

1. (15 poena) Dve slučajne promenljive X i Y imaju združenu funkciju gustine verovatnoće definisanu na sledeći način:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} A \cdot e^{-(x+3y)}; & x, y \geq 0 \\ 0 & ; x, y < 0 \end{cases}; A = const$$

a) (3p) Odrediti vrednost koeficijenta A.

b) (12p) Odrediti funkcije gustine verovatnoće svake slučajne promenljive.

2. (15 poena) Posmatraju se dve slučajne promenljive X i Y sa uniformnom raspodelom. Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu u opsegu od -2 do 2, a slučajna promenljiva Y ima uniformnu raspodelu u opsegu od -3 do 3. Odrediti i grafički predstaviti raspodelu slučajne promenljive $Z = X + Y$.

3. (15 poena) Izvor sa memorijom prvog reda koji emituje simbole s_1, s_2, s_3 i s_4 opisan je tranzicionom matricom:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (3p) Nacrtati dijagram stanja koji odgovara ovom izvoru.

b) (8p) Odrediti verovatnoće pridruženog izvora.

c) (4p) Odrediti entropiju pridruženog izvora.

4. (15 poena) Izvršiti dekodovanje sekvence [0101 1100 1000] ako se zna da je na predaji primenjen Hemingov (12,7) kod.

NAPOMENA: Dozvoljeno je korišćenje samo pribora za pisanje i neprogramabilnog džepnog kalkulatora. Ispit traje 150 minuta. Nije dozvoljeno napuštanje ispita tokom prvih 60 minuta. Nije dozvoljeno iznošenje zadatka do kraja kolokvijuma.

$$\textcircled{1} \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dx dy = 1$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} A \cdot e^{-(x+3y)} dx dy = 1 \Rightarrow A \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-3y} dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot \frac{e^{-x}}{-1} \Big|_0^{+\infty} \cdot \frac{e^{-3y}}{-3} \Big|_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow A(0+1)(0+\frac{1}{3}) = 1 \Rightarrow \frac{A}{3} = 1 \Rightarrow \underline{A=3}$$

$$\text{b) } f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 3e^{-(x+3y)} dy & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 3e^{-x} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-3y} dy & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3e^{-x} \cdot \frac{e^{-3y}}{-3} \Big|_0^{+\infty} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} =$$

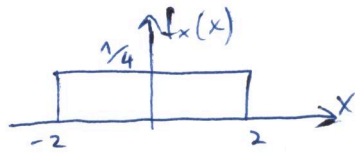
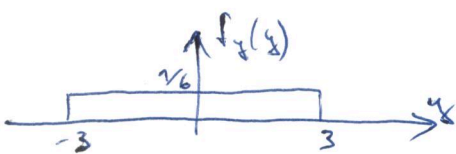
$$= \begin{cases} e^{-x}(0+1) & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,y) dx = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 3e^{-(x+3y)} dx & ; y \geq 0 \\ 0 & ; y < 0 \end{cases} =$$

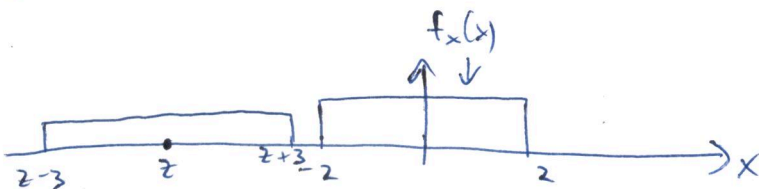
$$= \begin{cases} 3e^{-3y} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx & ; y \geq 0 \\ 0 & ; y < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3e^{-3y} \cdot \frac{e^{-x}}{-1} \Big|_0^{+\infty} & ; y \geq 0 \\ 0 & ; y < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 3e^{-3y}(0+1) & ; y \geq 0 \\ 0 & ; y < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3e^{-3y} & ; y \geq 0 \\ 0 & ; y < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} f_z(z) = f_x(z) * f_y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx$$

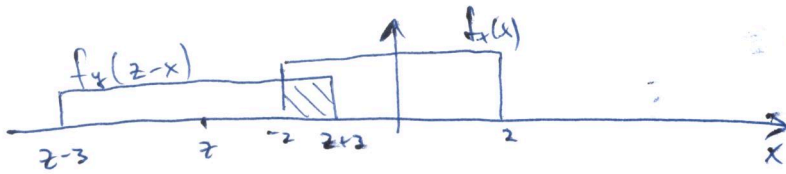


$$1) z \leq -5$$



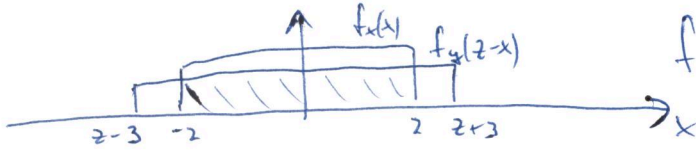
$$\underline{f_z(z) = 0}$$

2) $-5 < z \leq -1$



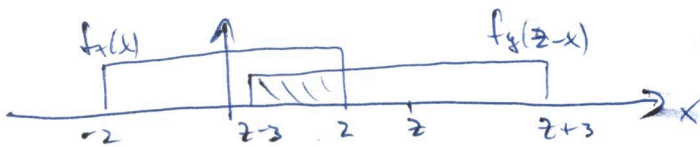
$$f_z(z) = \int_{-2}^{z+3} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} dx = \frac{1}{24} (z+5)$$

3) $-1 < z \leq 1$



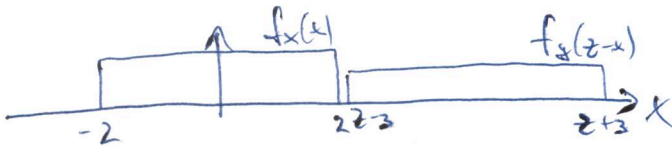
$$f_z(z) = \int_{-2}^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} dx = \frac{1}{24} \cdot 4 = \frac{1}{6}$$

4) $1 < z \leq 5$



$$f_z(z) = \int_{z-3}^2 \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} dx = \frac{1}{24} (5-z)$$

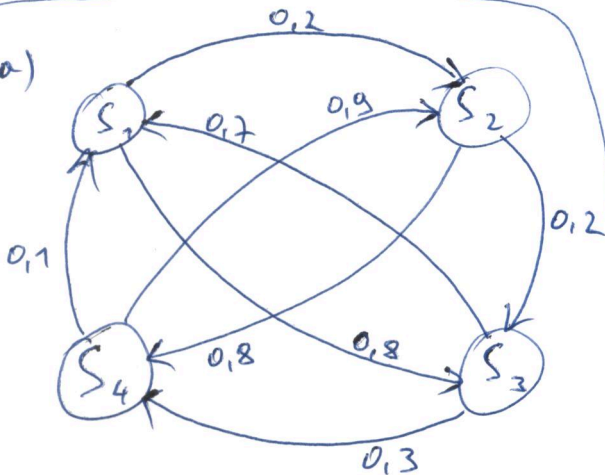
5) $z > 5$



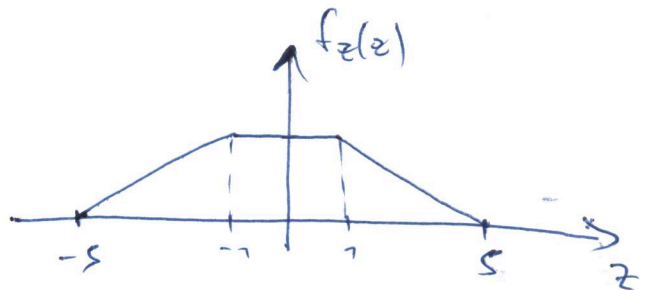
$$f_z(z) = 0$$



3) a)



ГРАФИЧКИ:



b) $P(S_1) = 0,7 P(S_3) + 0,1 P(S_4)$

$P(S_2) = 0,2 P(S_1) + 0,9 P(S_4)$

$P(S_3) = 0,8 P(S_1) + 0,2 P(S_2)$

$P(S_4) = 0,8 P(S_2) + 0,3 P(S_3) \rightarrow$ МЕЊАМО СА $\sum P(S_i) = 1$

$$\begin{aligned} 0,7 P(S_3) + 0,1 P(S_4) - P(S_1) &= 0 \\ 0,2 P(S_1) + 0,9 P(S_4) - P(S_2) &= 0 \\ 0,8 P(S_1) + 0,2 P(S_2) - P(S_3) &= 0 \\ P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) + P(S_4) &= 1 \end{aligned}$$

$$0,14 P(S_3) + 0,82 P(S_4) - P(S_2) = 0$$

$$-0,44 P(S_3) + 0,08 P(S_4) + 0,2 P(S_2) = 0 \quad \cdot 0,2$$

$$1,7 P(S_3) + 1,1 P(S_4) + P(S_2) = 1$$

$$-0,412 P(S_3) + 0,264 P(S_4) = 0$$

$$1,84 P(S_3) + 2,02 P(S_4) = 1 \quad \cdot \frac{1,84}{0,412}$$

$$3,20 P(S_4) = 1 \Rightarrow P(S_4) = 0,312$$

$$P(S_3) = 0,200$$

$$P(S_2) = 0,315$$

$$P(S_1) = 1 - P(S_2) - P(S_3) - P(S_4) = 0,173$$

$$c) H(\bar{S}) = \sum P(S_i) \cdot \lg \frac{1}{P(S_i)} = \sum P(S_i) \cdot \frac{\lg(1/P(S_i))}{\lg 2} = 1,952 \text{ Шх/Симв}$$

4)

z_4	z_3	z_2	z_1	
0	0	0	1	$x_1 = z_1$
0	0	1	0	$x_2 = z_2$
0	0	1	1	$x_3 = i_1$
0	1	0	0	$x_4 = z_3$
0	1	0	1	$x_5 = i_2$
0	1	1	0	$x_6 = i_3$
0	1	1	1	$x_7 = i_4$
1	0	0	0	$x_8 = z_4$
1	0	0	1	$x_9 = i_5$
1	0	1	0	$x_{10} = i_6$
1	0	1	1	$x_{11} = i_7$
				$x_{12} = z_5 = \sum_{i=1}^{11} x_i$

$$S_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11}$$

$$S_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11}$$

$$S_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7$$

$$S_4 = y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11}$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{12} y_i$$

$$S = Y \cdot U^T \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = [0101 \quad 1100 \quad 1000]$$

$$S = Y \cdot U^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_5 = 1 \\ S_{4321} = 1100 = 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ЗНАКА ПРЕРКА НА} \\ \text{12. МЕСТЕ} \end{array}$$

$$X = [0101 \quad 1100 \quad 1000 \quad 1]$$

$$i = [0110100]$$