

1. (10 poena)

- a) (5p) Uslovna verovatnoća događaja i uslovna gustina verovatnoće. Statistička nezavisnost događaja i slučajnih promenljivih. Objasniti na primeru.
- b) (5p) Transformacija više slučajnih promenljivih.

2. (10 poena)

- a) (5p) Definisati autokorelacionu funkciju slučajnog signala po vremenu i po ansamblu i objasniti stacionarnost i ergodičnost slučajnog procesa. Navesti primer nestacionarnog i neergodičnog procesa.
- b) (5p) Simulacioni model uskopojasnog šuma. Objasniti na primeru NF filtera i PO filtera.

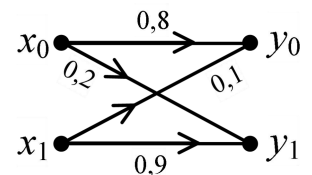
3. (10 poena)

- a) (5p) Diferencijalni koder kao Markovljev izvor. Ako se na ulazu u koder dovodi statistički nezavisni binarni niz nula i jedinica gde je verovatnoća pojave jedinice p a pojave nule $q=1-p$, nacrtati dijagram stanja kodera i odrediti entropiju na izlazu diferencijalnog kodera i entropiju njemu pridruženog izvora.
- b) (5p) Vrste statističkih kodova. Objasniti pojam nesingularnog, jednoznačno dekodabilnog i trenutnog koda. Kodno stablo. Navesti primere.

4. (10 poena)

- a) (5p) Hemingovo rastojanje i određivanje sposobnosti koda za detekciju i korekciju grešaka.
- b) (5p) Navesti osnovne tipove cikličkih kodova, njihove najznačajnije dobre i loše osobine i mogućnosti primene.

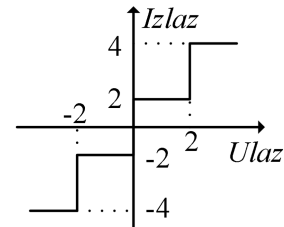
5. (15 poena) Binarni kanal sa šumom može se aproksimirati dijagram na slici 5, gde je sa x_0 i y_0 označena logička nula, a sa x_1 i y_1 logička jedinica. Kroz binarni kanal šalju se dve poruke: $H_0=00000$ i $H_1=11111$. Verovatnoća slanja poruke H_0 iznosi 0,3. Može se smatrati da je slanje svakog bita kroz dati kanal nezavisno od slanja prethodnih bita.



Slika 5

- a) (7p) Odrediti verovatnoću da se pri prenosu poruke H_0 i H_1 pogreši na najviše jednom bitu.
- b) (8p) Ako je na prijemu dobijena poruka $A=10101$, odrediti verovatnoću da je poslata poruka H_0 .

6. (15 poena) Na ulazu kvantizera sa slike 6 deluje slučajni naponski signal $X(t)$ čija je raspodela amplituda Gausova sa srednjom vrednošću $-2V$ i ukupnom srednjom snagom $13 W$.



Slika 6

- a) (10p) Odrediti raspodelu amplituda procesa $Y(t)$ na izlazu kvantizera.
- b) (5p) Odrediti srednju vrednost i varijansu procesa $Y(t)$.

7. (15 poena) Digitalni izvor bez memorije generiše simbole A, B i C sa verovatnoćama 0.7, 0.2 i 0.1, respektivno i brzinom od 2 miliona simbola u sekundi. Za prenos signala je na raspolaganju binarni kanal ograničene brzine signaliziranja.

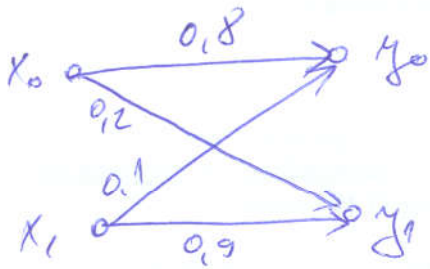
- a) (10p) Izvršiti statističko kodovanje drugog proširenja izvora korišćenjem Šenon-Fanoovog postupka i odrediti potrebnu brzinu signaliziranja binarnog kanala za prenos kodovanog signala.
- b) (5p) Odrediti teorijski minimalnu brzinu signaliziranja binarnog kanala koja se može ostvariti statističkim kodovanjem datog izvora. Uporediti dobijeni rezultat sa rezultatom iz tačke (a).

8. (15 poena) Na ulaz kodera koji definisanog matricom $g=[7, 5]$ stiže sekvenca bita: 1 1 0 0 1 0 1.

- a) (2p) Nacrtati blok dijagram (šemu) kodera i odgovarajući dijagram stanja.
- b) (5p) Izvršiti kodovanje ulazne sekvence pod pretpostavkom da je koder bio u početnom stanju 00.
- c) (8p) Sekvenca dobijena u tački (b) prenosi se kroz komunikacioni kanal sa šumom. Koristeći Viterbijev algoritam dekodovati bar jedan bit ulazne sekvence ako se zna da je u početnom trenutku konvolucionni dekodier bio u stanju 00 i da je tokom prenosa sekvence na izlazu kodera iz tačke (b) došlo do greške na drugom bitu.

NAPOMENA: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.

5



$$P(y_0|x_0) = 0,8 = p_0$$

$$P(y_1|x_0) = 0,2 = q_0$$

$$P(y_0|x_1) = 0,1 = p_1$$

$$P(y_1|x_1) = 0,9 = q_1$$

a)

$$P_e = P_{e0} + P_{e1} = 0,7373$$

$$H_0: P_{e0} = \binom{5}{0} p_0^5 = 0,8^5 = 0,3277$$

$$P_{e1} = \binom{5}{1} p_0^4 q_0^1 = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,4096$$

$$H_1: P_{e0} = \binom{5}{0} p_1^5 = 0,9^5 = 0,5905$$

$$P_{e1} = \binom{5}{1} p_1^4 q_1^1 = 5 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = 0,3281$$

$$P_e = P_{e0} + P_{e1} = 0,9186$$

$$b) P(H_0|A) = \frac{P(A|H_0) \cdot P(H_0)}{P(A)}$$

$$P(A|H_1) = p_1 q_1 p_1 q_1 p_1 = p_1^3 q_1^2 = 0,9^3 \cdot 0,1^2 = 0,00729$$

$$P(A|H_0) = q_0 \cdot p_0 \cdot q_0 \cdot p_0 \cdot q_0 = p_0^2 \cdot q_0^3 = 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,00512$$

$$P(H_0) = 0,3, P(H_1) = 1 - P(H_0) = 0,7$$

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) = 6,639 \cdot 10^{-3}$$

$$P(H_0|A) = 0,231$$

6

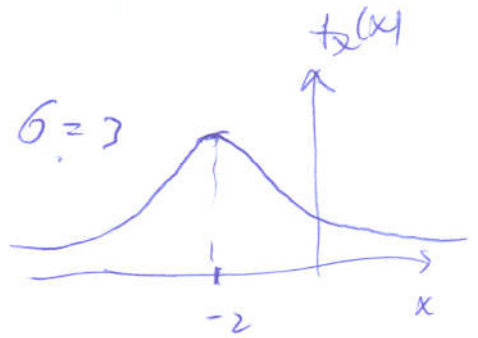
$$P_{ok} = P_{ac} + P_{dc} \quad P_{ac} = \sigma^2 \quad P_{dc} = \mu^2$$

$$a) \left. \begin{array}{l} |\mu| = 2 \Rightarrow P_{dc} = 4W \\ P_{ok} = 13W \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma^2 = P_{ac} = P_{ok} - P_{dc} = 13 - 4 = 9$$

$$\sigma = 3$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \mu = -2, \quad \sigma = 3$$

$$P(Y=4) = P(X \leq -2) = \int_{-\infty}^{-2} f_x(x) dx = 1/2$$



$$P(Y=-2) = P(-2 \leq X \leq 0) = \int_{-2}^0 f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-2}^0 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = u$$

$$dx = \sqrt{2}\sigma du$$

$$x=0 \Rightarrow u = -\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma} = +\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$x=-2 \Rightarrow u = 0$$

$$P(Y=-2) = \int_0^{\frac{2}{3\sqrt{2}}} e^{-u^2} du \cdot \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$P(Y=-2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{2}{3\sqrt{2}}} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$P(Y=-2) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(0,47) = 0,247$$

$$P(Y=4) = P(X \geq 2) = \int_2^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_2^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = u$$

$$dx = \sqrt{2}\sigma du$$

$$x=2 \Rightarrow u = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$$

$$P(Y=4) = \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{\frac{2\sqrt{2}}{3}}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2\sqrt{2}}{3}}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$P(Y=4) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{erf}(0,94)]$$

$$P(Y=4) = 0,092$$

$$P(Y=-4) + P(Y=-2) + P(Y=2) + P(Y=4) = 1$$

$$P(Y=2) = 1 - [P(Y=-4) + P(Y=-2) + P(Y=4)] = 0,161$$

$$b) \bar{Y} = \sum_{i=1}^4 P(Y=y_i) \cdot y_i = P(Y=-4) \cdot (-4) + P(Y=-2) \cdot (-2) + P(Y=2) \cdot 2 +$$

$$+ P(Y=4) \cdot 4 = -2,376$$

$$\bar{Y}^2 = \sum_{i=1}^4 P(Y=y_i) \cdot y_i^2 = [P(Y=-4) + P(Y=4)] \cdot 4^2 + [P(Y=-2) + P(Y=2)] \cdot 2^2$$

$$\bar{Y}^2 = 998,12$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\bar{Y}^2 - (\bar{Y})^2} = 31,5$$

7 a) Drugo proširenje:

s^2	P_i						L_i
AA	0,49	0					1
AB	0,14	1	0	0			3
BA	0,14	1	0	1			3
AC	0,07	1	1	0	0		4
CA	0,07	1	1	0	1		4
BB	0,04	1	1	1	0		4
BC	0,02	1	1	1	1	0	5
CB	0,02	1	1	1	1	1	6
CC	0,01	1	1	1	1	1	6

$$L_2 = \sum_{i=1}^9 P_i L_i = 2,33 \frac{b}{\text{Simbol}(s^2)}$$

$$V_b = \frac{L_2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2 \cdot V_{\text{simbola}}} = \frac{2,33 \cdot 2 \cdot 10^6}{2 \cdot 5} = 2,33 \frac{b}{s} = 2,33 \text{ Mbps}$$

$V_b = 2,33 \text{ Mbps}$

b) $L_{\text{min}} = H(s) = \sum_{i=1}^3 P_i \log \frac{1}{P_i} = 1,1568 \text{ b/simbol}$

$$V_{b \text{ min}} = L_{\text{min}} \cdot V_{\text{simbola}} = 1,1568 \frac{b}{\text{simbol}} \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{\text{simbol}}{s} = 2,31 \text{ Mbps}$$

$V_{b \text{ min}} = 2,31 \text{ Mbps}$

VEĆ SA DRUGIM PROŠIRENJEIM IZVORA DOBIJAJU SE REZULTATI KOJI SU BLISKI MINIMUMU, TAKO DA DALJE PROŠIRENJE IZVORA SAMO UNOSI DODATNU KOMPLEKSNOST I KAŠNJEĆE A NE DOPRINOSI VEĆOJ KOMPRESIJI

8 a)

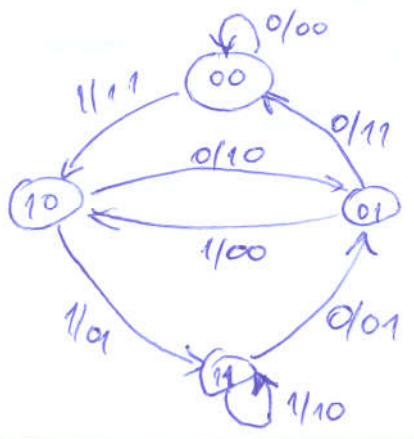
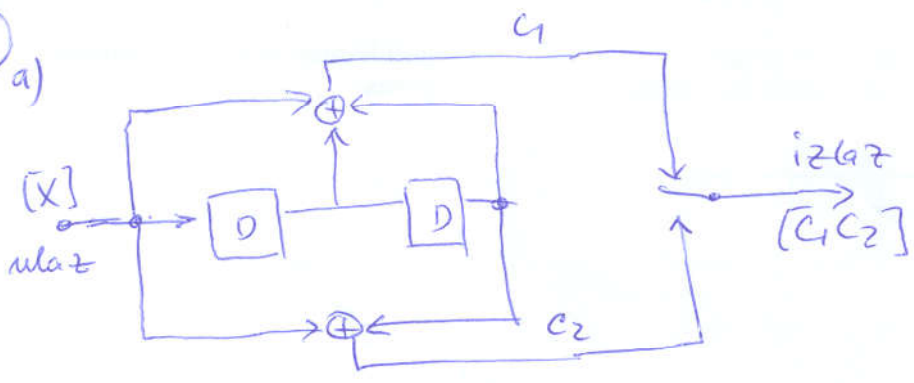
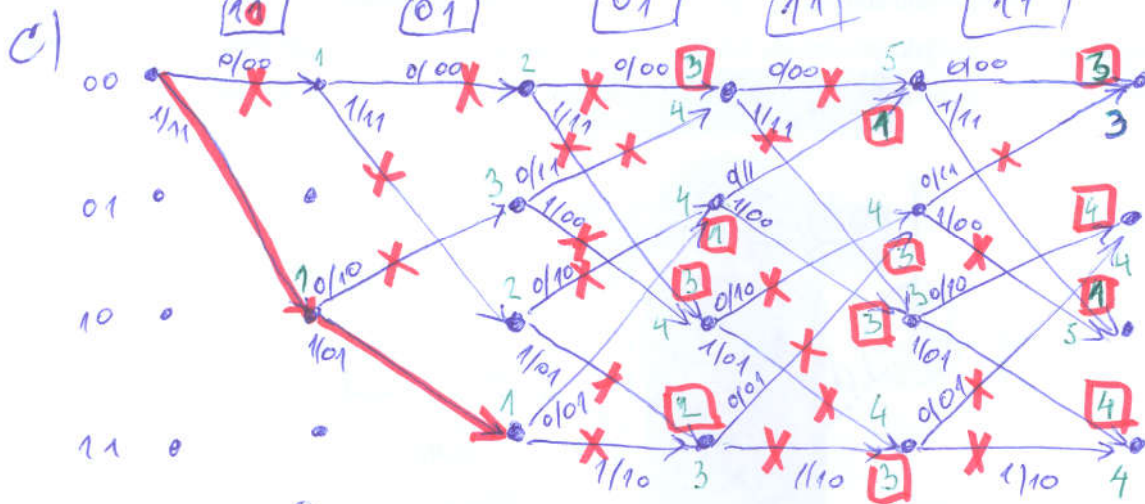


diagram stanja kodera

b) Serijenca uz ulaz: 110 0101 000 ← DODAJE SE DA SE RESETUJE KODER?

Serijska uz izlaz: 11 01 01 11 11 10 00 10 11 00
 (počet na stanje 00)

Serijska uz izlaz se direktno očitava sa dijagrama Stanja kodera P.



1 1 1 01

ULAZ KODERA: 1 1

očigledno je greška u kanalu uspešno ispravljena i prva dva bita uz izlaz demodera odgovaraju serijski uz ulaz kodera!