

## 1. (10 poena)

- a) (5p) Koji tipovi slučajnih promenljivih postoje? Objasniti na koji način se navedeni tipovi slučajnih promenljivih mogu kompletno matematički opisati?
- b) (5p) Transformacija više slučajnih promenljivih.

## 2. (10 poena)

- a) (5p) Definisati autokorelacionu funkciju slučajnog signala po vremenu i po ansamblu i objasniti stacionarnost i ergodičnost slučajnog procesa. Navesti primer nestacionarnog i neergodičnog procesa.
- b) (5p) Sinusoida sa slučajnom fazom – funkcija gustine verovatnoće, momenti, autokorelaciona funkcija, spektralna gustina snage. Sličnosti i razlike sa determinističkim prostoperiodičnim signalom. Šta se može postići sumiranjem većeg broja sinusoida sa slučajnom fazom?

## 3. (10 poena)

- a) (5p) Diferencijalni koder kao Markovljev izvor. Ako se na ulazu u koder dovodi statistički nezavisni binarni niz nula i jedinica gde je verovatnoća pojave jedinice  $p$  a pojave nule  $q=1-p$ , nacrtati dijagram stanja kodera i odrediti entropiju na izlazu diferencijalnog kodera i entropiju njemu pridruženog izvora.
- b) (5p) Lempel-Zivov algoritam. Na jednom primeru poruke koja se sastoji od samo dva simbola „a“ i „b“ objasniti kako se formira rečnik i kako se vrši kodovanje. Uporediti LZ sa Hafmenovim algoritmom (prednosti i mane). Za koje tipove izvora je bolji Hafmen a za koje LZ algoritam?

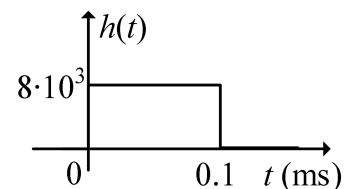
## 4. (10 poena)

- a) (5p) Navesti osnovne tipove cikličnih kodova, njihove najznačajnije dobre i loše osobine i mogućnosti primene.
- b) (5p) LDPC kodovi. Objasniti konstrukciju regularnih i neregularnih LDPC kodova. Uporediti njihove performanse sa turbo kodovima. Navesti neki komunikacioni sistem u kome se primenjuje LDPC kod.

5. (15 poena) Posmatraju se dve nezavisne slučajne promenljive  $X$  i  $Y$  koje imaju Gausovu raspodelu srednje vrednosti nula i varijanse  $\sigma^2$ . Odrediti raspodele slučajnih promenljivih  $R$  i  $\theta$  koje su definisane relacijama:  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  i  $\Theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$ . Da li su slučajne promenljive  $R$  i  $\theta$  zavisne ili nezavisne, obrazložiti odgovor?

## 6. (15 poena)

- a) (10p) Na ulazu linearnog komunikacionog kanala, čiji je impulsni odziv prikazan na slici 6, deluje beli šum spektralne gustine snage  $S_X = 10^{-5}$  W/Hz. Odrediti autokorelacionu funkciju i srednju snagu slučajnog signala  $Y(t)$  na izlazu kanala.
- b) (5p) Ako se na ulazu kanala osim šuma nalazi i signal sinusodalnog talasnog oblika amplitude 2 V i učestanosti 1 kHz, odrediti srednju snagu signala i odnos signal-šum u decibelima na izlazu kanala.



Slika 6

7. (15 poena) Digitalni izvor bez memorije generiše simbole  $A, B$  sa verovatnoćama 0.7 i 0.3, respektivno i brzinom od 5 miliona simbola u sekundi. Za prenos signala je na raspolaganju binarni kanal ograničene brzine signaliziranja.

- a) (9p) Izvršiti statističko kodovanje trećeg proširenja izvora korišćenjem Hafmenovog postupka i odrediti efikasnost kodera.
- b) (6p) Odrediti verovatnoću pojave logičke nule i logičke jedinice na izlazu kodera, odgovarajući informacijski fluks i potrebnu brzinu signaliziranja binarnog kanala za prenos kodovanog signala.

8. (15 poena) Na ulaz sistematskog konvolucionog kodera  $g=[1, 7, 5]$  stiže sekvenca bita: 1 0 1 1 1 0 1.

- a) (2p) Nacrtati blok dijagram (šemu) kodera i odgovarajući dijagram stanja.
- b) (5p) Izvršiti kodovanje ulazne sekvence pod pretpostavkom da je koder bio u početnom stanju 00.
- c) (8p) Sekvenca dobijena u tački (b) prenosi se kroz komunikacioni kanal sa šumom. Koristeći Viterbijev algoritam dekodovati bar jedan bit ulazne sekvence ako se zna da je u početnom trenutku konvolucionni dekodier bio u stanju 00 i da je tokom prenosa sekvence na izlazu kodera iz tačke (b) došlo do greške na trećem prenesenom bitu.

**NAPOMENA:** Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 180 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja ispita.

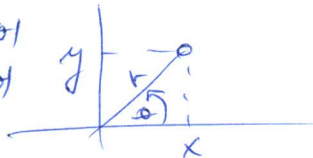
$$\textcircled{5} \quad \left. \begin{aligned} f_x(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ f_y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Zdručena raspodjela (PDF)

$$f_{XY}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \quad (\text{NEZAVISNE PROMENLJIVE})$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= r \cos \theta = S_1(r,\theta) \\ y &= r \sin \theta = S_2(r,\theta) \end{aligned}$$



$$f_{R\theta}(r,\theta) = f_{XY}(x,y) \Big|_{\substack{x=S_1(r,\theta) \\ y=S_2(r,\theta)}} \cdot |J'|$$

$$|J'| = \begin{vmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial r} & \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial S_2}{\partial r} & \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\boxed{|J'| = r}$$

$$f_{R\theta}(r,\theta) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{2\sigma^2}} \cdot r = \frac{r}{2\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \begin{aligned} r &\geq 0 \\ \theta &\in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R\theta}(r,\theta) d\theta = \frac{r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}}{2\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r \geq 0$$

$$f_\theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R\theta}(r,\theta) dr = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2\sigma^2}, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

SMENA

$$\left( \frac{r}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 = u \Rightarrow \frac{2r dr}{2\sigma^2} = du \Rightarrow r dr = \sigma^2 du$$

$$f_{R\theta}(r,\theta) = \frac{r}{2\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} = \left( \frac{1}{2\sigma^2} \right) \cdot \left( \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right) = f_\theta(\theta) \cdot f_R(r)$$

$\Rightarrow$  slučajne promenljive  $R$  i  $\theta$  su NEZAVISNE!

6 a)  $|H(j\omega)| = A \tau \text{sinc}(\omega \tau)$ ,  $A = 8 \cdot 10^3$ ,  $\tau = 0,1 \text{ ms} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

$$|H(j\omega)| = 8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \text{sinc}(10^{-4} \cdot \omega) = 0,8 \text{sinc}(10^{-4} \cdot \omega)$$

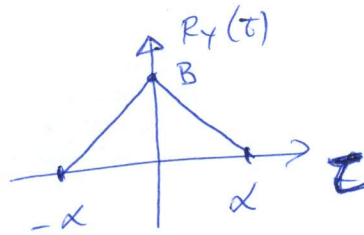
$$S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_X(\omega) = 0,64 \text{sinc}^2(10^{-4} \omega) \cdot 10^{-7}$$

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ S_Y(\omega) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ 64 \cdot 10^{-7} \text{sinc}^2(10^{-4} \omega) \}$$

$$d = 10^{-4}$$

$$B = \frac{64 \cdot 10^{-7}}{d} = 64 \cdot 10^{-3}$$

$$R_Y(\tau) = B \Lambda\left(\frac{\tau}{d}\right)$$



$$P_Y = R_Y(0) = B = 64 \text{ mW}$$

b)  $P_x = P_{\text{signal}} = \frac{A_0^2}{2}$ , gde je  $A_0$  amplituda sinusne komponente  
 $x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t)$ ,  $A_0 = 0,2 \text{ V}$   
 $f_0 = 1 \text{ kHz}$

$$S_X(\omega) = \frac{A_0^2}{4} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{A_0^2}{4} \delta(\omega - \omega_0), \quad R_X(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_X(\omega) = \frac{A_0^2}{4} \cdot 0,8 \text{sinc}(0,1) \cdot [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$R_Y(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cdot 0,8 \text{sinc}(0,1) \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$$P_Y = R_Y(0) = \frac{A_0^2}{2} \cdot 0,8 \text{sinc}(0,1) = 1,9673 \text{ W}$$

$$(S/N)_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_{Y \text{ signal}}}{P_{Y \text{ sum}}} = 10 \log_{10} \frac{1,9673}{0,064} = 14,9 \text{ dB}$$

7

a)

AAA	0,343	00	0,343	00	0,343	00	0,343	00	0,343	00
ABB	0,147	01	0,147	01	0,147	11	0,216	10	0,294	01
ABA	0,147	010	0,147	010	0,147	010	0,147	11	0,216	10
BAA	0,147	011	0,147	011	0,147	011	0,147	010	0,147	11
ABB	0,063	1000	0,090	101	0,126	100	0,147	011		
BAB	0,063	1001	0,063	1000	0,090	101				
BBA	0,063	1010	0,063	1001						
BBB	0,027	1011								

0,363	1	0,637	0
0,343	00	0,363	1
0,294	01		

$$L_3 = \sum_{i=1}^8 P_i l_i = 2,726 \frac{\text{bit}}{\text{Simbol}(s^3)}$$

$$H_3 = 3 \cdot H = 3 \cdot \sum_{i=1}^2 P_i \log \frac{1}{P_i} = 2,6439 \frac{\text{sh}}{\text{Simbol}(s^3)}$$

$$\eta = \frac{H}{L} = \frac{H_3}{L_3} = \frac{2,6439}{2,726} = 96,99\% \approx 97\%$$

b)

$$P(0) = (0,343 \cdot 2 + 0,147 \cdot 3 + 0,063 \cdot 7 + 0,027 \cdot 1) / L_3$$

$$P(0) = 0,5851$$

$$P(1) = 1 - P(0) = 0,4149$$

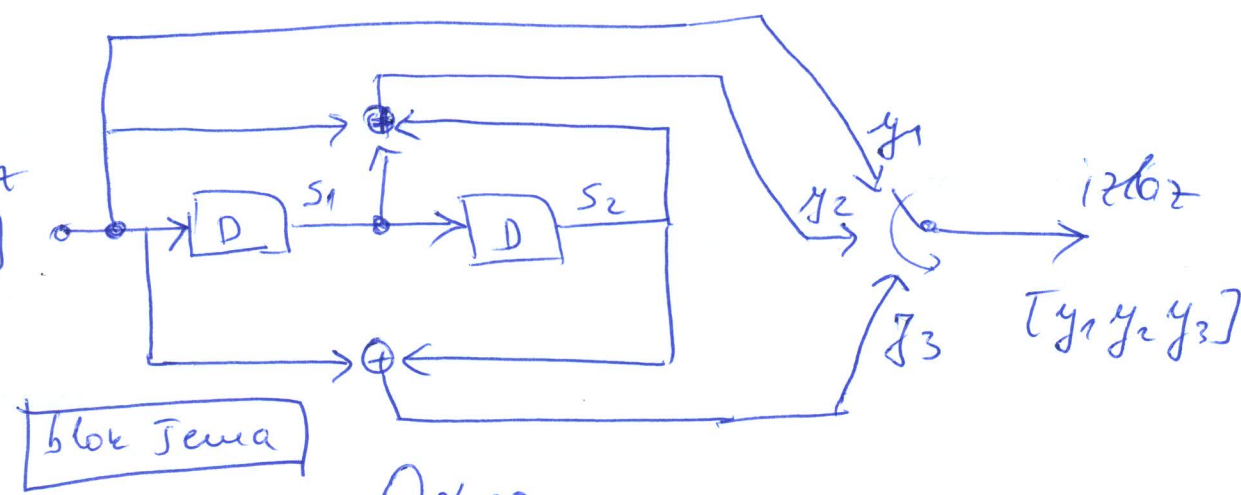
$$V_b = V_s \cdot \frac{L_3}{3} = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{simbol}}{s} \cdot \frac{1}{3} 2,726 \frac{\text{bit}}{\text{Simbol}} = 4,54 \text{ Mbps}$$

$$H_b = P(0) \log \frac{1}{P(0)} + P(1) \log \frac{1}{P(1)} = 0,9790 \frac{\text{sh}}{\text{bit}}$$

$$\Phi_b = H_b \cdot V_b = 4,448 \text{ sh/s}$$

8

a) ulaz [X]



blok skema

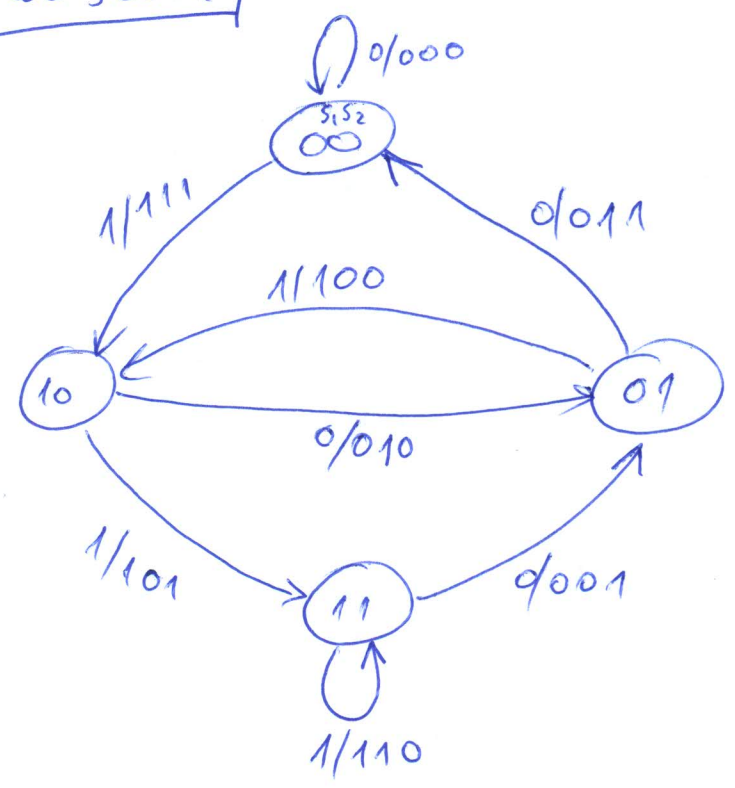
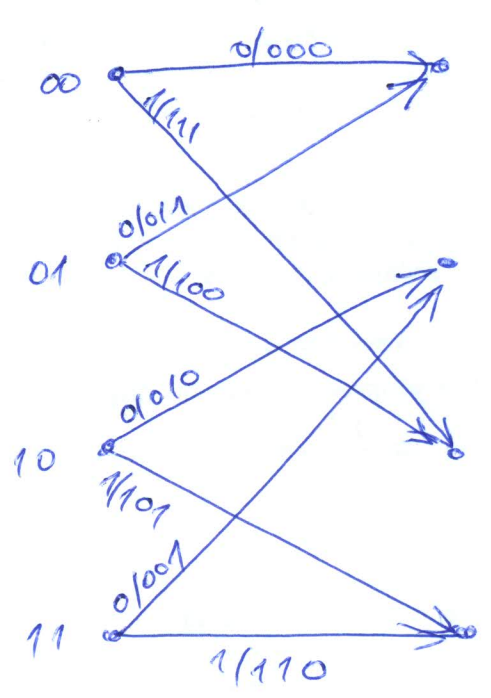


diagram stanja

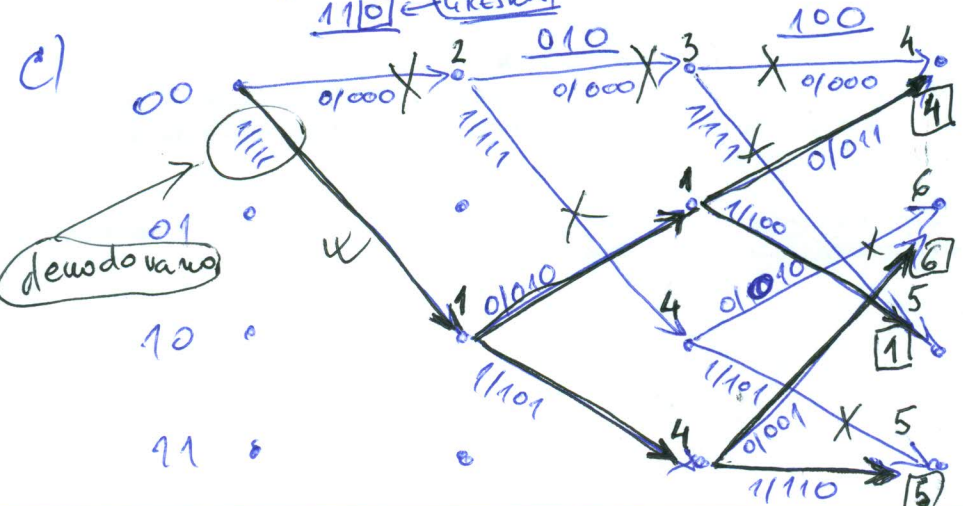


trčis diagram

b)

ulaz	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
stanje	00	10	01	10	11	11	01	10	01	00
izlaz	111	010	100	101	110	001	100	010	011	000

◀ dodatak da bi se uvek vratio u početno stanje



prvi bit je već dekodovan  
 $1/111$   
 $\Rightarrow \hat{X} = 1$