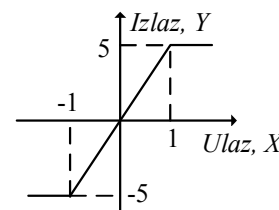
(5p) Pojam zaštitnog koda. Kako se definišu kodni količnik i informacioni protok?

(5p) Objasniti način konstrukcije Hemingovih kodova sa parametrima (11,7).

5. (15 poena) Funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive X definisana je izrazom:

$$f_X(x) = A \cdot e^{-2|x|}, -\infty < x < \infty.$$

Slučajna promenljiva X prenosi se kroz komunikacioni kanal tako da dolazi do njene transformacije, te se na izlazu kanala dobija slučajna promenljiva Y . Izlazna i ulazna slučajna promenljiva povezane su sledećom funkcijom koja je prikazana na slici 5.



Slika 5

a) Odrediti vrednost konstante A .

b) Odrediti funkciju gustine verovatnoće i kumulativnu funkciju verovatnoće slučajne promenljive Y na izlazu komunikacionog kanala.

6. (15 poena) Posmatra se komunikacioni kanal koji se ponaša kao filter propusnik niskih učestanosti koji ima impulsni odziv definisan sledećom funkcijom: $h(t) = 100\pi \cdot e^{-20\pi t} u(t)$, pri čemu je sa $u(t)$ označena jedinična odskočna funkcija. Na ulazu komunikacionog kanala deluje slučajni proces sinusoidalnog talasnog oblika sa slučajnom fazom, definisan izrazom $X(t) = 20 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, pri čemu su A i f_0 konstante, a faza Θ ima uniformnu raspodelu u intervalu $[-\pi, \pi]$.

a) Odrediti autokorelacionu funkciju i spektralnu gustinu srednje snage slučajnog signala $X(t)$.

b) Odrediti srednju snagu slučajnog procesa na izlazu iz komunikacionog kanala.

7. (15 poena) Diskretni izvor signala bez memorije opisan je tabelom 7. Brzina generisanja simbola izvora je $5 \cdot 10^6$ simbola u sekundi.

u_i	u_1	u_2	u_3
P_i	0.5	0.3	0.2

Tabela 7

a) Koristeći Šenon-Fanoov metod izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja originalnog izvora.

b) Izračunati efikasnost kodovanja izvršenog u tački (a).

c) Odrediti minimalni kapacitet binarnog kanala koji je potreban da se omogući prenos poruka izvora, ako se pre slanja poruke vrši statističko kodovanje iz tačke (a).

8. (15 poena) Pri prenosu poruka kroz kanal sa šumom vrši se zaštitno kodovanje Hemingovim (16,11) kodom.

a) Odrediti kodnu reč koja odgovara informacionj reči 100 1000 1001.

b) Odrediti sindrome i izvršiti dekodovanje ako je u prijemniku detektovana sekvenca 1101 0001 0000 0010.

NAPOMENA: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 3 sata. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.

5)

a) $f_x(x) = A e^{-2|x|}, \quad -\infty < x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \Rightarrow A \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx + A \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = 1$$

$$\frac{A}{2} e^{2x} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{A}{-2} e^{-2x} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{2} (1-0) + \frac{A}{-2} (0-1) = \boxed{A=1}$$

$$f_x(x) = e^{-2|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

b) I) $x \geq 1$
 $P(Y=5) = P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} f_x(x) dx = \int_1^{\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} e^{-2x} \Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{2} (0 - e^{-2})$

$$P(Y=5) = \frac{1}{2} e^{-2} = \frac{1}{14,7781} = 0,0677$$

II) $x \leq -1$

$$P(Y=-5) = P(X \leq -1) = P(X \geq 1) = 0,0677$$

III) $0 \leq x \leq 1$

$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \Big|_{x=y/5} \quad \underline{y=5x} \Rightarrow dy = 5dx \quad \left| \frac{dy}{dx} \right| = 5$$

$$f_y(y) = \frac{e^{-\frac{2}{5}y}}{5} = \frac{1}{5} e^{-\frac{2}{5}y} \quad x = \frac{1}{5}y$$

IV) $-1 \leq x \leq 0$

$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \Big|_{x=y/5} \quad y=5x \Rightarrow \left| \frac{dy}{dx} \right| = 5$$

$$f_y(y) = \frac{e^{-\frac{2}{5}y}}{5}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 0, & y < -5 \\ 0,06775(y+1), & y = -5 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{2}{5}|y|}, & -5 \leq y \leq 5 \\ 0,06775(y-1), & y = +5 \\ 0, & y > 5 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy$$

I) $y < -5$

$$F_Y(y) = 0$$

II) $-5 \leq y \leq 0$

$$F_Y(y) = \int_{-5}^y \left[0,0677 \delta(y+5) + \frac{1}{5} e^{+\frac{2}{5}y} \right] dy = 0,0677 + \frac{1}{5} \int_{-5}^y e^{+\frac{2}{5}y} dy$$

$$F_Y(y) = 0,0677 + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} e^{\frac{2}{5}y} \Big|_{-5}^y = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{2}{5}y} - e^{+\frac{2}{5} \cdot (-5)} \right] + 0,0677$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{5}y} \quad \Rightarrow \quad F_Y(-5) = \frac{1}{2} e^{-2} = 0,0677 \quad \checkmark$$

$$F_Y(0) = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

~~F_Y(y) = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{5}y}~~

III) $0 \leq y < 5$

$$F_Y(y) = F_Y(0) + \int_0^y f_Y(y) dy = \overset{= \frac{1}{2}}{F_Y(0)} + \int_0^y \frac{1}{5} e^{-\frac{2}{5}y} dy$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \left(-\frac{5}{2} \right) \cdot e^{-\frac{2}{5}y} \Big|_0^y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{5}y} \Big|_0^y$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{2}{5}y} - e^0 \right) = 1 - e^{-\frac{2}{5}y}$$

IV) $y \geq 5$

$$F_Y(y) = 1$$

6

$$H(jf) = \mathcal{F} \{ h(t) \} = \mathcal{F} \{ 100 \bar{u} e^{-20\bar{u}t} u(t) \}$$

$$H(jf) = 100 \bar{u} \mathcal{F} \{ e^{-\underbrace{20\bar{u}}_a t} u(t) \} = 100 \bar{u} \cdot \frac{1}{20\bar{u} + j\omega f}$$

$$H(jf) = \frac{100 \bar{u}}{20\bar{u} + j\omega f} = \frac{50}{10 + jf}$$

$$|H(jf)|^2 = \frac{50^2}{10^2 + f^2} = \frac{2500}{100 + f^2}$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} 20 \cos(\bar{u} f_0 t + \theta) \cdot 20 \cos(\bar{u} f_0 (t+\tau) + \theta) \frac{1}{2\bar{u}} d\theta$$

$$R_x(\tau) = \frac{400}{2\bar{u}} \int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} \frac{1}{2} [\cos(\bar{u} f_0 \tau) + \cos(\bar{u} f_0 (2t+\tau) + 2\theta)] d\theta$$

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\bar{u}}, & |\theta| \leq \bar{u} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$R_x(\tau) = \frac{200}{2\bar{u}} \left[\underbrace{\int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} \cos(\bar{u} f_0 \tau) d\theta}_{= 2\bar{u}} + \underbrace{\int_{-\bar{u}}^{\bar{u}} \cos(\bar{u} f_0 (2t+\tau) + 2\theta) d\theta}_{= 0} \right]$$

$$R_x(\tau) = 200 \cos(\bar{u} f_0 \tau)$$

$$S_x(f) = \mathcal{F} \{ R_x(\tau) \} = 200 \mathcal{F} \{ \cos(\bar{u} f_0 \tau) \} = 200 \left[\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \right]$$

$$S_y(f) = |H(jf)|^2 \cdot S_x(f)$$

$$S_y(f) = \frac{500000}{100 + f^2} \left[\frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0) \right]$$

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) df = \frac{1}{2} \frac{5 \cdot 10^5}{100 + f_0^2} + \frac{1}{2} \frac{5 \cdot 10^5}{100 + (-f_0)^2}$$

$$P_y = \frac{5 \cdot 10^5}{100 + f_0^2}$$

u^2	$P(u^2)$	x_i
$u_1 u_1$	0,25	00
$u_1 u_2$	0,15	010
$u_2 u_1$	0,15	011
$u_1 u_3$	0,10	100
$u_3 u_1$	0,10	101
$u_2 u_2$	0,09	1100
$u_2 u_3$	0,06	1101
$u_3 u_2$	0,06	1110
$u_3 u_3$	0,04	1111

b) $L_2 = \sum_{i=1}^9 P(u_i^2) \cdot l_i = 3 \text{ b/simb}(s^2)$

$L = \frac{L_2}{2} = 1,5 \text{ b/simb.}$

$H(u) = 1,4855 \text{ sh/simbol}$

$H(u^2) = 2H(u) = 2,9710 \text{ sh/simb}(s^2)$

$\eta = \frac{H(u^2)}{L_2} = \frac{H(u)}{L} = 99,03 \%$

c) $C = v \cdot \frac{L_2}{2} = vL = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{Simb}}{s} \cdot 1,5 \frac{b}{\text{Simb}} = 7,5 \cdot 10^6 \frac{b}{s}$

8

i	z_4	z_3	z_2	z_1	x_i
1	0	0	0	1	z_1
2	0	0	1	0	z_2
3	0	0	1	1	i_1
4	0	1	0	0	z_3
5	0	1	0	1	i_2
6	0	1	1	0	i_3
7	0	1	1	1	i_4
8	1	0	0	0	z_4
9	1	0	0	1	i_5
10	1	0	1	0	i_6
11	1	0	1	1	i_7
12	1	1	0	0	i_8
13	1	1	0	1	i_9
14	1	1	1	0	i_{10}
15	1	1	1	1	i_{11}

← (15, 11) kod

$z_5 = \sum_{i=1}^{15} x_i$

← (16, 11)

$x_{16} = z_5$

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} x_{16}$
 $z_1 z_2 i_1 z_3 i_2 i_3 i_4 z_4 i_5 i_6 i_7 i_8 i_9 i_{10} i_{11} z_5$

$z_1 = i_1 + i_2 + i_4 + i_5 + i_7 + i_9 + i_{11}$

$z_2 = i_1 + i_3 + i_4 + i_6 + i_7 + i_{10} + i_{11}$

$z_3 = i_2 + i_3 + i_4 + i_8 + i_9 + i_{10} + i_{11}$

$z_4 = i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9 + i_{10} + i_{11}$

9) $i = [\begin{matrix} i_1 & i_4 & i_8 & i_{11} \\ \underline{100} & \underline{1000} & \underline{1001} & \underline{1} \end{matrix}]$

$\Rightarrow z_1 = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 1$

$z_2 = 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 1$

$z_3 = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1$

$z_4 = 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 0$

$x = [\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & & & & & & & & & & & & & \end{matrix}]$

$z_5 = \sum_{i=1}^{15} x_i = 1$

$$y = [1 \overset{1\ 2\ 3\ 4}{0\ 0\ 1} \overset{5\ 6\ 7\ 8}{0\ 0\ 0\ 1} \overset{9\ 10\ 11\ 12}{0\ 0\ 0\ 0} \overset{13\ 14\ 15\ 16}{0\ 0\ 1\ 0}]$$

$$S_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + y_{13} + y_{15} = 0$$

$$S_2 = y_2 + y_3 + y_6 + y_7 + y_{10} + y_{11} + y_{14} + y_{15} = 0$$

$$S_3 = y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} = 0$$

$$S_4 = y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{15} + y_{14} + y_{15} = 0$$

Sindrom je:

$$[S_4 S_3 S_2 S_1] = [0000]$$

što ukazuje da
nema greške na
prvih 15 bita (*)

$$S_5 = \sum_{i=1}^{16} y_i = 1 \Rightarrow \text{ukazuje da ima jednu grešku na svih 16 bita (**)}$$

Na osnovu (*) i (**) najverovatnije je da je greška na 16-tom bitu:

$$\hat{x} = [\overset{z_1}{1} \overset{z_2}{0} \overset{z_3}{1} \overset{z_4}{0} 000 \overset{z_5}{1} 0000 00 \overset{z_5}{1}]$$

$$\hat{i} = [000 0000 0001]$$

← popravljena greška!