

1. (10 poena)

(5p) Definirati n -ti početni moment, n -ti apsolutni moment i n -ti centralni moment kontinualne slučajne promenljive.

(5p) Linearna transformacija jedne slučajne promenljive. Navesti karakterističan primer.

2. (10 poena)

(5p) Definirati stacionarnost i ergodičnost slučajnog procesa. Navesti primer nestacionarnog i neergodičnog procesa.

(5p) Navesti razliku između postupka filtracije i postupka detekcije. Kada se može primeniti jedan a kada drugi postupak? Koji su mere kvaliteta pri primeni postupka filtracije i postupka detekcije?

3. (10 poena)

(5p) Pojam diskretnog izvora s memorijom, pridruženi izvor, entropija pridruženog izvora. Navesti jedan primer za svaki od navedenih pojmova.

(5p) Formulacija i dokaz prve Šenonove teoreme. Ilustracija na primeru.

4. (10 poena)

(5p) Objasniti način konstrukcije Hemingovog koda sa parametrima (11,7).

(5p) Za generišuću matricu

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ispisati sve kodne reči i odrediti spektar kodnih rastojanja odgovarajućeg koda.

5. (15 poena) Data je slučajna promenljiva X čija je funkcija gustine verovatnoće: $f_X(x) = A \cdot e^{-0,25 \cdot |x|}$, $-\infty < x < +\infty$. Slučajna promenljiva X transformiše se u slučajnu promenljivu Y na sledeći način:

$$y = \begin{cases} 0; & x \leq 2 \\ 0,25 \cdot x - 0,5; & x > 2 \end{cases}$$

a) (2 poena) Odrediti konstantu A .

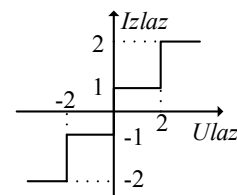
b) (10 poena) Odrediti i grafički predstaviti funkciju gustine verovatnoće slučajne promenljive Y .

c) (3 poena) Odrediti verovatnoću da slučajna promenljiva Y uzima vrednosti koje su manje od 0,5.

6. (15 poena) Na ulazu kvantizera sa slike 6 deluje slučajni naponski signal $X(t)$ čija je raspodela amplituda Gausova sa srednjom vrednošću 0 V i srednjom snagom 8 W.

a) Odrediti raspodelu amplituda procesa $Y(t)$ na izlazu kvantizera.

b) Odrediti srednju snagu procesa $Y(t)$.



Slika 6

7. (15 poena) Digitalni izvor bez memorije generiše simbole A , B i C sa verovatnoćom 0.65, 0.2 i 0.15, respektivno. Za prenos simbola kroz binarni kanal čiji je protok 10 Mb/s potrebno je prethodno izvršiti statističko kodovanje izvora.

a) (10 poena) Izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja izvora korišćenjem Šenom-Fanoovog postupka.

b) (2 poena) Odrediti koeficijent efikasnosti i kompresije koda iz tačke (a).

c) (3 poena) Odrediti maksimalnu moguću brzinu generisanja simbola originalnog izvora tako da se omogući prenos kroz dati kanal korišćenjem statističkog kodera iz tačke (a).

8. (15 poena) Jedan komunikacioni kanal sastoji se iz tri identične kaskadno povezane deonice. Svaka deonica može se predstaviti kao binarni simetrični kanal (BSK) sa verovatnoćom greške u kanalu $q = 10^{-3}$.

a) (5 poena) Odrediti parametre kanalne matrice ekvivalentnog kanala koji se sastoji iz tri BSK deonice.

b) (5 poena) Izračunati kapacitet komunikacionog kanala.

c) (5 poena) Ako se pri prenosu kroz kanal koristi zaštitno kodovanje sa ponavljanjem bita 3 puta, odrediti verovatnoću pogrešnog prijema bita na prijemu.

NAPOMENA: Za popravku prvog kolokvijuma rade se pitanja 1 i 2 i zadaci 5 i 6, a za popravku drugog kolokvijuma rade se pitanja 3 i 4 i zadaci 7 i 8. Kolokvijum traje 120 minuta. Kompletan ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita i kolokvijuma tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita, odnosno popravnog kolokvijuma.

4.9.2015.

Statističeská teorie telekomunikace

5) a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$
 $2A \int_0^{\infty} e^{-0,25x} dx = 2A \left(-\frac{1}{0,25} \right) e^{-0,25x} \Big|_0^{\infty} = -8A(0-1) = 8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$

b) $f_y(y) = \frac{f_x(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \Big|_{x=4y+2}$
 $y = 0,25x - 0,5$
 $x = \frac{y+0,5}{0,25} = 4y+2$

$f_y(y) = \frac{\frac{1}{8} e^{-0,25(4y+2)}}{0,25} = \frac{1}{2} e^{-(y+0,5)}, y > 0$

$P(y=0) = P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^2 f_x(x) dx$

$P(y=0) = \underbrace{\frac{1}{8} \int_{-\infty}^0 e^{+0,25x} dx}_{= \frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \int_0^2 e^{-0,25x} dx$

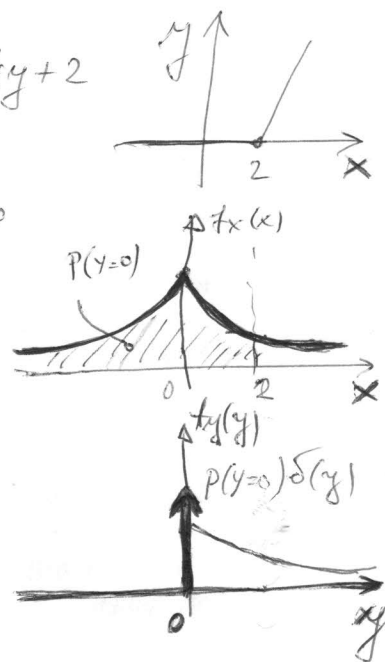
$P(y=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot (-4) e^{-0,25x} \Big|_0^2$

$P(y=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right) = 0,6967$

c) $P(y < 0,5) = \int_{-\infty}^{0,5} f_y(y) dy = \int_{-\infty}^0 P(y=0) \delta(y) dy + \int_0^{0,5} \frac{1}{2} e^{-(y+0,5)} dy$

$P(y < 0,5) = P(y=0) + \frac{1}{2} (-1) e^{-(y+0,5)} \Big|_0^{0,5}$

$= \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{e}} \right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2e} \right) = 1 - \frac{1}{2e} = 0,816$



6) a) $X: f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma^2 = 8 \rightarrow \sigma = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$P(y=2) = P(X > 2) = \int_2^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_2^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$ $\frac{x}{\sqrt{2\sigma}} = u$

$P(y=2) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(0,5) = 0,2398$

$P(y=1) = P(0 < X < 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\sigma}} e^{-u^2} du$

$P(y=1) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(0,5) = 0,2602$

$P(y=-1) = P(y=1) = 0,2602$

$P(y=-2) = P(y=2) = 0,2398$

b) $\overline{y^2} = \sum_{i=1}^4 y_i^2 \cdot P(y_i) = 2 \cdot [1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(y=2)] = 2,4386$

7) a)

	P_i					a_i
AA	0,4225	0	0			2
AB	0,1300	0	1			2
BA	0,1300	1	0	0		3
AC	0,0975	1	0	1		3
CA	0,0975	1	1	0		3
BB	0,0400	1	1	1	0	5
BB	0,0300	1	1	1	0	5
CB	0,0300	1	1	1	1	5
CC	0,0225	1	1	1	1	5

b) $L_2 = \sum_{i=1}^9 P_i^2 = 2,6925 \frac{b}{\text{Symbol}^2}$

$H_2 = 2 \cdot [0,65 \cdot \log \frac{1}{0,65} + 0,2 \cdot \log \frac{1}{0,2} + 0,15 \cdot \log \frac{1}{0,15}]$

$H_2 = 2,5578 \frac{\text{Sh}}{\text{Symbol}^2}$

$\eta = \frac{H_2}{L_2} = 95\%$

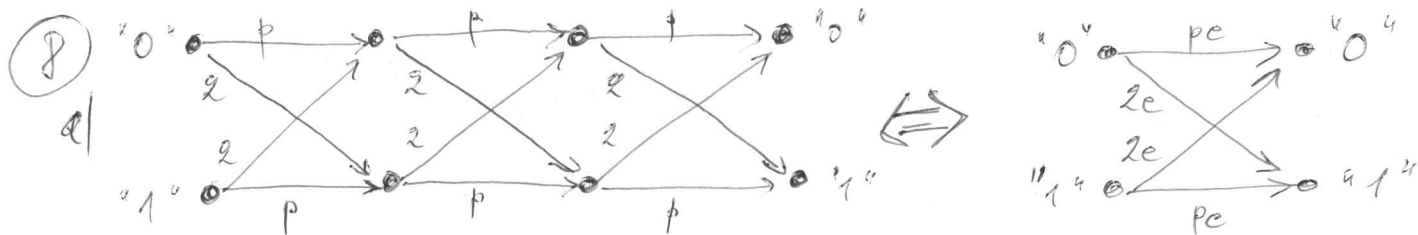
$\xi = \frac{\lfloor \log 9 \rfloor}{L_2} = \frac{4}{L_2} = 1,4856$

c) $v_b \leq 10 \text{ Mb/s}$

$v_b = \frac{L_2}{T} \cdot v_s \leq 10 \text{ Mb/s}$

$v_s \leq 10 \text{ Mb/s} \cdot \frac{T}{2,6925 \text{ b/symbol}}$

$v_s \leq 7,428 \text{ M Symbol/s}$



$$p_e = p^3 + p q^2 \binom{3}{1} = 0,997$$

$$q_e = p^2 q \binom{3}{1} + q^3 = 0,003$$

b) $I(x,y) = H(y) - H(y|x)$

$$H(y|x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P(x_i) P(y_j|x_i) \log \frac{1}{P(y_j|x_i)}$$

$$= P(0) \left[p_e \log \frac{1}{p_e} + 2e \cdot \log \frac{1}{2e} \right] + P(1) \cdot \left[2e \log \frac{1}{2e} + p_e \log \frac{1}{p_e} \right]$$

$$= p_e \log \frac{1}{p_e} + 2e \log \frac{1}{2e}$$

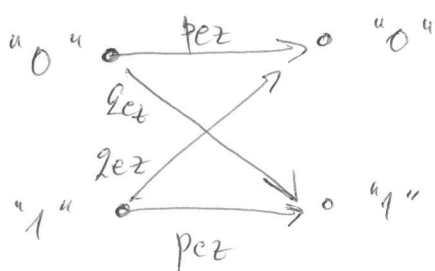
$$C = \max_{P(x)} I(x,y) = 1 - \left[p_e \log \frac{1}{p_e} + 2e \log \frac{1}{2e} \right]$$

$$C = 0,9706 \text{ Sh/Simb}$$

c) $P_{\Sigma} = P(0) \cdot P_{\Sigma}(0) + P(1) \cdot P_{\Sigma}(1)$

$$P_{\Sigma}(0) = P_{\Sigma}(1) = 2e = 0,003$$

$$P_{\Sigma} = 2e \left[P(0) + P(1) \right] = 2e = 0,003 \quad (\text{БЕЗ ЗАШТИТНОГ КОДА})$$



$$p_{ez} = p_e^3 + \binom{3}{1} p_e^2 2e = 1 - 2e z$$

$$q_{ez} = 2e^3 + \binom{3}{2} p_e 2e^2 = 2,68 \cdot 10^{-5}$$

$$P_{\Sigma z} = q_{ez} = 2,68 \cdot 10^{-5}$$