

1. (15 poena) Funkcija gustine verovatnoće slučajne promenljive  $X$  ima oblik:

$$f_x(x) = 3A \cdot e^{-2B|x|}, \quad -\infty < x < \infty;$$

$A$  i  $B$  su konstante.

- (6 poena) Naći vezu između koeficijenata  $A$  i  $B$ .
- (7 poena) Odrediti kumulativnu funkciju raspodele  $F_x(x)$ .
- (2 poena) Nacrtati dijagram funkcije gustine verovatnoće  $f_x(x)$  i kumulativne funkcije raspodele  $F_x(x)$  za slučaj kada je  $B = 1$ .

2. (15 poena) Posmatrani komunikacioni kanal se ponaša kao filter propusnik niskih učestanosti koji ima impulsni odziv definisan sledećom funkcijom:

$$h(t) = e^{-4\pi f_g t} \cdot u(t),$$

pri čemu je sa  $u(t)$  označena jedinična odskočna funkcija, dok je  $f_g$  granična učestanost filtra. Na ulazu filtra deluje slučajan proces  $x(t)$  čija je srednja vrednost jednaka nuli, a autokorelaciona funkcija je:

$$R_x(\tau) = 32\pi \cdot \delta(\tau)$$

Odrediti vrednost granične učestanosti filtra tako da srednja snaga signala na izlazu komunikacionog kanala iznosi 2 mW.

3. (15 poena) Izvršiti kodovanje izvora sa listom simbola  $s_i$  i verovatnoćama pojavljivanja simbola  $P(s_i)$ , datih u Tabeli 1:

- (7,5 poena) Primenom *Huffman*-ovog postupka.
- (7,5 poena) Primenom *Shannon-Fano*-ovog postupka.

Tabela 1. Lista simbola  $s_i$  i verovatnoća pojavljivanja simbola  $P(s_i)$

$s_i$	$P(s_i)$
$s_1$	0,29
$s_2$	0,26
$s_3$	0,17
$s_4$	0,13
$s_5$	0,08
$s_6$	0,04
$s_7$	0,02
$s_8$	0,01

4. (15 poena) U telekomunikacionom sistemu mogu se očekivati impulsne smetnje trajanja  $\tau = 1,5$  ms sa periodom  $T_p = 18$  ms. Binarni protok na izlazu sistema je  $V_b = 2000$  b/s.

- (2 poena) Odrediti minimalni stepen interlivinga.
- (5 poena) Izvršiti izbor i konstruisati odgovarajući *Hamming*-ov kod koji omogućava korekciju jedne greške.
- (8 poena) Izvršiti kodovanje sledeće sekvence informacionih bita: 01000000 11111110 01010101. Ukoliko je nakon postupka interlivinga došlo do greške na 8, 9, i 10. bitu, pokazati kako se nakon postupka deinterlivinga mogu eliminisati ove greške.

# PE UE H6A

$$\textcircled{1} \text{ a) } \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 3A \cdot e^{-2B|x|} dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3A \int_{-\infty}^0 e^{2Bx} dx + 3A \int_0^{+\infty} e^{-2Bx} dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3A}{2B} \left( e^{2Bx} \Big|_{-\infty}^0 - e^{-2Bx} \Big|_0^{+\infty} \right) = 1 \Rightarrow \frac{3A}{2B} (1 - 0 - 0 + 1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3A}{B} = 1 \Rightarrow \underline{B = 3A}$$

$$\text{b) } F_x(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx$$

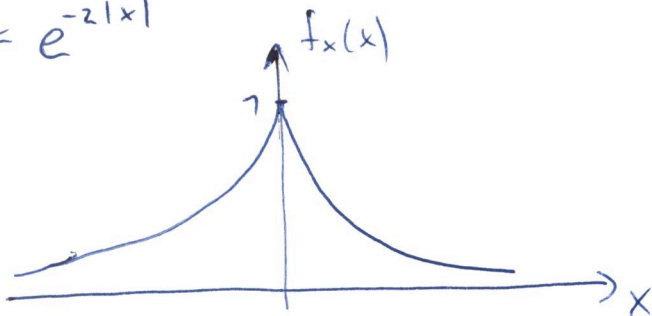
$$\underline{x < 0}: F_x(x) = \int_{-\infty}^x 3A \cdot e^{2Bx} dx = \frac{3A}{2B} e^{2Bx} \Big|_{-\infty}^x = \frac{3A}{2B} e^{2Bx} = \underline{\frac{1}{2} e^{2Bx}}$$

$$\underline{x \geq 0}: F_x(x) = F_x(0) + \int_0^x 3A e^{-2Bx} dx = \frac{1}{2} - \frac{3A}{2B} e^{-2Bx} \Big|_0^x =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^{-2Bx} - 1) = \underline{1 - \frac{1}{2} e^{-2Bx}}$$

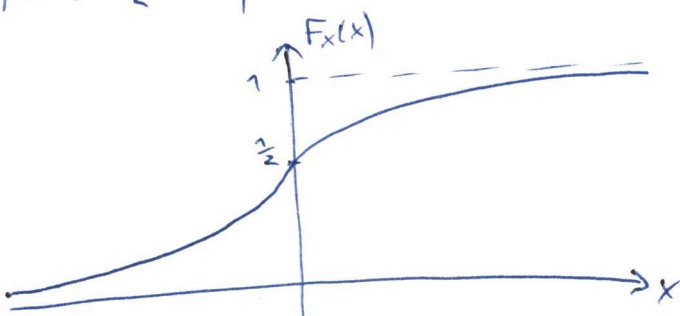
$$\text{c) } B = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$f_x(x) = e^{-2|x|}$$



$$F_x(x) = \frac{1}{2} e^{2x}; x < 0$$

$$F_x(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2x}; x \geq 0$$



$$\textcircled{2} \quad h(t) = e^{-4\pi f_g t} \cdot u(t)$$

$$H(jf) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-4\pi f_g t} \cdot u(t)\}$$

$$e^{-at} \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{\textcircled{a} + j2\pi f} \quad \text{--- ТАБЛИЦА}$$

$\parallel$   
 $4\pi f_g$

$$H(jf) = \frac{1}{4\pi f_g + j2\pi f} = \frac{(4\pi f_g)^{-1}}{1 + j\left(\frac{f}{2f_g}\right)}$$

$$R_x(\tau) = 32\pi \cdot \delta(\tau)$$

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \mathcal{F}\{32\pi \delta(\tau)\}$$

$$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} \quad \text{--- ТАБЛИЦА}$$

$$\Rightarrow \delta(\tau) \leftrightarrow 1$$

$$S_x(f) = 32\pi$$

$$S_y(f) = |H(jf)|^2 \cdot S_x(f) = \frac{(4\pi f_g)^{-2}}{1 + \left(\frac{f}{2f_g}\right)^2} \cdot 32\pi$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{(4\pi f_g)^{-2} \cdot 32\pi}{1 + (f/2f_g)^2}\right\}$$

$$e^{-|t|/T} \longleftrightarrow \frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2} \quad \text{--- ТАБЛИЦА}$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\frac{32}{16\pi f_g^2}}{1 + \left(\frac{2\pi f}{4\pi f_g}\right)^2}\right\} = \frac{4}{f_g} \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2 \cdot \frac{1}{4\pi f_g}}{1 + \left(2\pi f \cdot \frac{1}{4\pi f_g}\right)^2}\right\} = \frac{4}{f_g} e^{-|\tau| \cdot 4\pi f_g}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{y^2(t)} = R_y(0) = \frac{4}{f_g} \\ \overline{y^2(t)} = 2 \text{ мВ} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f_g = 2 \text{ кГц}}$$

3)  
a)

$S_i$	$P(S_i)$	$X_i$	1. РЕДУКЦИЈА	$X_i$	2. РЕД	$X_i$	3. РЕД	$X_i$	4. РЕД	$X_i$	5. РЕД	$X_i$	6. РЕД	$X_i$
$S_1$	0,29	00	0,29	00	0,29	00	0,29	00	0,29	00	0,43	1	0,57	0
$S_2$	0,26	10	0,26	10	0,26	10	0,26	10	0,28	01	0,29	00	0,43	1
$S_3$	0,17	11	0,17	11	0,17	11	0,17	11	0,26	10	0,28	01		
$S_4$	0,13	011	0,13	011	0,13	011	0,15	010	0,17	11				
$S_5$	0,08	0100	0,08	0100	0,08	0100	0,13	011						
$S_6$	0,04	01010	0,04	01010	0,07	0101								
$S_7$	0,02	010110	0,03	01011										
$S_8$	0,01	010111												

КОД

b)

$S_i$	$P(S_i)$	1. ПОДЕЛА	2. ПОДЕЛА	3. ПОДЕЛА	4. ПОДЕЛА	5. ПОДЕЛА	6. ПОДЕЛА	КОД
$S_1$	0,29	0	0					00
$S_2$	0,26	0	1					01
$S_3$	0,17	1	0					10
$S_4$	0,13	1	1	0				110
$S_5$	0,08	1	1	1	0			1110
$S_6$	0,04	1	1	1	1	0		11110
$S_7$	0,02	1	1	1	1	1	0	111110
$S_8$	0,01	1	1	1	1	1	1	111111

4) a)  $T_b = \frac{1}{V_b} = \frac{1}{2000} = 0,5 \text{ ms}$  - ТРАЈАЊЕ ЈЕДНОГ БИТА

$T_p = 18 \text{ ms} \Rightarrow \frac{18}{0,5} = 36 \text{ bits}$  - У ТОКУ ЈЕДНЕ ПЕРИОДЕ ЧМА 36 БИТА

$\tau = 1,5 \text{ ms} \Rightarrow \frac{1,5}{0,5} = 3 \text{ bits}$  - У ТОКУ СМЕТКЕ  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{l = 3}$  - МИН. СТЕПЕЊИ ИНТЕРЛУВИНГА

b)  $\frac{36}{3} = 12$  - МАКС. ДУЖИНА КОДНЕ РЕЧУ

$n \leq 12 \Rightarrow \underline{n = 12}$

$2^{n-k} \geq 1+n \Rightarrow 2^m \geq 13 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = n - m = \underline{8}$

$\Rightarrow \underline{\text{КОД}} (12, 8)$

$z_4$	$z_3$	$z_2$	$z_1$	
0	0	0	1	$x_1 = z_1$
0	0	1	0	$x_2 = z_2$
0	0	1	1	$x_3 = i_1$
0	1	0	0	$x_4 = z_3$
0	1	0	1	$x_5 = i_2$
0	1	1	0	$x_6 = i_3$
0	1	1	1	$x_7 = i_4$
1	0	0	0	$x_8 = z_4$
1	0	0	1	$x_9 = i_5$
1	0	1	0	$x_{10} = i_6$
1	0	1	1	$x_{11} = i_7$
1	1	0	0	$x_{12} = i_8$

$$z_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7$$

$$z_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7$$

$$z_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_8$$

$$z_4 = i_5 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_8$$

с) ииФ:

$$01000000 \mid 11111110 \mid 01010101$$

$$z_1 = z_3 = 1 \quad z_2 = z_4 = 0$$

$$z_2 = z_4 = 0 \quad z_3 = 1$$

код (x):

$$\underline{100110000000} \mid \underline{1111111110} \mid \underline{000110100101}$$

ИНТЕРЛУБЕР:

$$110 \mid 010 \mid 010 \mid 111 \mid 111 \mid 010 \mid 011 \mid 010 \mid 010 \mid 011 \mid 010 \mid 001$$

ПРИЕМ:

$$110 \mid 010 \mid 001 \mid 011 \mid 111 \mid 010 \mid 011 \mid 010 \mid 010 \mid 011 \mid 010 \mid 001$$

ДЕИНТЕРЛУБЕР:

$$\underline{1000} \mid \underline{10000000} \mid \underline{110} \mid \underline{11111110} \mid \underline{000} \mid \underline{110100101}$$

1. КОДА ПЕЧ                      2. КОДА ПЕЧ                      3. КОДА ПЕЧ

$$S_1 = y_1 \oplus y_3 \oplus y_5 \oplus y_7 \oplus y_9 \oplus y_{11}$$

$$S_2 = y_2 \oplus y_3 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{10} \oplus y_{11}$$

$$S_3 = y_4 \oplus y_5 \oplus y_6 \oplus y_7 \oplus y_{12}$$

$$S_4 = y_8 \oplus y_9 \oplus y_{10} \oplus y_{11} \oplus y_{12}$$

1. КОДА ПЕЧ:  
 $S_{4321} = 0100_2 = 4$  → ПОЗИЦИЯ ГРЕУКА

2. КОДА ПЕЧ:  
 $S_{4321} = 0011_2 = 3$  →

3. КОДА ПЕЧ:  
 $S_{4321} = 0011_2 = 3$  →

⇒ код:

$$\underline{100110000000} \mid \underline{1111111110} \mid \underline{000110100101}$$

ииФ:

$$01000000 \mid 11111110 \mid 01010101$$