

1. (10 poena)

(5p) Koji tipovi slučajnih promenljivih postoje? Kako se one mogu kompletno matematički opisati?

(5p) Definicija karakteristične funkcije kontinualne i diskretne slučajne promenljive.

2. (10 poena)

(5p) U čemu je razlika između slučajne promenljive i slučajnog procesa? Objasniti pojam ansambla i ilustrovati ga na jednom primeru.

(5p) Navesti razliku između postupka filtracije i postupka detekcije. Kada se može primeniti jedan a kada drugi postupak? Koji su mere kvaliteta pri primeni postupka filtracije i postupka detekcije?

3. (10 poena)

(5p) Statistički kodovi. Pojam singularnog, jednoznačno dekodabilnog i trenutnog koda. Kodno stablo. Navesti primere.

(5p) Diskretni kanal bez memorije. Kanalna matrica. Šta predstavljaju elementi kanalne matrice?

4. (10 poena)

(5p) Objasniti način konstrukcije Hemingovog koda (8,4). Koliko grešaka ovaj kod može da koriguje a koliko da detektuje?

(5p) Pojam i značaj interlivinga.

5. (15 poena) Funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive X u intervalu $(-\pi, \pi)$ definisana je izrazom $f_X(x) = 0,2 \cdot \delta(x) + a|\sin(x/2)|$. Van intervala $(-\pi, \pi)$ funkcija gustine verovatnoće jednaka je nuli.

a) Odrediti vrednost konstante a .

b) Odrediti i grafički predstaviti kumulativnu funkciju verovatnoće slučajne promenljive X .

6. (15 poena) Na ulazu idealnog filtra propusnika niskih učestanosti čija je granična učestanost 1kHz, deluje slučajni proces $X(t)$. Autokorelaciona funkcija ovog procesa je $R_X(\tau) = 4 \cdot \text{sinc}^2(2000\tau)$. Odrediti srednju snagu slučajnog procesa $Y(t)$ na izlazu filtra.

7. (15 poena) Diskretni izvor signala bez memorije opisan je tabelom 7 pri čemu se simboli izvora emituju brzinom od 10^6 simbola u sekundi.

u_i	u_1	u_2	Tabela 7
P_i	0.95	0.05	

a) Koristeći Šenon-Fanoov postupak izvršiti statističko kodovanje trećeg proširenja originalnog izvora.

b) Odrediti za koliko se procenata može smanjiti kapacitet kanala potreban za prenos poruka upotrebom statističkog koda iz tačke (a) u odnosu na slučaj kada se ne koristi statistički koder. Za koliko se procenata maksimalno može smanjiti kapacitet kanala upotrebom odgovarajućeg statističkog koda?

8. (15 poena) Pri prenosu poruka kroz kanal sa šumom vrši se zaštitno kodovanje sistematskim Hemingovim kodom čija je generišuća matrica:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Odrediti kodnu reč koja odgovara informacionoj reči 1100.

b) Odrediti kontrolnu matricu koda. Pomoću kontrolne matrice proveriti da li je pri prenosu došlo do greške i koja je informaciona reč poslata, ako je primljena reč 1110101.

NAPOMENA: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.

Rešenja zadatka

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \Rightarrow 0,2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx + a \cdot 2 \int_0^{\bar{u}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = 1$

$$0,2 \cdot 1 = 2a \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\bar{u}} = 1$$

$$0,2 - 4a(0-1) = 1$$

$$0,2 + 4a = 1$$

$$a = \frac{1-0,2}{4} = \frac{0,8}{4} = 0,2$$

b) I) $F_x(x) = 0, \quad x \leq -\bar{u}$

II) $-\bar{u} \leq x \leq 0$ (bez tačke $x=0$)

$$F_x(x) = \int_{-\bar{u}}^x 0,2 \cdot \left| \sin \frac{x}{2} \right| dx = -0,2 \cdot \int_{-\bar{u}}^x \sin \frac{x}{2} dx = +0,2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \Big|_{-\bar{u}}^x$$

$$F_x(x) = 0,4 \cdot \left[\cos \frac{x}{2} - \cos\left(-\frac{\bar{u}}{2}\right) \right] = 0,4 \cos \frac{x}{2}$$

$$F_x(0-) = 0,4 \cos \frac{0}{2} = 0,4$$

III) $x=0$

$$F_x(0) = F_x(0-) + \int_{0-}^{0+} f_x(x) dx = F_x(0-) + 0,2 \cdot \int_{0-}^{0+} \delta(x) dx = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$\boxed{F_x(0) = 0,6}$$

IV) $0 \leq x \leq \bar{u}$

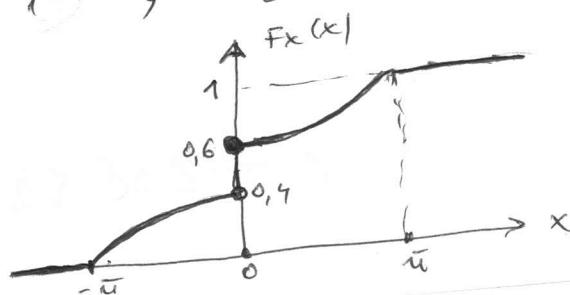
$$F_x(x) = F_x(0) + \int_0^x 0,2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| dx = 0,6 + \int_0^x 0,2 \cdot \sin \frac{x}{2} dx$$

$$F_x(x) = 0,6 + 0,2 \cdot (-2) \cos \frac{x}{2} \Big|_0^x = 0,6 - 0,4 \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{0}{2} \right)$$

$$F_x(x) = 0,6 - 0,4 \cos \frac{x}{2} + 0,4 = 1 - 0,4 \cos \frac{x}{2}$$

$$F_x(\bar{u}) = 1 - 0,4 \cdot \cos \frac{\bar{u}}{2} = 1$$

V) $F_x(x) = 1, \quad x \geq \bar{u}$

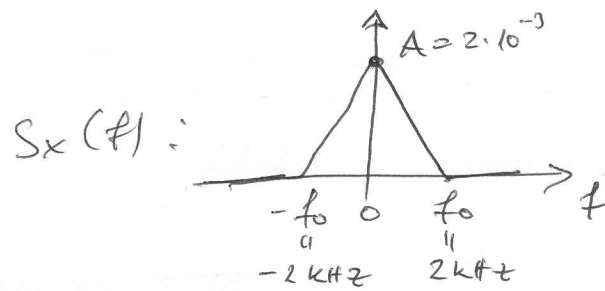


(6)

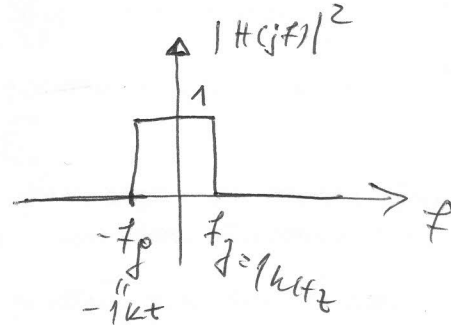
$$R_x(\tau) = 4 \operatorname{sinc}^2(2000\tau)$$

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \mathcal{F}\{4 \operatorname{sinc}^2(2000\tau)\} \Rightarrow \text{grafika}$$

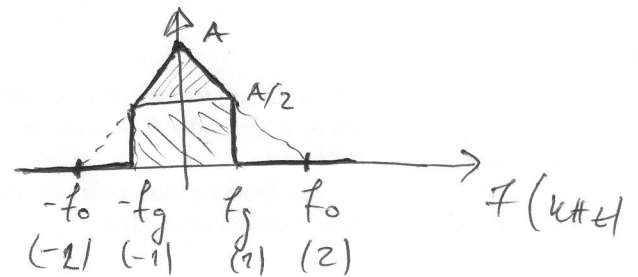
$$f_0 = 2000 \text{ Hz}$$
$$A f_0 = 4$$
$$A = \frac{4}{2 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3}$$



idealni
filtrat:



$S_y(f)$:



$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = 2 \cdot f_g \cdot \frac{A}{2} + 2 \cdot f_g \cdot \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} f_g A$$

$$P_y = \frac{3}{2} \cdot 1 \text{ kHz} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 3 \text{ W}$$

7 a)

S^3	P_i						l_i
$u_1 u_1 u_1$	0,8574	0					1
$u_1 u_1 u_2$	0,0451	1	0	0			3
$u_1 u_2 u_1$	0,0451	1	0	1			3
$u_2 u_1 u_1$	0,0451	1	1	0			3
$u_1 u_2 u_2$	0,0024	1	1	1	0	0	5
$u_2 u_1 u_2$	0,0024	1	1	1	0	1	5
$u_2 u_2 u_1$	0,0024	1	1	1	1	0	5
$u_2 u_2 u_2$	0,0001	1	1	1	1	1	5

b) $H(S^3) = 3 H(S) = 3 \cdot \left(\overset{0,95}{\log \frac{1}{0,95}} + \overset{0,05}{\log \frac{1}{0,05}} \right) = 0,8592 \frac{\text{sh}}{\text{Simbol}^3}$

$L_{NS} = L_{\text{nestatističko}} = 3 \text{ b/simbol}^3$ (8 poruka \Rightarrow 3 bita)

$L_S = L_{\text{statističko}} = \sum_{i=1}^8 P_i \cdot l_i = 1 \cdot 0,8574 + 3 \cdot (3 \cdot 0,0451) + 3 \cdot (5 \cdot 0,0024) + 5 \cdot 0,0001 = 1,2998 \text{ b/simbol}^3$

SMANJIĆE SE ZA:

$C_{NS} = L_{NS} \cdot \sqrt[3]{3} \Rightarrow$
 $C_S = L_S \cdot \sqrt[3]{3}$

$\frac{C_{NS} - C_S}{C_{NS}} = \frac{L_{NS} - L_S}{L_{NS}} = 0,5667 = 56,67\%$

$L_{IS} = L_{\text{idealni statisti}} = H(S^3) =$

$C_{IS} = L_{IS} \cdot \sqrt[3]{3}$

SMANJIĆE SE ZA:

$\frac{C_{NS} - C_{IS}}{C_{NS}} = \frac{L_{NS} - L_{IS}}{L_{NS}} = 0,7136 = 71,36\%$

⊗

a) $i = [1100]$

$$x = i \cdot G = [1100] \cdot \begin{bmatrix} 1000 & | & 110 \\ 0100 & | & 101 \\ 0010 & | & 011 \\ 0001 & | & 111 \end{bmatrix} = [1100 | 011]$$

b)

$$H = \begin{bmatrix} 0111 & | & 100 \\ 1011 & | & 010 \\ 1101 & | & 001 \end{bmatrix}$$

H wloane \Rightarrow greske
ne
2. bitu

$$y = [1110101]$$

$$S = y \cdot H^T = [1110101] \cdot \begin{bmatrix} 011 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \\ \hline 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} = [101]$$

$$\hat{y} = [1010101]$$

↑
ovde je bit
greske

$$\hat{i} = [1010]$$