Statistička teorija telekomunikacija 28.06.2014.

ISPIT / II kolokvijum

1. (*10 poena*)

(*5p*) Definicija nekorelisanosti i statističke nezavisnosti slučajnih promenljivih.

(*5p*) Kvadratna transformacija jedne slučajne promenljive. Navesti karakterističan primer.

2. (*10 poena*)

(*5p*) Definisati stacionarnost i ergodičnost slučajnog procesa. Navesti primer nestacionarnog i neergodičnog procesa.

(*5p*) Objasniti vremenske i spektralne karakteristike procesa koji se dobija propuštanjem aditivnog belog Gausovog šuma kroz filtar propusnik niskih učestanosti granične učestanosti fg. Objasniti Rajsov model uskopojasnog šuma.

3. (*10 poena*)

(*5p*) Blok šema sistema sa stanovišta teorije informacija. Objasniti funkciju svakog bloka.

(*5p*) Šenon-Fanoov postupak, objasniti i dati jedan primer.

4. *(10 poena)*

(*5p*) Kod sa ponavljanjem bita. Navesti dva moguća kriterijuma odlučivanja.

(*5p*) Napisati generišuću matricu Hemingovog koda sa parametrima (7,4).

5. *(15 poena)* Odrediti raspodelu, srednju vrednost i varijansu slučajne promenljive X čija je karakteristična funkcija data izrazom:

$$F_X(j\Omega) = \frac{9}{(3-j\Omega)^2}.$$

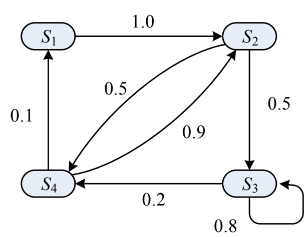
6. *(15 poena)* Na ulazu kanala koji se može aproksimirati idealnim filtrom propusnikom niskih učestanosti granične učestanosti f_g=50 kHz deluje stacionarni slučajni signal čija je autokorelaciona funkcija $R_S(\tau) = 500e^{-\pi(\tau/\alpha)^2}$, gde je $\alpha = 10$µs. U kanalu je prisutan aditivni beli Gausov šum spektralne gustine snage $2\cdot 10^{-5}$ W/Hz. Odrediti odnos snage signala i šuma na izlazu kanala izražen u decibelima.

7. *(15 poena)* Diskretni izvor signala sa memorijom prvog reda opisan je dijagramom stanja prkazanom na slici 7.

a) Odrediti stacionarne verovatnoće stanja (simbola s_i) izvora.

b) Koristeći Hafmenov metod izvršiti statističko kodovanje pridruženog izvora.

c) Izračunati efikasnost kodovanja pridruženog izvora izvršenog u tački (b).



Slika 7

8. (*15 poena*) Pri prenosu kroz kanal vrši se zaštitno kodovanje sistematskim Hemingovim kodom čija je generišuća matrica:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti sve kodne reči koje se mogu generisati u predajniku. Nacrtati spektar koda.

b) Odrediti kontrolnu matricu **H**. Izvršiti dekodovanje ako je u prijemniku detektovana sekvenca 011101.

NAPOMENA: ***Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 180 minuta. Kolokvijum traje 120 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita/kolokvijuma tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita/kolokvijuma.***

Rešenje

(5)

$$f_X(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{ F_X(j\Omega) \right\}\Big|_{\substack{\Omega \Leftrightarrow -2\pi f \\ x \Leftrightarrow t}} = \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{9}{(3-j(-2\pi f))^2} \right\}\Big|_{x \Leftrightarrow t}$$

$$f_X(x) = 9 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{ \frac{1}{(a+j2\pi f)^2} \right\}\Big|_{\substack{a=3 \\ x=t}} = 9xe^{-3x} \quad , \quad x \geq 0$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 9xe^{-3x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} 9x^2 e^{-3x} dx = \dots = 2/3$$

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} 9x^3 e^{-3x} dx = \dots = 2/3$$

ili

$$\overline{X} = \frac{1}{j} \frac{d F_X(j\Omega)}{d\Omega}\Big|_{\Omega=0} = \frac{9}{j} \frac{d}{d\Omega}\left[\frac{1}{(3-j\Omega)^2} \right]\Big|_{\Omega=0}$$

$$\overline{X} = -\frac{9}{j} \frac{1}{(3-j\Omega)^4} \cdot 2 \cdot (3-j\Omega) \cdot (-j)\Big|_{\Omega=0}$$

$$\overline{X} = \frac{18}{(3-j\Omega)^3}\Big|_{\Omega=0} = \frac{18}{3^3} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{j} \frac{d}{d\Omega}\left[\frac{1}{j} \frac{d F_X(j\Omega)}{d\Omega} \right]\Big|_{\Omega=0} = \frac{1}{j} \frac{d}{d\Omega}\left[\frac{18}{(3-j\Omega)^3} \right]\Big|_{\Omega=0}$$

$$\overline{X^2} = -\frac{18}{j} \frac{1}{(3-j\Omega)^6} \cdot 3(3-j\Omega)^2 \cdot (-j)\Big|_{\Omega=0}$$

$$\overline{X^2} = \frac{54}{(3-j\Omega)^4}\Big|_{\Omega=0} = \frac{54}{3^4} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$$

$$Var(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

(6) $R_s(\tau) = 500\, e^{-\pi\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^2}$, $\alpha = 10\cdot 10^{-6}\,s = 10^{-5}\,s$

$$S_s(f) = \mathcal{F}\{R_s(\tau)\} = 500\,\mathcal{F}\left\{e^{-\pi\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)^2}\right\} = 500\cdot\alpha\, e^{-\pi(f\alpha)^2}$$

$$|H(jf)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & |f| > f_g \end{cases} \qquad (f_g = 50\,kHz)$$

Na izlazu kanala:

$$S_{si}(f) = S_s(f)\cdot|H(jf)|^2 = \begin{cases} S_s(f), & |f| \leq f_g \\ 0, & |f| > f_g \end{cases}$$

$$P_{si} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{si}(f)\,df = \int_{-f_g}^{f_g} S_s(f)\,df = 2\int_{0}^{f_g} S_s(f)\,df$$

↑ PARNA FUNKCIJA

$$P_{si} = 1000\cdot\alpha\int_0^{f_g} e^{-\pi\alpha^2 f^2}\,df \quad , \quad \text{smjena: } \sqrt{\pi}\,\alpha f = u, \quad df = \frac{du}{\sqrt{\pi}\,\alpha}$$

$$P_{si} = 1000\cdot\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\alpha}\int_0^{\sqrt{\pi}\alpha f_g} e^{-u^2}\,du$$

$$P_{si} = 500\,\mathrm{erf}(\sqrt{\pi}\,\alpha f_g) = 500\cdot\mathrm{erf}(\sqrt{\pi}\cdot 10^{-5}\cdot 5\cdot 10^{4}) = 500\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$P_{si} = 500\,\mathrm{erf}(0{,}89) = 500\cdot 0{,}79184 = 395{,}92\,W$$

$$S_N(f) = 2\cdot 10^{-5}\,\frac{W}{Hz}$$

$$S_{Ni}(f) = S_N(f)\cdot|H(jf)|^2 = \begin{cases} 2\cdot 10^{-5}, & |f| \leq f_g \\ 0, & |f| \geq f_g \end{cases}$$

$$P_{Ni} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Ni}(f)\,df = 2\cdot f_g\cdot S_N = 2\cdot 5\cdot 10^4\cdot 2\cdot 10^{-5} = 2\,W$$

$$S/N = 10\log_{10}\frac{P_{si}}{P_{Ni}} = 10\log_{10}\frac{395{,}92}{2} \cong 23\,dB$$

⑦ a) $P(s_1) = 0,1\ P(s_4)$

$P(s_2) = 1 \cdot P(s_1) + 0,9\ P(s_4) = P(s_4)$

$P(s_3) = 0,5\ P(s_2) + 0,8\ P(s_3) = 0,5\ P(s_4) + 0,8\ P(s_3) \Rightarrow P(s_3) = 2,5\ P(s_4)$

$P(s_1) + P(s_2) + P(s_3) + P(s_4) = 1 \Rightarrow (0,1 + 1 + 2,5 + 1)\ P(s_4) = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(s_4) = \frac{1}{4,6} = 0,217 \\ P(s_3) = 2,5 \cdot 0,217 = 0,544 \\ P(s_2) = P(s_4) = 0,217 \\ P(s_1) = 0,1 \cdot 0,217 = 0,022 \end{array}}$$

b)

s_i	P_i	x_i				
s_3	0,544	0	0,544	0	0,544	0
s_2	0,217	11	$\boxed{0,239}$	10	$\boxed{0,456}$	1
s_4	0,217	100	0,217	11		
s_1	0,022	101				

c) $L = \sum_{i=1}^{4} P_i \cdot l_i = 0,544 \cdot 1 + 0,217\,(2+3) + 0,022 \cdot 3 = 1,695\ \frac{b}{\text{Simbol}}$

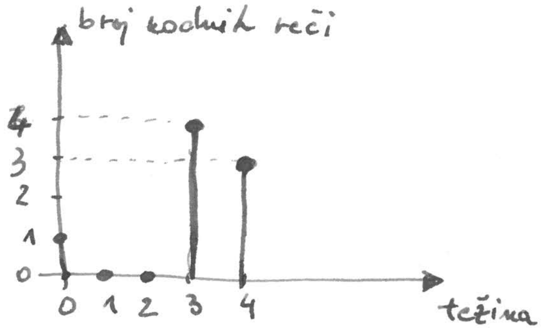
$H(S) = \sum_{i=1}^{4} P_i \cdot ld\,\frac{1}{P_i} = 1,556\ \frac{Sh}{\text{Simbol}}$

$\eta = \frac{H(S)}{L} = 91,8\ \%$

⑧

a) $X = I \cdot G = \begin{bmatrix} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 000 & 000 \\ 001 & 011 \\ 010 & 101 \\ 011 & 110 \\ 100 & 110 \\ 101 & 101 \\ 110 & 011 \\ 111 & 000 \end{array}\right]$

težina
0
3
3
4
3
4
4
3



SPEKTAR KODA

b) $H = \left[P^T \,\vdots\, I \right]$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$y = [011\ 101]$

$s = yH^T = [011\ 101] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \ \ 1 \ \ 1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{[011]}}$

Pošto $s = [011]$ odgovara trećem redu H^T, greška je na 3. bitu:

$\hat{y} = [01\underline{\underline{0}}\ 101] \Rightarrow \hat{i} = [010]$

↑
korigovana
greška