

1. (10 poena)

(5p) Napisati izraz za uslovnu verovatnoću, navesti odgovarajući primer. Napisati Bajesovu formulu i objasniti njen značaj.

(5p) Binomna raspodela – opis, zakon raspodele, srednja vrednost i varijansa. Dati bar jedan primer primene binomne raspodele u telekomunikacijama.

2. (10 poena)

(5p) Viner-Hinčinova teorema – formulacija i značaj. Napisati definiciju autokorelacione funkcije slučajnog procesa po ansamblu i po vremenu.

(5p) Sinusoida sa slučajnom fazom – funkcija gustine verovatnoće, momenti, autokorelaciona funkcija, SGSS. Sličnosti i razlike sa determinističkim prostoperiodičnim signalom. Šta se može postići sumiranjem većeg broja sinusoida sa slučajnom fazom?

3. (10 poena)

(5p) Pojam diskretnog izvora s memorijom, pridruženi izvor, entropija pridruženog izvora. Navesti bar jedan primer izvora sa memorijom.

(5p) Kaskadna veza binarnih simetričnih kanala (BSK). Na primeru kaskadne veze dva BSK odrediti ekvivalentnu kanalnu matricu. Objasniti na koji način se menja kapacitet kanala kaskadne veze dva identična BSK u odnosu na jedan isti takav BSK sa poznatom verovatnoćom greške q .

4. (10 poena)

(5p) Hemingovo rastojanje i određivanje sposobnosti koda za detekciju i korekciju grešaka.

(5p) Kako se definiše kodni dobitak i od čega zavisi? Koji je njegov značaj?

5. (15 poena) Karakteristična funkcija slučajne promenljive X data je izrazom: $F_X(j\Omega) = \frac{16}{1+16 \cdot \Omega^2}$.

a) (5p) Odrediti raspodelu slučajne promenljive X .

b) (10p) Odrediti srednju vrednost i varijansu slučajne promenljive X .

6. (15 poena) Posmatrani komunikacioni kanal se ponaša kao filter propusnik niskih učestanosti koji ima impulsni odziv definisan sledećom funkcijom:

$$h(t) = e^{-20\pi t} u(t),$$

pri čemu je sa $u(t)$ označena jedinična odskočna funkcija.

Na ulazu posmatranog kanala prisutan je Gausov šum spektralne gustine snage $S_{Nul} = 20 \text{ mW/Hz}$.

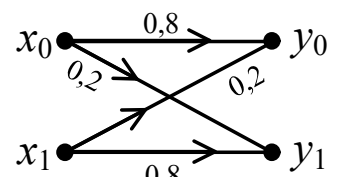
Odrediti spektralnu gustinu srednje snage i srednju snagu šuma na izlazu komunikacionog kanala.

7. (15 poena) Diskretni izvor S bez memorije generiše simbole A i B sa verovatnoćama $P(A) = 0,1$ i $P(B) = 0,9$.

a) (5p) Ako se izvor direktno poveže na binarni simetrični kanal sa slike 7 ($x_0=A$ i $x_1=B$), odrediti verovatnoće pojavljivanja simbola y_1 i y_0 na izlazu iz kanala i transinformaciju $I(X,Y)$.

b) (5p) Izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja izvora S korišćenjem Šenon-Fanoovog postupka. Odrediti verovatnoću pojavljivanja logičke nule i jedinice na izlazu kodera.

c) (5p) Ako se novodobijeni izvor iz tačke (b) poveže na binarni asimetrični kanal sa slike 7, odrediti koliko puta se poveća transinformacija $I(X,Y)$ u odnosu na direktno povezivanje izvora S iz tačke (a).



Slika 7

8. (15 poena) Izvršiti dekodovanje i obrazložiti dobijeni rezultat za sledeće sekvence na prijemu [11110 00000], [11000 00011] i [11000 00100], ako se zna da je na predaji korišćen skraćeni Hemingov (10,6) kod.

NAPOMENA: Ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita i kolokvijuma tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.

$$⑤ \quad F_X(j\Omega) = \frac{16}{1+16\Omega^2}$$

$$a) \quad f_x(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ F_X(j\Omega) \right\} \Big|_{\Omega = -2\pi f} = 2 \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \cdot 4}{1+(4\Omega)^2} \right\} \Big|_{\Omega = -\pi f} = 2 \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \cdot 4}{1+(2\pi f)^2} \right\}$$

$$f_x(x) = 2 \cdot e^{-\frac{|x|}{4}}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$b) \quad \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = 0 \quad \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx = \dots$$

$$\text{ili: } H(x) \bar{x} = \left. \frac{1}{j} \frac{dF_X(j\Omega)}{d\Omega} \right|_{\Omega=0} = - \left. \frac{2a^2 \Omega}{j(1+a\Omega^2)^2} \right|_{\Omega=0} = 0 \quad (a=16)$$

$$H(x^2) \overline{x^2} = \left. \frac{1}{j} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{j} \frac{dF_X(j\Omega)}{d\Omega} \right) \right|_{\Omega=0} = \left. \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{2a\Omega}{(1+a\Omega^2)^2} \right) \right|_{\Omega=0} = 2a^2 \frac{1-3a\Omega^2}{(1+a\Omega^2)^3} \Big|_{\Omega=0} = 2a^2 = 512$$

$$D(x) = H(x^2) - H^2(x) = 512$$

$$⑥ \quad H(jf) = \mathcal{F} \{ h(t) \} = \mathcal{F} \{ e^{-20\pi t} \cdot u(t) \} = \frac{1}{20\pi + j2\pi f}$$

$$|H(jf)|^2 = \frac{1}{(20\pi)^2 + (2\pi f)^2}$$

$$S_{Ni} = |H(jf)|^2 S_{Nu} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{(20\pi)^2 + (2\pi f)^2} = \frac{2 \cdot (20\pi)^2}{(20\pi)^2} = \frac{1}{2000\pi} \cdot \frac{2 \cdot 20\pi}{1 + (2\pi f + \frac{1}{20\pi})^2}$$

$$R_{Ni}(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ S_{Ni}(f) \} = \frac{1}{2000\pi} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2 \cdot \frac{1}{20\pi}}{1 + \left(-\frac{j}{20\pi} \right)^2} \right\} = \frac{1}{2000\pi} e^{-20\pi |t|}$$

$$P_{Ni} = R_{Ni}(0) = \frac{1}{2000\pi} = 159,2 \mu W$$

$$⑦ a) \quad P(x_0) = P(A) = 0,1 \quad P(x_1) = P(B) = 0,9$$

$$P(y_0) = 0,8 P(x_0) + 0,2 P(x_1) = 0,26$$

$$P(y_1) = 1 - P(y_0) = 0,74$$

$$H(y) = \sum_{j=0}^1 P(y_j) \lg \frac{1}{P(y_j)} = 0,26 \lg \frac{1}{0,26} + 0,74 \lg \frac{1}{0,74} = 0,8267 \text{ Sh/symbol}$$

$$H(y|x) = \sum_{i=0}^1 P(x_i) \sum_{j=0}^1 P(y_j|x_i) \lg \frac{1}{P(y_j|x_i)} = P(x_0) \left[0,8 \lg \frac{1}{0,8} + 0,2 \lg \frac{1}{0,2} \right] + P(x_1) \left[0,2 \lg \frac{1}{0,2} + 0,8 \lg \frac{1}{0,8} \right]$$

$$H(y|x) = 0,7219 [P(x_0) + P(x_1)] = 0,7219 \text{ Sh/symbol}$$

$$I_a(x,y) = H(y) - H(y|x) = 0,8267 - 0,7219 = 0,1048 \text{ Sh/symbol}$$

$$b) \quad \begin{array}{c|c|c|c} S^2 & P_i & & l_i \\ \hline AB & 0,81 & 0 & 1 \\ \hline AB & 0,09 & 1 & 0 & 2 \\ \hline BA & 0,09 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline AA & 0,01 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \quad L_2 = \sum_{i=1}^4 P_i l_i = 0,81 + 5 \cdot 0,09 + 3 \cdot 0,01 = 1,29 \frac{\text{b}}{\text{symbol}(S^2)}$$

$$P(0) = \frac{1 \cdot 0,81 + 1 \cdot 0,09 + 1 \cdot 0,09 + 0 \cdot 0,01}{1,29} = 0,7674$$

$$P(1) = 1 - P(0) = 0,2326$$

c) $P(x_0) = P(0) = 0,7674$, $P(x_1) = P(1) = 0,2326$

$P(y_0) = 0,8 P(x_0) + 0,2 P(x_1) = 0,6605$

$P(y_1) = 1 - P(y_0) = 0,3395$

$H(Y) = \sum_{j=0}^1 P(y_j) \log_2 \frac{1}{P(y_j)} = 0,9244 \text{ sh/simbol}$

$I_c(x,y) = H(Y) - H(Y|X) = 0,9244 - 0,7219 = 0,2024 \text{ sh/simbol}$

TRANSFORMACIJA SE POVEĆALA $\frac{I_c(x,y)}{I_c(x)} = \frac{0,2024}{0,1048} \approx 2 \text{ PUTA.}$

8)

	i_4, i_3, i_2, i_1	
x_1	0001	z_1
x_2	0010	z_2
x_3	0011	z_3
x_4	0100	z_4
x_5	0101	z_5
x_6	0110	z_6
x_7	0111	z_7
x_8	1000	z_8
x_9	1001	z_9
x_{10}	1010	z_{10}

$\Rightarrow H = \begin{bmatrix} 1010101010 \\ 0110011001 \\ 0001111000 \\ 0000000111 \end{bmatrix}$

1) $y = [1111000000]$

$S = y \cdot H^T = [0010] \Rightarrow$ lokacija greške
 $0100_2 = 4 \text{ bit}$

$\hat{y} = [1110000000]$

$\hat{z} = [100000]$

2) $y = [1100000011]$

$S = y \cdot H^T = [0000] \Rightarrow$ NEMA GREŠKE

$\hat{y} = y \Rightarrow \hat{z} = [000011]$

3) $y = [11000000100]$

$S = y \cdot H^T = [1101]$

lokacija greške je $1011_2 = 11 \text{ bit} \Rightarrow$ ovo nije moguće što znači da je u pitanju višestruka greška, pa je korekcija nemoguća. Može se zahtevati retransmisija poruke.