Statistička teorija telekomunikacija 16.09.2016.

1. (*10 poena*)
a) (*5p*) Definisati n-ti početni moment, n-ti apsolutni moment i n-ti centralni moment kontinualne slučajne promenljive.
b) (*5p*) Definicija karakteristične funkcije kontinualne i diskretne slučajne promenljive.

2. (*10 poena*)
a) (*5p*) Formulisati centralnu graničnu teoremu. Kako se pomoću slučajnih promenljivih sa uniformnom raspodelom na intervalu (0,1] može generisati slučajna promenljiva sa Gausovom raspodelom nulte srednje vrednosti i proizvoljne varijanse?
b) (*5p*) Sinusoida sa slučajnom fazom – funkcija gustine verovatnoće, momenti, autokorelaciona funkcija, SGSS. Sličnosti i razlike sa determinističkim prostoperiodičnim signalom. Šta se može postići sumiranjem većeg broja sinusoida sa slučajnom fazom?

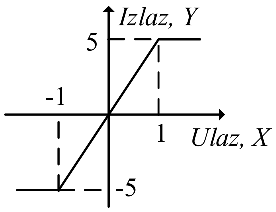
3. (*10 poena*)
a) (*5p*) Definisati pojam količine informacija i izvesti izraz za entropiju za izvore bez memorije. Informacioni fluks izvora.
b) (*5p*) Statistički kodovi. Pojam singularnog, jednoznačno dekodabilnog i trenutnog koda. Kodno stablo. Navesti primere.

4. *(10 poena)*
a) (*5p*) Pojam zaštitnog koda. Kako se definišu kodni količnik i informacioni protok?
b) (*5p*) Objasniti način konstrukcije Hemingovih kodova sa parametrima (11,7).

5. *(15 poena)* Funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive *X* definisana je izrazom:

$$f_X(x) = A \cdot e^{-2|x|}, -\infty < x < \infty .$$

Slučajna promenljiva *X* prenosi se kroz komunikacioni kanal tako da dolazi do njene transformacije, te se na izlazu kanala dobija slučajna promenljiva *Y*. Izlazna i ulazna slučajna promenljiva povezane su sledećom funkcijom koja je prikazana na slici 5.
a) Odrediti vrednost konstante *A*.
b) Odrediti funkciju gustine verovatnoće i kumulativnu funkciju verovatnoće slučajne promenljive *Y* na izlazu komunikacionog kanala.



Slika 5

6. *(15 poena)* Posmatra se komunikacioni kanal koji se ponaša kao filtar propusnik niskih učestanosti koji ima impulsni odziv definisan sledećom funkcijom: $h(t) = 100\pi \cdot e^{-20\pi t}u(t)$, pri čemu je sa *u(t)* označena jedinična odskočna funkcija. Na ulazu komunikacionog kanala deluje slučajni proces sinusoidalnog talasnog oblika sa slučajnom fazom, definisan izrazom $X(t) = 20 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, pri čemu su *A* i f_0 konstante, a faza Θ ima uniformnu raspodelu u intervalu [−π, π].
a) Odrediti autokorelacionu funkciju i spektralnu gustinu srednje snage slučajnog signala *X*(*t*).
b) Odrediti srednju snagu slučajnog procesa na izlazu iz komunikacionog kanala.

7. *(15 poena)* Diskretni izvor signala bez memorije opisan je tabelom 7. Brzina generisanja simbola izvora je $5\ 10^6$ simbola u sekundi.

u_i	u_1	u_2	u_3
P_i	0.5	0.3	0.2

Tabela 7

a) Koristeći Šenon-Fanoov metod izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja originalnog izvora.
b) Izračunati efikasnost kodovanja izvršenog u tački (a).
c) Odrediti minimalni kapacitet binarnog kanala koji je potreban da se omogući prenos poruka izvora, ako se pre slanja poruke vrši statističko kodovanje iz tačke (a).

8. (*15 poena*) Pri prenosu poruka kroz kanal sa šumom vrši se zaštitno kodovanje Hemingovim (16,11) kodom koji omoguáva istovremenu korekciju jedne i detekciju dve greške.
a) Odrediti kodnu reč koja odgovara informacionoj reči 100 1000 1001.
b) Odrediti sindrome i izvršiti dekodovanje ako je u prijemniku detektovana sekvenca 1101 0001 0000 0010.

***NAPOMENA**: Ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita i kolokvijuma tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.*

⑤

a) $f_X(x) = A e^{-2|x|}$, $-\infty < x < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \quad A\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx + A\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\,dx = 1$$

$$\frac{A}{2} e^{2x}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{A}{-2} e^{-2x}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{A}{2}(1-0) + \frac{A}{-2}(0-1) = \boxed{A=1}$$

$$\boxed{f_X(x) = e^{-2|x|} \quad , \quad -\infty < x < \infty}$$

b) I) $\underline{\underline{x \geq 1}}$

$$P(Y=5) = P(X \geq 1) = \int_{1}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{-2} e^{-2x}\Big|_{1}^{\infty} = -\frac{1}{2}(0 - e^{-2})$$

$$P(Y=5) = \frac{1}{2} e^{-2} = \frac{1}{14,7781} = 0,0677$$

II) $\underline{\underline{X \leq -1}}$

$$P(Y=-5) = P(X \leq -1) = P(X \geq 1) = 0,0677$$

III) $\underline{0 \leq X \leq 1}$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\Bigg|_{x=y/5} \qquad \underline{\underline{y = 5X}} \Rightarrow dy = 5dx$$

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = 5$$

$$f_Y(y) = \frac{e^{2\frac{y}{5}}}{5} = \frac{1}{5} e^{\frac{2}{5}y} \qquad x = \frac{1}{5}y$$

IV) $-1 \leq x \leq 0$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\Bigg|_{x=y/5} \qquad y = 5x \Rightarrow \left|\frac{dy}{dx}\right| = 5$$

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{2}{5}y}}{5}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \ , & y < -5 \\ 0,0677\,\delta(y+1) \ , & y = -5 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{2}{5}|y|} \ , & -5 \leq y \leq 5 \\ 0,0677\,\delta(y-1) \ , & y = +5 \\ 0 \ , & y > 5 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy$$

I) $y < -5$

$$\underline{F_Y(y) = 0}$$

II) $-5 \leq y \leq 0$

$$F_Y(y) = \int_{-5}^{y} \left[0{,}0677\,\delta(y+5) + \frac{1}{5} e^{+\frac{2}{5}y}\right] dy = 0{,}0677 + \frac{1}{5}\int_{-5}^{y} e^{+\frac{2}{5}y}\,dy$$

$$F_Y(y) = 0{,}0677 + \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}\, e^{\frac{2}{5}y}\Big|_{-5}^{y} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{2}{5}y} - e^{+\frac{2}{5}\cdot(-5)}\right] + 0{,}0677$$

$$\boxed{F_Y(y) = \frac{1}{2} e^{\frac{2}{5}y}} \Rightarrow \quad f_Y(-5) = \frac{1}{2} e^{-2} = 0{,}0677 \ ✓$$

$$F_Y(0) = \frac{1}{2} e^{0} = \frac{1}{2} \ ✓$$

[illegible]

III) $0 \leq y < 5$

$$F_Y(y) = F_Y(0) + \int_{0}^{y} f_Y(y)\,dy = \overset{=\frac{1}{2}}{F_Y(0)} + \int_{0}^{y} \frac{1}{5} e^{-\frac{2}{5}y}\,dy$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot e^{-\frac{2}{5}y}\Big|_{0}^{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{5}y}\Big|_{0}^{y}$$

$$\boxed{F_Y(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{2}{5}y} - e^{0}\right) = 1 - e^{-\frac{2}{5}y}}$$

IV) $y \geq 5$

$$\boxed{F_Y(y) = 1}$$

⑥

$$H(jf) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{100\pi e^{-20\pi t} u(t)\}$$

$$H(jf) = 100\pi\, \mathcal{F}\{e^{-\underset{a}{\boxed{20\pi}}t} u(t)\} = 100\pi \cdot \frac{1}{20\pi + j2\pi f}$$

$$H(jf) = \frac{100\pi}{20\pi + j2\pi f} = \frac{50}{10 + jf}$$

$$|H(jf)|^2 = \frac{50^2}{10^2 + f^2} = \frac{2500}{100 + f^2}$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} 20\cos(2\pi f_0 t + \theta) \cdot 20\cos\left[2\pi f_0(t+\tau) + \theta\right] \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{} d\theta$$

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & |\theta| \le \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$R_X(\tau) = \frac{400}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)\right] d\theta$$

$$R_X(\tau) = \frac{200}{2\pi}\left[\cos(2\pi f_0\tau) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\theta}_{=2\pi} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi f_0(2t+\tau) + 2\theta)\, d\theta}_{=0}\right]$$

$$R_X(\tau) = 200\cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$S_X(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = 200\,\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0\tau)\} = 200\left(\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$$

$$S_Y(f) = |H(jf)|^2 \cdot S_X(f)$$

$$S_Y(f) = \frac{500000}{100 + f^2}\left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right]$$

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)\, df = \frac{1}{2}\,\frac{5\cdot 10^5}{100 + f_0^2} + \frac{1}{2}\,\frac{5\cdot 10^5}{100 + (-f_0)^2}$$

$$P_Y = \frac{5\cdot 10^5}{100 + f_0^2}$$

⑦

u^2	$P(u_i^2)$	x_i
$u_1 u_1$	0.25	00
$u_1 u_2$	0,15	010
$u_2 u_1$	0,15	011
$u_1 u_3$	0,10	100
$u_3 u_1$	0,10	101
$u_2 u_2$	0,09	1100
$u_2 u_3$	0,06	1101
$u_3 u_2$	0,06	1110
$u_3 u_3$	0,04	1111

b) $L_2 = \sum_{i=1}^{9} p(u_i^2) \cdot l_i = 3$ b/simb(s^2)

$L = \frac{L_2}{2} = 1,5$ b/simb

$H(u) = 1,4855$ Sh / simbol

$H(U^2) = 2H(u) = 2,9710$ Sh/simb(s^2)

$\eta = \frac{H(U^2)}{L_2} = \frac{H(U)}{L} = 99,03\,\%$

c) $C = V \cdot \frac{L_2}{2} = VL = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{simb}}{s} \cdot 1,5 \frac{b}{\text{simb}} = 7,5 \cdot 10^6 \frac{b}{s}$

⑧

a)

i	$z_4 z_3 z_2 z_1$	x_i
1	0 0 0 ①	z_1
2	0 0 ① 0	z_2
3	0 0 1 1	i_1
4	0 ① 0 0	z_3
5	0 1 0 1	i_2
6	0 1 1 0	i_3
7	0 1 1 1	i_4
8	① 0 0 0	z_4
9	1 0 0 1	i_5
10	1 0 1 0	i_6
11	1 0 1 1	i_7
12	1 1 0 0	i_8
13	1 1 0 1	i_9
14	1 1 1 0	i_{10}
15	1 1 1 1	i_{11}

← (15, 11) kod

$\boxed{z_5 = \sum_{i=1}^{15} x_i}$ ← (16, 11) $x_{16} = z_5$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ \boxed{z_1} & \boxed{z_2} & i_1 & \boxed{z_3} & i_2 & i_3 & i_4 & \boxed{z_4} & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & \boxed{z_5} \end{array}$$

$z_1 = i_1 + i_2 + i_4 + i_5 + i_7 + i_9 + i_{11}$

$z_2 = i_1 + i_3 + i_4 + i_6 + i_7 + i_{10} + i_{11}$

$z_3 = i_2 + i_3 + i_4 + i_8 + i_9 + i_{10} + i_{11}$

$z_4 = i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9 + i_{10} + i_{11}$

a) $i = [\overset{i_1}{\underline{1}}00\ \overset{i_4}{\underline{1}}000\ \overset{i_8}{\underline{1}}00\overset{i_{11}}{\underline{1}}]$ ⇒ $z_1 = 1+0+1+0+0+0+1 = 1$

$z_2 = 1+0+1+0+0+0+1 = 1$

$z_3 = 0+0+1+1+0+0+1 = 1$

$z_4 = 0+0+0+1+0+0+1 = 0$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ X = [& \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1}] \\ & z_1 & z_2 & & z_3 & & & & z_4 & & & & & & & & \uparrow \end{array}$$

$z_5 = \sum_{i=1}^{15} x_i = 1$

⑧ b)

$$y = \begin{array}{c} \scriptstyle 1\,2\,3\,4 \quad 5\,6\,7\,8 \quad 9\,10\,11\,12 \quad 13\,14\,15\,16 \\ [1101\ 0001\ 0000\ 0010] \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + y_{13} + y_{15} = 0 \\ s_2 = y_2 + y_3 + y_6 + y_7 + y_{10} + y_{11} + y_{14} + y_{15} = 0 \\ s_3 = y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} = 0 \\ s_4 = y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{15} + y_{14} + y_{15} = 0 \end{array}\right\}$$

Sindrom je:

$[S_4 S_3 S_2 S_1] = [0000]$

što ukazuje da nema greške na prvih 15 bita (*)

$$s_5 = \sum_{i=1}^{16} y_i = 1$$ ⇒ ukazuje da ima jedna greška na svih 16 bita (**)

Na osnovu (*) i (**) najverovatnije je da je greška na 16-tom bitu:

$$\hat{x} = [\overset{z_1 z_2}{\boxed{11}}0\overset{z_3}{\boxed{1}}000\overset{z_4}{\boxed{1}}\ 0000\ 001\overset{z_5}{\boxed{1}}]$$

← popravljena greška!

$$\hat{i} = [000\ 0000\ 0001]$$