

1. (10 poena)

(5p) Kako se definiše srednja vrednost (matematičko očekivanje), srednja kvadratna vrednost i varijansa diskretne a kako kontinualne slučajne promenljive.

(5p) Kvadratna transformacija jedne slučajne promenljive. Navesti karakterističan primer.

2. (10 poena)

(5p) Definisati stacionarnost i ergodičnost slučajnog procesa. Navesti primer nestacionarnog i neergodičnog procesa.

(5p) Objasniti vremenske i spektralne karakteristike procesa koji se dobija propuštanjem aditivnog belog Gausovog šuma kroz filtar propusnik niskih učestanosti granične učestanosti fg. Objasniti Rajssov model uskopojasnog šuma.

3. (10 poena)

(5p) Srednja dužina kodne reči i efikasnost koda, objasniti na primeru.

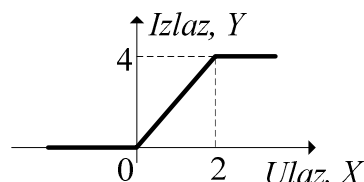
(5p) Lempel-Zivov algoritam, osnovna ideja i poređenje sa Hafmenovim algoritmom (prednosti i mane).

4. (10 poena)

(5p) Kod sa ponavljanjem bita. Navesti dva moguća kriterijuma odlučivanja.

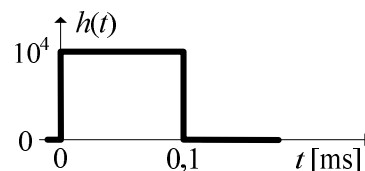
(5p) Pojam i značaj interlivinga. Objasniti na jednom primeru.

5. (15 poena) Na ulazu limitera sa slike 5 deluje stacionarni slučajni proces $X(t)$ koji ima Gausovu raspodelu. Srednja vrednost raspodele amplituda slučajnog procesa je nula, srednja snaga je 4W. Odrediti i nacrtati funkciju gustine verovatnoće amplituda slučajnog procesa $Y(t)$ na izlazu iz limitera.



Slika 5

6. (15 poena) Stacionarni Gausov proces $X(t)$ konstantne spektralne gustine snage koja iznosi 1 mW/Hz deluje na ulazu linearnog filtra čiji je impulsni odziv $h(t)$ prikazan na slici 6. Odrediti srednju snagu slučajnog procesa $Y(t)$ na izlazu filtra.



Slika 6

7. (15 poena) Ternarni izvor bez memorije generiše simbole A , B i C sa verovatnoćama $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ i $P(C) = 0,1$. Brzina generisanja simbola iznosi 10^6 simbol/s.

a) (3p) Izvršiti kodovanje izvora nestatističkim binarnim kodom. Odrediti koliki je minimalni binarni protok komunikacionog kanala potreban za prenos simbola ovako kodovanog izvora.

b) (8p) Izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja izvora primenom Hafmanovog postupka. Odrediti koliki je minimalni binarni protok komunikacionog kanala potreban za prenos simbola ovako kodovanog izvora.

c) (4p) Izračunati entropiju izvora. Odrediti koliki je minimalni binarni protok komunikacionog kanala potreban za prenos simbola izvora ako se za kodovanje koristi „idealni“ statistički koder čija je efikasnost 100%.

8. (15 poena) Izračunati sindome, izvršiti dekodovanje i obrazložiti dobijeni rezultat za sledeće sekvence na prijemu [0101000001], [1000000001] i [1011100010], ako se zna da je na predaji korišćen Hemingov (10,5) kod koji omogućava istovremenu korekciju jednostruke i detekciju dvostruke greške.

NAPOMENA: Ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita i kolokvijuma tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.

5) $\sigma^2 = 4\omega \Rightarrow \sigma = 2$ ($\sigma^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 4$)

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$x \leq 0$ $P(Y=0) = P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f_x(x) dx = \frac{1}{2}$ (zbog simetrije raspodjele
ono znači $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$)

$x \geq 2$ $P(Y=4) = P(X \geq 2) = \int_2^{\infty} f_x(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_2^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$

$$P(Y=4) = \frac{\cancel{\sqrt{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}} \int_{\frac{2}{\sqrt{2\sigma}}}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2}{\sqrt{2\sigma}}}{\infty} e^{-u^2} du \right]$$

Smjena

$$\begin{aligned} x &= u\sqrt{2\sigma} \\ dx &= \sqrt{2\sigma} du \\ x=2 &\Rightarrow u = \frac{2}{\sqrt{2\sigma}} \\ x \rightarrow \infty &\Rightarrow u \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$P(Y=4) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2}{\sqrt{2\sigma}}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2\sigma}}\right) \right] = \operatorname{erfc}\left(\frac{2}{\sqrt{2\sigma}}\right)$$

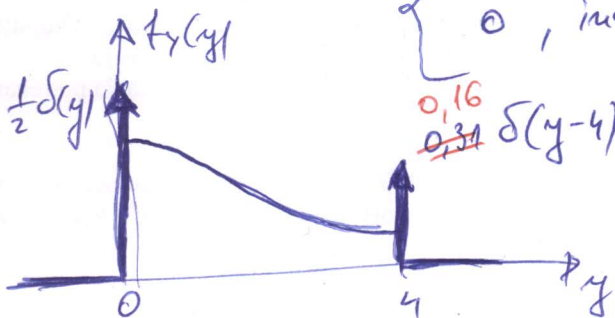
$$P(Y=4) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] \approx 0,31/2 = 0,16 \quad \left(\frac{4/2}{2}\right)^2$$

$0 \leq x \leq 2$ $f_y(y) = \frac{f_x(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \Big|_{x=y/2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma)^2} e^{-\frac{y^2}{2(2\sigma)^2}}$

$$\begin{aligned} y &= 2x, \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{dy}{dx} &= 2 \quad x = y/2 \end{aligned}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{32}}, \quad 0 \leq y \leq 4$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta(y) + 0,16 \delta(y-4) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{32}}, & 0 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



6) Imaginiraj u vidu da je: $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j2\pi ft_0} \mathcal{F}\{f(t)\}$
kao i tabele Furijeovih transformacionih parova:



dobija se:

$$H(jf) = AT \operatorname{sinc}(\pi f T) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} \rightarrow \text{gde je } A=10^4, T=0,1\mu\text{s}=10^{-5}$$

$$|H(jf)|^2 = A^2 T^2 |\operatorname{sinc}(\pi f T)|^2 \cdot |e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}|^2 = A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi f T)$$

$$S_x(f) = 1 \text{ mW/Hz} = 10^{-3} \text{ W/Hz}$$

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f) = A \cdot T \cdot S_x \cdot \text{sinc}^2(fT)$$

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) df = A \cdot T \cdot S_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(fT) df = A \cdot T \cdot S_x \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} \text{sinc}^2(fT) df$$

↑ konst.
PARNA FUNKCIA
0

$$P_y = 2 A T S_x \cdot \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \text{sinc}^2(x) dx = 2 A S_x \cdot \frac{1}{2} \text{ (TABELICA)}$$

$$P_y = A T S_x = 10^4 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ W} \quad (10^4)^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10 \text{ W}$$

7

a)

S	
A	00
B	01
C	10

$$L = 2 \text{ b/symbol}$$

$$V = 10^6 \text{ symbol/s}$$

$$V_b = L \cdot V = 2 \frac{\text{b}}{\text{symbol}} \cdot 10^6 \frac{\text{symbol}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{b}}{\text{s}}$$

$$V_b = 2 \text{ Mbps}$$

b)

s_i	P_i	l_i	k_i	POSTUPAK																					
AA	0,36	1	1	0,36	A	0,36	1	0,36	1	0,36	1	0,36	1	0,36	1	0,36	1	0,36	1	0,36	1	0,36	1		
AB	0,18	3	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000	0,18	000
BA	0,18	3	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001
BB	0,09	4	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100	0,09	0100
BB	0,09	4	0110	0,06	0110	0,07	0101	0,09	0100	0,12	011	0,16	010	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001	0,18	001
AC	0,06	4	0111	0,06	0111	0,06	0110	0,07	0101	0,07	0101	0,07	0101	0,07	0101	0,07	0101	0,07	0101	0,07	0101	0,07	0101	0,07	0101
CA	0,06	4	0111	0,04	01010	0,06	0111	0,06	0111	0,06	0111	0,06	0111	0,06	0111	0,06	0111	0,06	0111	0,06	0111	0,06	0111	0,06	0111
BC	0,03	5	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011
CB	0,03	6	010100	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011
CC	0,01	6	010101	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011	0,03	01011

$$L_2 = \sum_{i=1}^9 P_i l_i = 0,36 \cdot 1 + \dots + 0,01 \cdot 6$$

$$L_2 = 2,67 \text{ b/symbol}^2$$

$$L = L_2 / 2 = 1,335 \text{ b/s}$$

$$V_b = L \cdot V = 1,335 \text{ Mbps}$$

c)

$$H(s) = \sum_{i=1}^3 P_i \ln \frac{1}{P_i} = 0,6 \ln \frac{1}{0,6} + 0,3 \ln \frac{1}{0,3} + 0,1 \ln \frac{1}{0,1} = 1,2955 \frac{\text{sh}}{\text{symbol}}$$

$$\eta = \frac{H}{L} = 100\% = 1 \Rightarrow L = H = 1,2955 \frac{\text{b}}{\text{symbol}}$$

$$V_b = L \cdot V = 1,2955 \text{ Mbps}$$

8

	z_4	z_3	z_2	z_1		
y_1	x_1	0	0	0	1	z_1
y_2	x_2	0	0	1	0	z_2
y_3	x_3	0	0	1	1	i_1
y_4	x_4	0	1	0	0	z_3
y_5	x_5	0	1	0	1	i_2
y_6	x_6	0	1	1	0	i_3
y_7	x_7	0	1	1	1	i_4
y_8	x_8	1	0	0	0	z_4
y_9	x_9	1	0	0	1	i_5
y_{10}	x_{10}	X				$z_5 = \sum_{i=1}^9 x_i$

$$S_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9$$

$$S_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7$$

$$S_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7$$

$$S_4 = y_8 \oplus y_9$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{10} y_i = y_1 \oplus \dots \oplus y_{10}$$

1) $y = [0101000001] \Rightarrow S_1=0, S_2=1, S_3=1, S_4=0, S_5=1$

$$S_{4321} = 0110_2 = 6 \Rightarrow \text{GREŠKA NA BITU 6}$$

$$S_5 = 1 \Rightarrow \text{NEPARAN BR. GREŠAKA}$$

NAJVEROVATNIJE JE GREŠKA NA JEDNOM BITU NA POZICIJI 6

$$\hat{x} = [01010001]$$

$$\hat{z} = [00100]$$

2) $y = [100000001] \Rightarrow S_1=1, S_2=S_3=S_4=S_5=0$

$$S_{4321} = 0001_2 = 1 \Rightarrow \text{GREŠKA NA BITU 1}$$

$$S_5 = 0 \Rightarrow \text{NEHA GREŠKE ILI PARAN BR. GREŠKA}$$

MORA BITI DUOSTRUKA (ILI VIŠESTRUKA PARNA GREŠKA). KOREKCIJA JE NEMOGUĆA, PA SE VRŠI RETRANSMISIJA PO POTREBI.

3) $y = [1011100010] \Rightarrow S_1=0, S_2=1, S_3=0, S_4=1, S_5=1$

$$S_{4321} = 1010_2 = 10 \Rightarrow \text{GREŠKA NA BITU 10 ???}$$

$$S_5 = 1 \Rightarrow \text{NEPARNA GREŠKA}$$

\Rightarrow SKRAĆENI (9,5) kod ima sindrome S_1, S_2, S_3 i S_4 . Oni "POKRIVAJU" GREŠKU NA 9 BITA KOJI SE GENERIŠU (9,5) KODOM. (10,5) KOD JE PRODUŽENI (9,5) KODOM SE DODAJE ZAŠTITNI BIT z_5 . PREMA TOJE SINDROM $S_{4321} \in [0, 9]$ JER SE ODHODI SAMO NA PRVIH 9 BITA KODA (10,5). ANO JE $S_{4321} > 9$ TADA JE DOŠLO DO VIŠESTRUKHE GREŠKE?

\Rightarrow $S_{4321} = 10 \Rightarrow$ VIŠESTRUKA GREŠKA } TROSTRUKA ILI VIŠESTRUKA
 $S_5 = 1 \Rightarrow$ NEPARNA GREŠKA } NEPARNA GREŠKA.
 \Rightarrow RETRANSMISIJA