

1. (10 poena)

(5p) Definicija karakteristične funkcije kontinualne i diskretne slučajne promenljive.

(5p) Uniformna raspodela – opis, funkcija gustine verovatnoće, momenti, primer.

2. (10 poena)

(5p) Objasniti sličnosti i razlike između spektara periodičnih, aperiodičnih i slučajnih signala signala. Navesti karakteristične primere.

(5p) Objasniti pojam srednje kvadratne greške. Kako se određuje optimalni filter po Vineru? Napisati Viner-Hopfovu jednačinu i objasniti je.

3. (10 poena)

(5p) Blok šema sistema sa stanovišta teorije informacija. Objasniti funkciju svakog bloka.

(5p) Prenesena informacija (međuinformacija) – napisati izraz i objasniti šta on predstavlja, koji značaj ima. Posebno napisati izraz za prenesenu informaciju u slučaju binarnog simetričnog kanala.

4. (10 poena)

(5p) Kod sa ponavljanjem bita n puta. Navesti dva moguća kriterijuma odlučivanja.

(5p) Pojam i značaj interlivinga.

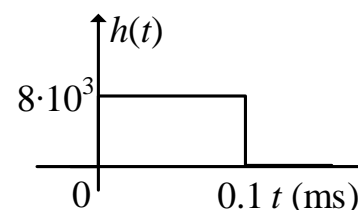
5. (15 poena) Data je slučajna promenljiva X koja ima Gausovu raspodelu nulte srednje vrednosti i varijanse 4. Slučajna promenljiva X transformiše se u slučajnu promenljivu Y na sledeći način:

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 2(x-1), & x > 1 \end{cases}$$

a) Odrediti funkciju gustine verovatnoće slučajne promenljive Y .

b) Odrediti srednju vrednost slučajne promenljive Y .

6. (15 poena) Na ulazu linearnog komunikacionog kanala, čiji je impulsni odziv prikazan na slici 6, deluje beli šum spektralne gustine snage $S_X = 10^{-5}$ W/Hz. Odrediti autokorelacionu funkciju i srednju snagu slučajnog signala $Y(t)$ na izlazu kanala.



Slika 6

7. (15 poena) Digitalni izvor bez memorije generiše simbole A , B i C sa verovatnoćom 0.2, 0.2 i 0.6, respektivno. Brzina generisanja simbola originalnog izvora iznosi 10^4 simbol/s. Za prenos simbola kroz binarni kanal potrebno je prethodno izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja izvora korišćenjem Hafmenovog postupka.

a) Izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja izvora i odrediti koeficijent efikasnosti koda.

b) Odrediti brzinu generisanja binarnih simbola i informacioni fluks na izlazu statističkog koda iz tačke (a).

8. (15 poena) Pri prenosu poruka kroz kanal sa šumom vrši se zaštitno kodovanje Hemingovim kodom (12,7).

a) Odrediti generišuću matricu \mathbf{G} .

b) Odrediti kontrolnu matricu \mathbf{H} .

c) Ako su primljene reči (0100 0001 0001) i (0001 1000 0000), odrediti sindrome za obe primljene reči i izvršiti dekodovanje ukoliko je to moguće.

NAPOMENA: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.

Za drugi kolokvijum rade se pitanja 3 i 4 i zadaci 7 i 8. Kolokvijum traje 120 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje kolokvijuma tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja kolokvijuma.

5) a) $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$ $\sigma_x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 2}$

$x \leq 1$:

$$P(y=0) = P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^1 f_x(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f_x(x) dx}_{= \frac{1}{2}} + \int_0^1 f_x(x) dx$$

$$P(y=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

Substitua: $\frac{x^2}{2\sigma_x^2} = u$

$$P(y=0) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2\sigma_x^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2\sigma_x^2}}} e^{-u^2} du$$

$$P(y=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2\sigma_x^2}}} e^{-u^2} du \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma_x^2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{P(y=0) \approx 0,692}$

$x > 1$:

$$f_y(y) = \frac{f_x(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \Bigg|_{x = \frac{y+2}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{\left(\frac{y+2}{2}\right)^2}{2\sigma_x^2}}}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2(x-1) = 2x-2 & \left| \frac{dy}{dx} \right| = 2 \\ x = \frac{y+2}{2} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma_x)^2} e^{-\frac{(y+2)^2}{2(2\sigma_x)^2}} + P(y=0) \delta(y), y \geq 0$$

b) $\bar{y} = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) \cdot y dy = P(y=0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) y dy + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma_x)^2} e^{-\frac{(y+2)^2}{2(2\sigma_x)^2}} y dy$

$$\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma_x)^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2(2\sigma_x)^2}} (u-2) du \quad \left(\text{Substitua: } u = y+2 \right)$$

$y = u-2$
 $du = dy$

$$\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma_x)^2} \left[\int_2^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2(2\sigma_x)^2}} u du - 2 \int_2^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2(2\sigma_x)^2}} du \right]$$

Substitua: $\frac{u^2}{2(2\sigma_x)^2} = t$
 $\frac{u du}{(2\sigma_x)^2} = dt$

Substitua: $\frac{u}{\sqrt{2(2\sigma_x)^2}} = t$
 $du = \sqrt{2(2\sigma_x)^2} dt$

$$\bar{y} = \frac{(2\sigma_x)^2}{\sqrt{2\pi}(2\sigma_x)^2} \int_{\frac{2}{(2\sigma_x)^2}}^{\infty} e^{-t} dt - \frac{2\sqrt{2}(2\sigma_x)^2}{\sqrt{2\pi}(2\sigma_x)^2} \int_{\frac{2}{\sqrt{2}(2\sigma_x)^2}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\bar{y} = \frac{2\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} (-e^{-t}) \Big|_{\frac{2}{(2\sigma_x)^2}}^{\infty} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2}{\sqrt{2}(2\sigma_x)^2}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\bar{y} = \frac{2\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{2}{(2\sigma_x)^2}} - \operatorname{erfc}\left(\frac{2}{\sqrt{2}(2\sigma_x)^2}\right)$$

$$\bar{y} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}} - \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\boxed{\bar{y} = 0,792}$$

6

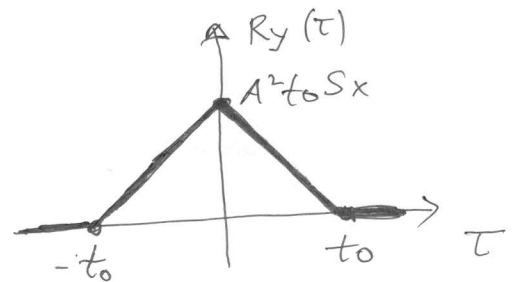
$$H(jf) = A t_0 \frac{\sin(\bar{u} f t_0 / 2)}{\bar{u} f t_0 / 2} e^{-j \bar{u} f t_0 / 2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{tablica + pomeraj} \\ \text{za } \frac{t_0}{2} \text{ uravnevanje} \end{array}$$

$$|H(jf)|^2 = (A t_0)^2 \frac{\sin^2(\bar{u} f t_0 / 2)}{(\bar{u} f t_0 / 2)^2} \leftarrow \begin{array}{l} \text{mada pomeraj u vremenu} \\ \text{nije neophodan jer...} \end{array}$$

$$S_y(f) = |H(jf)|^2 \cdot S_x(f) = (A t_0)^2 S_x \cdot \left(\frac{\sin(\bar{u} f t_0)}{\bar{u} f t_0}\right)^2$$

$$S_y(f) = (A^2 t_0 S_x) \cdot t_0 \left(\frac{\sin(\bar{u} f t_0)}{\bar{u} f t_0}\right)^2$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}\{S_y(f)\} \xrightarrow{\text{tablica}}$$



$$P_y = R_y(0) = A^2 t_0 S_x = (8 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5}$$

$$P_y = 64 \cdot 10^{-3} = 64 \text{ mW}$$

7

9)

s^2	$P(s^2)$	x_i	l_i
CC	0,36	00	2
CB	0,12	100	3
BC	0,12	101	3
CA	0,12	010	3
AC	0,12	011	3
BB	0,04	1110	4
BA	0,04	1111	4
AB	0,04	1100	4
AA	0,04	1101	4

$$L_2 = \sum_{i=1}^9 P(s_i^2) l_i = 2,8 \frac{6}{\text{Simbol}(s^2)}$$

$$H(s) = \sum_{i=1}^3 P(s_i) \log_2 \frac{1}{P(s_i)} = 1,3710 \frac{8h}{\text{Simbol}}$$

$$H(s^2) = 2H(s) = 2,7419 \frac{8h}{\text{Simbol}(s^2)}$$

$$\eta = \frac{H(s^2)}{L_2} = \frac{H(s)}{L_2/2} = 97,93\%$$

0,36	00	0,36	00	0,36	00	0,36	00	0,36	00	0,36	00	0,40	1	0,60	0
0,12	100	0,12	100	0,12	100	0,16	11	0,24	01	0,36	01	0,36	00	0,40	1
0,12	101	0,12	101	0,12	101	0,12	100	0,16	11	0,24	10	0,24	01		
0,12	010	0,12	010	0,12	010	0,12	101	0,12	100	0,16	11				
0,12	011	0,12	011	0,12	011	0,12	010	0,12	101						
0,04	1110	0,08	110	0,08	110	0,12	011								
0,04	1111	0,04	1110	0,08	111										
0,04	1100	0,04	1111												
0,04	1101														

b)
$$P(0) = \frac{0,36 \cdot 2 + 0,12 \cdot (2+1+2+1) + 0,04 \cdot (4)}{L_2} = 0,5714$$

$$P(1) = 1 - P(0) = 0,4286$$

$$H(x) = P(0) \log_2 \frac{1}{P(0)} + P(1) \log_2 \frac{1}{P(1)} = 0,9852 \left[\frac{8h}{\text{Simbol}(x)} = \frac{8h}{b} \right]$$

$$v(x) = v(s) \cdot \frac{L_2}{2} = 10^4 \frac{\text{Simbol}(s)}{\text{Sec}} \cdot 1,4 \frac{6}{\text{Simbol}(s)}$$

$$v(x) = 14 \text{ kb/s}$$

$$\phi(x) = H(x) \cdot v(x) = 13,79 \text{ KSh/s}$$

8)

$z_4 z_3 z_2 z_1$	
0001	$x_1 = z_1$
0010	$x_2 = z_2$
0011	$x_3 = i_1$
0100	$x_4 = z_3$
0101	$x_5 = i_2$
0110	$x_6 = i_3$
0111	$x_7 = i_4$
1000	$x_8 = z_4$
1001	$x_9 = i_5$
1010	$x_{10} = i_6$
1011	$x_{11} = i_7$
	$x_{12} = z_5$

$$z_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7$$

$$z_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7$$

$$z_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$z_4 = i_5 \oplus i_6 \oplus i_7$$

$$z_5 = \sum_{k=1}^7 x_k = z_1 \oplus z_2 \oplus i_1 \oplus z_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus z_4 \oplus i_5 \oplus i_6 \oplus i_7$$

$$z_5 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_5 \oplus i_6$$

~~XXXXXXXX~~

$$X = [x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}] = [i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 i_7]$$

1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

G

$$y = X \oplus e$$

$$b) S_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11}$$

$$S_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11}$$

$$S_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7$$

$$S_4 = y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11}$$

$$S_5 = \sum_{k=1}^{12} y_k$$

1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	0	1
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	0	0	1

H^T

$$S = [S_1 S_2 S_3 S_4 S_5] = y \cdot H^T = [y_1 y_2 \dots y_{12}]$$

$$c) y = [0100 \ 0001 \ 0001]$$

$$S = y \cdot H^T = [01011]$$

$$S_{4321} = 1010_2 = 10 \Rightarrow \hat{x} = [0100 \ 0001 \ 0101]$$

$$S_5 = 1$$

$$\hat{z} = [0000010]$$

$$y = [0001 \ 1000 \ 0000]$$

$$S = y \cdot H^T = [10000]$$

$$S_{4321} = 0001_2 = 1 \Rightarrow S_5 = 0$$

Sindrom $S_{4321} \neq 0$ što ukazuje na postojanje greške.

Posto je $S_5 = 0$ to je najverovatnije došlo do dve greške (paran broj) te se ne može izvršiti korekcija