

1. (10 poena)

(5p) Napisati vezu između funkcije gustine verovatnoće i funkcije raspodele jedne slučajne promenljive. Koje su njihove osobine?

(5p) Binomna raspodela – opis, zakon raspodele, momenti, primer.

2. (10 poena)

(5p) Viner-Hinčinova teorema – formulacija i značaj. Napisati definiciju autokorelacione funkcije slučajnog procesa po ansamblu i po vremenu.

(5p) Sinusoida sa slučajnom fazom – funkcija gustine verovatnoće, momenti, autokorelaciona funkcija, SGSS. Sličnosti i razlike sa determinističkim prostoperiodičnim signalom. Šta se može postići sumiranjem većeg broja sinusoida sa slučajnom fazom?

3. (10 poena)

(5p) Blok šema sistema sa stanovišta teorije informacija. Objasniti funkciju svakog bloka.

(5p) Statistički kodovi. Pojam singularnog, jednoznačno dekodabilnog i trenutnog koda. Kodno stablo. Navesti primere.

4. (10 poena)

(5p) Formulacija i komentar druge Šenonove teoreme.

(5p) Definicija linearnog blok koda. Napisati sve kodne reči jednog takvog koda (po izboru), napisati generišuću matricu tog koda i prikazati je u sistematskoj formi.

5. (15 poena) Date su dve nezavisne slučajne promenljive X i Y sa uniformnom raspodelom u intervalu $[0, +\pi]$ i $[-\pi, 0]$, respektivno. Odrediti gustinu verovatnoće slučajne promenljive koja je definisana izrazom: $Z = X - Y$.

6. (15 poena) Posmatra se prenos informacija kroz telekomunikacioni kanal koji se može aproksimirati idealnim NF filtrom granične učestanosti $f_g = 4$ kHz. Autokorelaciona funkcija signala na predaji može se predstaviti izrazom:

$$R_X(\tau) = A^2 e^{-2c|\tau|}, \text{ gde je } c = 8000.$$

Odrediti za koliko decibela oslabi srednja snaga signala na prijemu.

7. (15 poena) Digitalni izvor bez memorije generiše simbole A , B brzinom $2 \cdot 10^6$ simbol/s, pri čemu su verovatnoće generisanja simbola 0.8 i 0.2, respektivno.

a) (2p) Odrediti najmanji binarni protok kroz kanal, potreban za prenos simbola, ako se ne vrši statističko kodovanje.

b) (8p) Izvršiti statističko kodovanje trećeg proširenja izvora korišćenjem Hafmenovog postupka.

c) (5p) Odrediti najmanji binarni protok kroz kanal, potreban za prenos simbola, ako se koristi koder iz tačke (b).

8. (15 poena) Za prenos signala kroz binarni kanal sa šumom koristi se zaštitni Hemingov kod koji obezbeđuje istovremenu detekciju dve greške i korekciju jedne greške.

a) (10p) Izvršiti konstrukciju Hemingovog koda (12,7) koji zadovoljava postavljene uslove za istovremenu detekciju dve i korekciju jedne greške. Odrediti generišuću matricu G i kontrolnu matricu H .

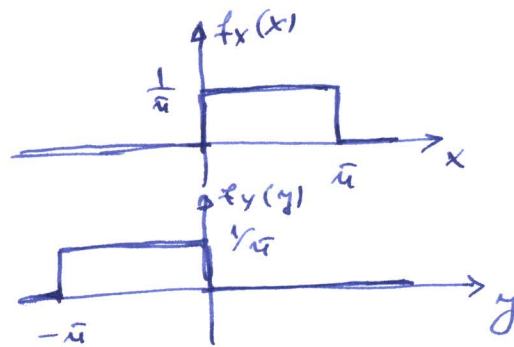
b) (5p) Ako su na izlazu iz kanala primljene reči (1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0) i (1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1), odrediti odgovarajuće sindrome, komentarisati dobijene rezultate i izvršiti dekodovanje ukoliko je to moguće.

NAPOMENA: Za popravku prvog kolokvijuma rade se pitanja 1 i 2 i zadaci 5 i 6, a za popravku drugog kolokvijuma rade se pitanja 3 i 4 i zadaci 7 i 8. Kolokvijum traje 120 minuta. Kompletan ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita i kolokvijuma tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita, odnosno popravnog kolokvijuma.

5) $f_x(x) = \begin{cases} 1/\bar{u}, & 0 \leq x \leq \bar{u} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

$f_y(y) = \begin{cases} 1/\bar{u}, & -\bar{u} \leq y \leq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

$f_{xy}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{u}^2}, & 0 \leq x \leq \bar{u} \\ & -\bar{u} \leq y \leq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

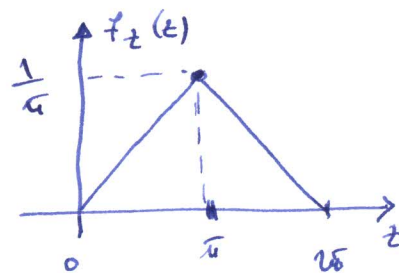


$z = x - y$

$\begin{cases} z = Q_1(x,y) = x - y \\ w = Q_2(x,y) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = S_1(z,w) = z + w \\ y = S_2(z,w) = w \end{cases}$

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial x} & \frac{\partial Q_1}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial x} & \frac{\partial Q_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$f_{zw}(z,w) = \frac{f_{xy}(x,y)}{|J|} \Big|_{\substack{x=z+w \\ y=w}} = \begin{cases} \frac{1}{\bar{u}^2}, & 0 \leq z+w \leq \bar{u} \Leftrightarrow -z \leq w \leq \bar{u}-z \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$



$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{zw}(z,w) dw$

1) $z \leq 0$ ili $z \geq 2\bar{u}$

$f_z(z) = 0$

2) $0 \leq z \leq \bar{u}$

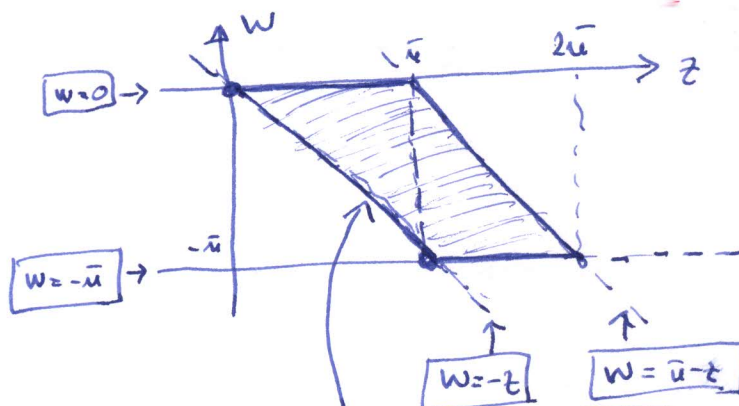
$f_z(z) = \int_{-z}^0 \frac{1}{\bar{u}^2} dw = \left. \frac{1}{\bar{u}^2} w \right|_{-z}^0 = \frac{1}{\bar{u}^2} (0 + z)$

$f_z(z) = z/\bar{u}^2$

3) $\bar{u} \leq z \leq 2\bar{u}$

$f_z(z) = \int_{-\bar{u}}^{\bar{u}-z} \frac{1}{\bar{u}^2} dw = \left. \frac{1}{\bar{u}^2} w \right|_{-\bar{u}}^{\bar{u}-z} = \frac{1}{\bar{u}^2} (\bar{u} - z + \bar{u})$

$f_z(z) = \frac{2\bar{u} - z}{\bar{u}^2}$



oblast za integraciju u kojoj je $f_{zw}(z,w) = 1/\bar{u}^2$, inače je $f_{zw}(z,w) = 0$.

6

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

$$S_x(f) = A^2 \mathcal{F}\left\{e^{-2c|\tau|}\right\} = A^2 \mathcal{F}\left\{e^{-\frac{|\tau|}{\frac{1}{2c}}}\right\}$$

$$S_x(f) = A^2 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2c}}{1 + \left(2\bar{u}f \cdot \frac{1}{2c}\right)^2}$$

$$S_x(f) = \frac{A^2/c}{1 + (\bar{u}f/c)^2}$$

$$|H(jf)| = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & |f| > f_g \end{cases}$$

$$S_y(f) = |H(jf)|^2 \cdot S_x(f)$$

$$S_y(f) = \begin{cases} \frac{A^2/c}{1 + (\bar{u}f/c)^2}, & |f| \leq f_g \\ 0, & |f| > f_g \end{cases}$$

$$P_x = R_x(0) = A^2$$

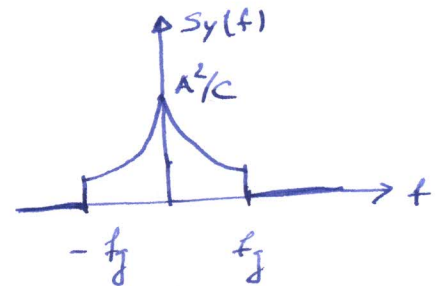
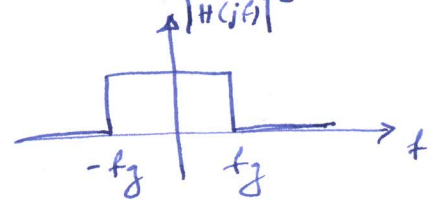
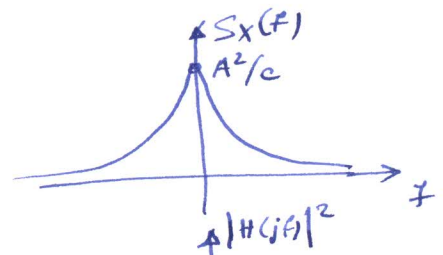
$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) df = \int_{-f_g}^{f_g} \frac{A^2/c}{1 + (\bar{u}f/c)^2} df = \frac{2A^2}{c} \int_0^{f_g} \frac{df}{1 + \left(\frac{\bar{u}f}{c}\right)^2}$$

substitution:
 $\frac{\bar{u}f}{c} = u$

$$P_y = \frac{2A^2}{c} \cdot \frac{c}{\bar{u}} \int_0^{\frac{\bar{u}f_g}{c}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2A^2}{\bar{u}} \arctan\left(\frac{\bar{u}f_g}{c}\right) = \frac{2A^2}{\bar{u}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P_y = 0,6391 \cdot A^2$$

$$\left(\frac{P_y}{P_x}\right)_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{0,6391 A^2}{A^2}\right) = -1,94 \text{ dB}$$



7 a)

S_i	P_i	X_i
A	0,8	0
B	0,2	1

$$L = 1 \frac{b}{\text{simbol}}$$

$$V = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{simbol}}{s}$$

$$V_b = V \cdot L = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{simbol}}{s} \cdot 1 \frac{b}{\text{simbol}} = \boxed{2 \text{ Mb/s} = V_b}$$

b)

S_i^3	P_i^3	X_i^3	L_i^3
AAA	0,512	0	1
BAA	0,128	100	3
ABA	0,128	101	3
AAB	0,128	110	3
ABB	0,032	111 00	5
BAB	0,032	111 01	5
BBA	0,032	111 10	5
BBB	0,008	111 11	5

c)

$$L_3 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^8 P_i^3 L_i^3 = 0,728 \frac{b}{\text{simbol}}$$

$$V_{b3} = V \cdot L_3 / 3 = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{simbol}}{s} \cdot 0,728 \frac{b}{\text{simbol}}$$

$$\boxed{V_{b3} = 1,456 \text{ Mb/s}}$$

8 a)

$Z_4 Z_3 Z_2 Z_1$	
0001	$X_1 = Z_1$
0010	$X_2 = Z_2$
0011	$X_3 = i_1$
0100	$X_4 = Z_3$
0101	$X_5 = i_2$
0110	$X_6 = i_3$
0111	$X_7 = i_4$
1000	$X_8 = Z_4$
1001	$X_9 = i_5$
1010	$X_{10} = i_6$
1011	$X_{11} = i_7$
	$X_{12} = \sum_{k=1}^{11} X_k = Z_5$

$$X_1 = Z_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7$$

$$X_2 = Z_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7$$

$$X_4 = Z_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$X_8 = Z_4 = i_5 \oplus i_6 \oplus i_7$$

$$X_{12} = Z_5 = \sum_{k=1}^{11} X_k = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_5 \oplus i_6$$

$$X = i \cdot G \Rightarrow$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = y \cdot H^T$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) I) $S_I = [S_1 S_2 S_3 S_4 S_5] = y_I \cdot H^T = [110000000000] \cdot H^T = [11000]$

$\Rightarrow S_5 = 0, S_{4321} = 0011 = 3 \neq 0 \Rightarrow$ višestruka greška
 \Rightarrow retransmisija, korekcija nemoguća

II) $S_{II} = [S_1 S_2 S_3 S_4 S_5] = y_{II} \cdot H^T = [101000000001] \cdot H^T = [01001]$

$\Rightarrow S_5 = 1 \Rightarrow$ jednostruka greška, korekcija moguća:

$$S_{4321} = 0010 = 2$$

pozicija greške

$$\hat{x}_{II} = [111000000001]$$

$$\hat{i}_{II} = [10000000]$$