Statistička teorija telekomunikacija 28.08.2014.

1. (*10 poena*)

(*5p*) Binomna raspodela – opis, zakon raspodele, momenti, primer.

(*5p*) Linearna transformacija jedne slučajne promenljive. Navesti karakterističan primer.

2. (*10 poena*)

(*5p*) Formulisati centralnu graničnu teoremu. Kako se pomoću slučajnih promenljivih sa uniformnom raspodelom na intervalu (0,1] može generisati slučajna promenljiva sa Gausovom raspodelom nulte srednje vrednosti i proizvoljne varijanse?

(*5p*) Viner-Hinčinova teorema – formulacija i značaj. Napisati definiciju autokorelacione funkcije slučajnog procesa po ansamblu i po vremenu.

3. (*10 poena*)

(*5p*) Pojam diskretnog izvora s memorijom, pridruženi izvor, entropija pridruženog izvora. Navesti jedan primer za svaki od navedenih pojmova.

(*5p*) Formulacija i dokaz prve Šenonove teoreme. Ilustracija na primeru.

4. *(10 poena)*

(*5p*) Formulacija i komentar druge Šenonove teoreme.

(*5p*) Objasniti način konstrukcije Hemingovog koda sa parametrima (11,7).

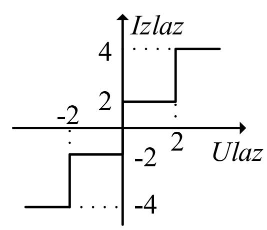
5. *(15 poena)* Posmatraju se dve nezavisne slučajne promenljive X i Y koje imaju Gausovu raspodelu srednje vrednosti 0 i varijanse 100. Odrediti raspodelu slučajnih promenljivih R i Θ koje su definisane relacijama:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}\,,\ \Theta = arctg\left(\frac{Y}{X}\right).$$

6. *(15 poena)* Na ulazu kvantizera sa slike 6 deluje slučajni naponski signal $X(t)$ čija je raspodela amplituda Gausova sa srednjum vrednošću -2V i srednjom snagom 8 W.

a) Odrediti raspodelu amplituda procesa $Y(t)$ na izlazu kvantizera.

b) Odrediti srednju vrednost procesa $Y(t)$.



Slika 6

7. *(15 poena)* Digitalni izvor bez memorije generiše simbole A i B sa verovatnoćom 0.8, i 0.2, respektivno. Za prenos kroz binarni kanal ograničenog kapaciteta potrebno je izvršiti statističko kodovanje izvora tako da se ostvari stepen kompresije veći od 1.3.

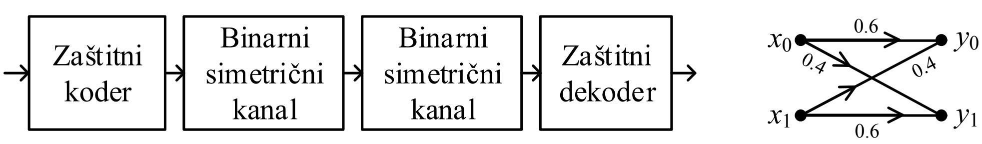
a) Izvršiti statističko kodovanje izvora korišćenjem Hafmenovog postupka tako da se ostvari zahtevani stepen kompresije.

b) Odrediti maksimalni stepen kompresije koji se može ostvariti statističkim kodovanjem datog izvora.

8. (*15 poena*) Telekomunikacioni kanal se sastoji iz dva binarna simetrična kanala (BSK) povezana su na red kao na slici 8a. Binarni kanali su identični i imaju dijagram kao na slici 8b. Prilikom prenosa binarnih simbola kroz kanal može se dodatno koristi zaštitni koder sa ponavljanjem bita tri puta i dekoder koji vrši odlučivanje na bazi majoritetne logike.

a) Odrediti odgovarajuće verovatnoće i nacrtati ekvivalentni dijagram kanala kada se <u>ne koristi</u> zaštitni koder.

b) Odrediti odgovarajuće verovatnoće i nacrtati ekvivalentni dijagram kanala kada se <u>koristi</u> zaštitni koder.



Slika 8

(a) *(b)*

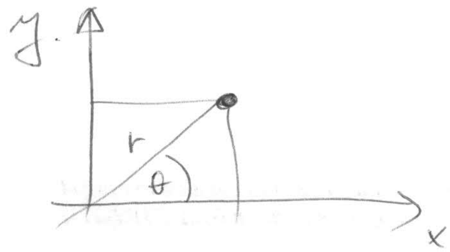
<u>NAPOMENA</u>: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.

5

$R = \sqrt{x^2+y^2} = Q_1(x,y)$ $\quad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$

$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = Q_2(x,y)$

$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$



$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 100 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = 10$

$f_{xy}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{200\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{200}}$

$x = r\cos\theta = s_1(r,\theta)$

$y = r\sin\theta = s_2(r,\theta)$

$$f_{R\theta}(r,\theta) = \frac{f_{xy}(x,y)}{|J|}\Bigg|_{\substack{x=s_1(r,\theta)\\ y=s_2(r,\theta)}} = f_{xy}(x,y)\cdot|J'|\Bigg|_{\substack{x=s_1(r,\theta)\\ y=s_2(r,\theta)}}$$

$$J' = \begin{vmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial r} & \frac{\partial s_2}{\partial r} \\ \frac{\partial s_1}{\partial \theta} & \frac{\partial s_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$f_{R\theta}(r,\theta) = \frac{r}{200\pi} e^{-\frac{r^2}{200}}, \quad r \geq 0, \ \theta \in (0, 2\pi)$$

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R\theta}(r,\theta)\, d\theta = \frac{r}{100} e^{-\frac{r^2}{200}}, \quad r \geq 0$$

$$f_\theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R\theta}(r,\theta)\, dr = \frac{1}{200\pi}\int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{200}} dr$$

$\frac{r^2}{200} = u$

$\frac{2r\,dr}{200} = \frac{r\,dr}{100} = du$

$r\,dr = 100\,du$

$$f_\theta(\theta) = \frac{1}{200\pi} 100 \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

⑥

a)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad \mu_x = -2$$

$$\sigma_x^2 = P_{uk} - \mu_x^2 = 8 - 4 = 4$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 4}} e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 4}}$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x+2)^2/8}}$$

$$P(y=-4) = P(X \le -2) = \int_{-\infty}^{-2} f_X(x)\,dx = \boxed{\frac{1}{2} = P(y=-4)}$$

$$P(y=-2) = P(-2 \le X \le 0) = \int_{-2}^{0} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{0} e^{-(x+2)^2/8}\,dx$$

$$P(y=-2) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{2}{2\sqrt{2}}} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-u^2}\,du$$

Smena

$$\frac{x+2}{2\sqrt{2}} = u$$

$$dx = 2\sqrt{2}\,du$$

$$\boxed{P(y=-2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0{,}34}$$

$$P(y=2) = P(0 \le x \le 2) = \int_{0}^{2} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} e^{-\left(\frac{x+2}{2\sqrt{2}}\right)^2} dx$$

$$P(y=2) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2}{2\sqrt{2}}}^{\frac{4}{2\sqrt{2}}} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{0}^{2/\sqrt{2}} e^{-u^2}\,du - \int_{0}^{1/\sqrt{2}} e^{-u^2}\,du\right]$$

$$\boxed{P(y=2) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \simeq 0{,}14}$$

$$P(y=4) = 1 - \left[P(y=2) + P(y=-2) + P(y=-4)\right]$$

$$\boxed{P(y=4) = 0{,}02}$$

b)

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot P(y_i) = (-4)\cdot\frac{1}{2} + (-2)\cdot 0{,}34 + (2)\cdot 0{,}14 + 4\cdot 0{,}02$$

$$\boxed{\overline{y} = -2{,}32}$$

7

	P_i	x_i
A	0,8	0
B	0,2	1

a)

$\bar{L}_1 = 1$ b/simbol $\qquad \rho_1 = \frac{\lceil ld\, 2 \rceil}{\bar{L}_1} = 1$

	P_i	x_i
AA	0,64	0
AB	0,16	11
BA	0,16	100
BB	0,04	101

$\bar{L}_2 = 1{,}56 \frac{b}{simb} \qquad \rho_2 = \frac{\lceil ld\, 4 \rceil}{1{,}56} = 1{,}28$

	P_i
AAA	0
AAB	100
ABA	101
BAA	110
ABB	11100
BAB	11101
BBA	11110
BBB	11111

$\bar{L}_3 = 2{,}184 \frac{b}{simb} \qquad \rho_3 = \frac{ld\, 8}{2{,}184} = \underline{\underline{1{,}374 > 1{,}3}}$

?

b)

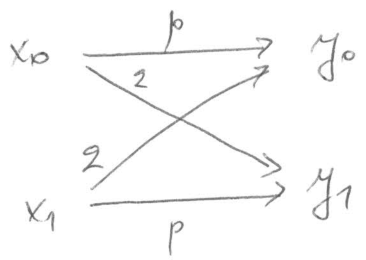
$$\rho = \frac{ld\,(2^n)}{\bar{L}_n} = \frac{n\, ld\, 2}{\bar{L}_n} = \frac{ld\, 2}{\bar{L}_n / n}$$

$$\rho_{max} = \frac{ld\, 2}{\left(\frac{\bar{L}_n}{2}\right)_{min}} = \frac{ld\, 2}{H} = \frac{1}{H}$$

$$H = \sum_{i=1}^{2} s_i\, P(s_i) = 0{,}8\, ld \frac{1}{0{,}8} + 0{,}2 \cdot ld \frac{1}{0{,}2} = 0{,}7219 \frac{sh}{simb}$$

$$\boxed{\rho_{max} = 1{,}3852}$$

8

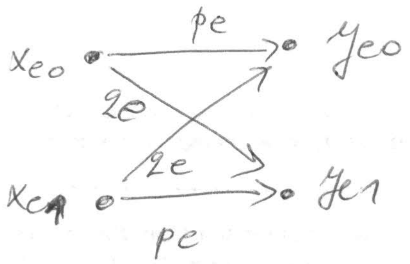


$p = 0{,}7$

$q = 0{,}3$

a) $p_e = p^2 + q^2 = 0{,}58$

$q_e = 2pq = 0{,}42$



b) Verovatnoća greške u kanalu kod koga se primenjuje zaštitno kodovanje je:

$$q_{ez} = \binom{3}{2} q_e^2 p_e + \binom{3}{3} q_e^3 = 3q_e^2 p_e + q_e^3 = 0{,}381$$

$$p_{ez} = 1 - q_{ez} = 0{,}619$$