

1. (10 poena)

(5p) Kako se definiše srednja vrednost (matematičko očekivanje), srednja kvadratna vrednost i varijansa diskretne a kako kontinualne slučajne promenljive.

(5p) Formulirati centralnu graničnu teoremu. Kako se pomoću slučajnih promenljivih sa uniformnom raspodelom na intervalu $(0,1]$ može generisati slučajna promenljiva sa Gausovom raspodelom nulte srednje vrednosti i proizvoljne varijanse?

2. (10 poena)

(5p) Objasniti sličnosti i razlike između spektara periodičnih, aperiodičnih i slučajnih signala signala. Navesti karakteristične primere.

(5p) Objasniti pojam srednje kvadratne greške. Kako se određuje optimalni filter po Vineru? Napisati Viner-Hopfovu jednačinu i objasniti je.

3. (10 poena)

(5p) Blok šema sistema sa stanovišta teorije informacija. Objasniti ukratko funkciju svakog bloka.

(5p) Izvesti izraz za kapacitet binarnog simetričnog kanala.

4. (10 poena)

(5p) Kod sa ponavljanjem bita. Navesti dva moguća kriterijuma odlučivanja i prodiskutovati verovatnoću greške u oba slučaja.

(5p) Turbo kodovi. Nacrtati strukturu koda i dekodera i opisati osnovni princip rada. Navesti bar jedan primer primene turbo kodova.

5. (15 poena) Posmatra se slučajan proces $X(t)$ koji podleže Gasovoj raspodeli. Srednja vrednost ovog procesa je 0 V a snaga njegove naizmenične komponente na otpornosti od 1Ω iznosi 0.5 W. Odrediti karakterističnu funkciju ovog procesa.

6. (15 poena) Telegrafski signal $X(t)$ čija je autokorelaciona funkcija $R_X(\tau) = 3e^{-4000|\tau|}$, dovodi se na ulaz komunikacionog kanala koji se može aproksimirati idealnim filterom propusnikom niskih učestanosti. Srednja snaga signala $Y(t)$ na izlazu iz filtra na otpornosti od 1Ω iznosi 2 W. Odrediti graničnu učestanost filtra.

7. (15 poena) Diskretan izvor bez memorije generiše simbole čije su verovatnoće pojavljivanja date u tabeli 7. Brzina generisanja simbola izvora iznosi 1M simbol/s.

Tabela 7

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
$P(s_i)$	0.25	0.03	0.25	0.04	0.05	0.03	0.35

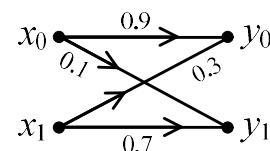
a) (8p) Korišćenjem Shannon-Fanoovog postupka izvršiti statističko kodovanje simbola izvora.

b) (4p) Odrediti koeficijent kompresije i koeficijent efikasnosti kodovanja.

c) (3p) Odrediti potreban binarni protok kanala za prenos ako se za prenos koristi statistički koder određen u tački a) i odgovarajući binarni protok ako se kodovanje vrši nestatističkim koderom (sve kodne reči su iste dužine i kodovane sa minimalnim brojem bita).

8. (15 poena) Diskretni izvor bez memorije generiše simbole x_1 i x_0 sa verovatnoćom $P(x_1) = P(x_0) = 0.5$.

a) (10p) Ako se izvor direktno poveže na binarni asimetrični kanal sa slike 8, odrediti verovatnoće pojavljivanja simbola y_1 i y_0 i izračunati verovatnoću greške na izlazu iz kanala. Odrediti prenesenu informaciju $I(X,Y)$.



Slika 8

b) (5p) Odrediti verovatnoće pojavljivanja simbola y_1 i y_0 i izračunati verovatnoću greške na izlazu iz kanala, ako se pre slanja simbola u kanal izvrši zaštitno kodovanje ponavljanjem bita tri puta, dok se na prijemu vrši većinsko odlučivanje.

① $\bar{X} = 0$
 $\sigma^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \overline{X^2} = 0,5$
 $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad -\infty < x < \infty$

$F_x(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{j\Omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + j\Omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\Omega^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + j\Omega x - \frac{\Omega^2}{4}}$

$F_x(j\Omega) = e^{-\frac{\Omega^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x - j\frac{\Omega}{2})^2} dx = e^{-\frac{\Omega^2}{4}} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du}_{=1} \quad u = x - j\frac{\Omega}{2}$

$F_x(j\Omega) = e^{-\Omega^2/4}$

② $R_X(\tau) = 3 e^{-4000|\tau|} \Rightarrow S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \mathcal{F}\{3e^{-4000|\tau|}\} = 3 \frac{2 \cdot \frac{1}{4000}}{1 + (2\pi f \frac{1}{4000})^2}$

$S_Y(f) = |H(jf)|^2 \cdot S_X(f)$

$|H(jf)|^2 = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{inacé} \end{cases} \Rightarrow S_Y(f) = \begin{cases} S_X(f), & |f| \leq f_g \\ 0, & \text{inacé} \end{cases}$

$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) df = 2 \int_0^{f_g} S_X(f) df = \frac{3}{1000} \int_0^{f_g} \frac{df}{1 + (\frac{2\pi f}{2000})^2} \quad \begin{matrix} u = \frac{2\pi f}{2000} \\ du = \frac{2\pi}{2000} df \end{matrix}$

$P = \frac{3}{1000} \cdot \frac{2000}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi f_g}{2000}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{6}{\pi} \arctan\left(\frac{2\pi f_g}{2000}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi f_g}{2000} = \tan\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$f_g = \frac{2000\sqrt{3}}{\pi} = 1,1 \text{ kHz}$

③

a)

s_i	p_i					l_i
s_7	0,35	0	0			2
s_1	0,25	0	1			2
s_3	0,25	1	0			2
s_5	0,05	1	1	0	0	4
s_4	0,04	1	1	0	1	4
s_2	0,03	1	1	1	0	4
s_6	0,03	1	1	1	1	4

b) $H(s) = \sum_{i=1}^7 p_i l_i \frac{1}{p_i} = 2,236 \text{ Sh/symbol}$

$L(s) = \sum_{i=1}^7 p_i l_i = 2,3 \text{ b/symbol}$

$\eta = \frac{H(s)}{L(s)} = \frac{2,236 \frac{\text{Sh}}{\text{symbol}}}{2,3 \frac{\text{b}}{\text{symbol}}} = 0,972 \frac{\text{Sh}}{\text{b}} = 97,2$

$\rho = \frac{3 \text{ b/symbol}}{2,3 \text{ b/symbol}} = 1,3$

c) $V_b = V_s \cdot \frac{3 \text{ b}}{\text{symbol}} = 1 \text{ M} \frac{\text{symbol}}{\text{s}} \cdot 3 \frac{\text{b}}{\text{symbol}} = 3 \text{ M bps}$

$V_{b\text{SK}} = V_s \cdot L(s) = 1 \text{ M} \frac{\text{symbol}}{\text{s}} \cdot 2,3 \frac{\text{b}}{\text{symbol}} = 2,3 \text{ Mbps}$

SA
STATIST.
KODEROM

$$4) a) P_{e_0} = 0,1 \quad P_{e_1} = 0,3 \Rightarrow P(y_0) = P(x_0) \cdot 0,9 + P(x_1) \cdot 0,3 = 0,5(0,9 + 0,3) = 0,5 \cdot 1,2 = 0,6$$

$$P(y_1) = 1 - P(y_0) = 0,4$$

$$P_e = P(x_0) \cdot 0,1 + P(x_1) \cdot 0,3 = 0,5(0,1 + 0,3) = 0,2$$

$$I(x, y) = H(y) - H(y|x)$$

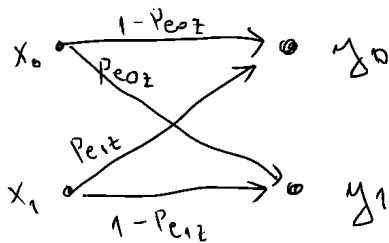
$$H(y) = P(y_0) \log \frac{1}{P(y_0)} + P(y_1) \log \frac{1}{P(y_1)} = 0,971 \text{ Sh/symbol}$$

$$H(y|x) = \sum_{i=0}^1 P(x_i) \cdot \sum_{j=0}^1 P(y_j|x_i) \log \frac{1}{P(y_j|x_i)} = P(x_0) \cdot \left[0,9 \log \frac{1}{0,9} + 0,1 \log \frac{1}{0,1} \right] + P(x_1) \cdot \left[0,3 \log \frac{1}{0,3} + 0,7 \log \frac{1}{0,7} \right]$$

$$H(y|x) = 0,675 \text{ Sh/symbol}$$

$$I(x, y) = 0,971 - 0,675 = 0,296 \text{ Sh/symbol}$$

b)



$$P_{e0z} = \binom{3}{3} P_{e0}^3 + \binom{3}{2} P_{e0}^2 (1 - P_{e0}) = 0,1^3 + 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,628$$

$$P_{e1z} = \binom{3}{3} P_{e1}^3 + \binom{3}{2} P_{e1}^2 (1 - P_{e1}) = 0,3^3 + 3 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7 = 0,216$$

$$P(y_0) = P(x_0)(1 - P_{e0z}) + P(x_1) P_{e1z} = 0,59$$

$$P(y_1) = 1 - P(y_0) = 0,41$$

$$P_{e2} = P(x_0) P_{e0z} + P(x_1) P_{e1z} = 0,122$$